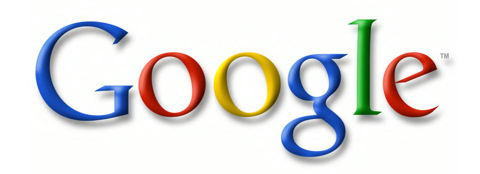


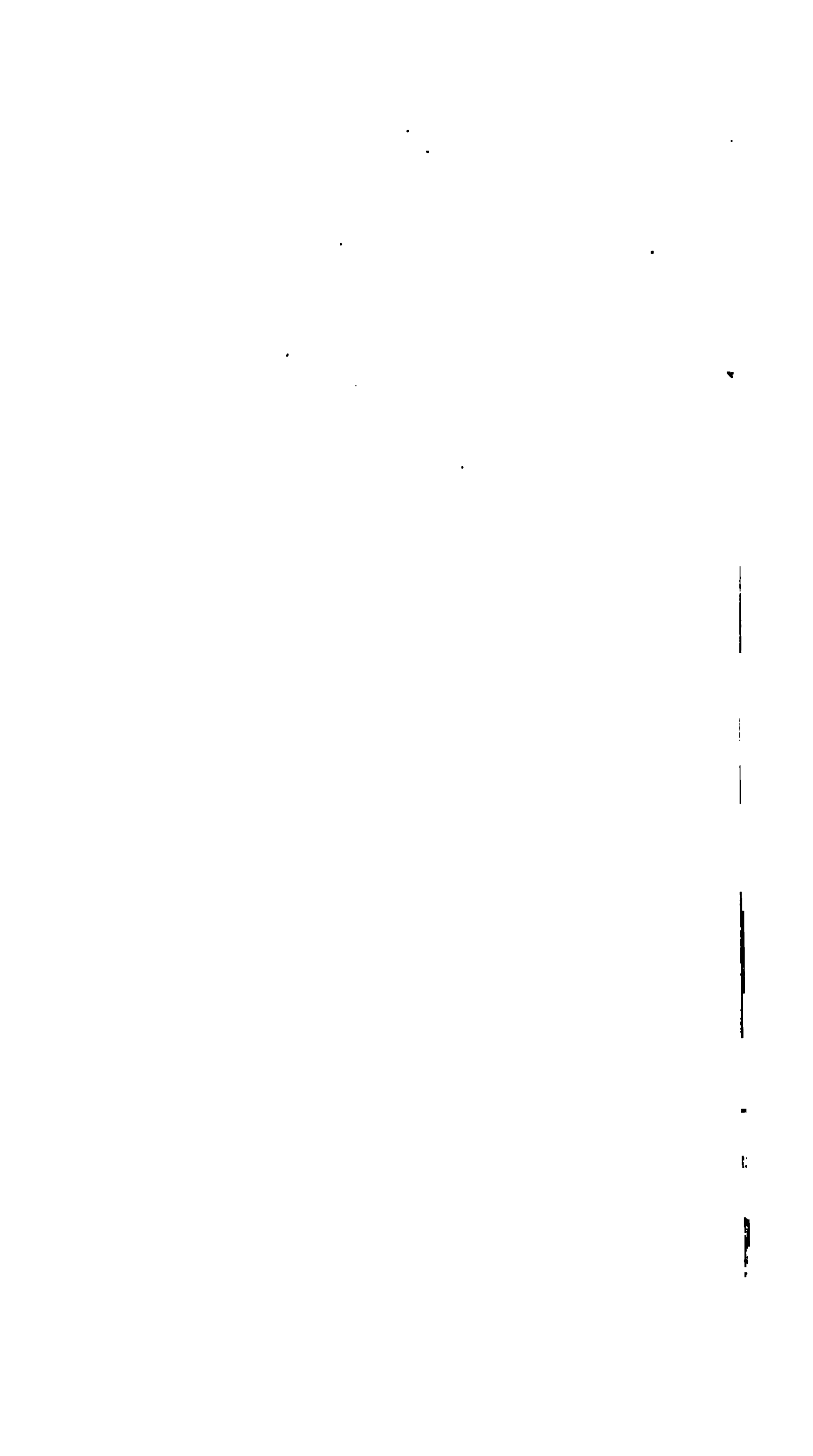


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910075 2











1, Equilibrium

S MD

Lehrbuch
der
Gesetze des Gleichgewichts
und
der Bewegung
fester und flüssiger Körper

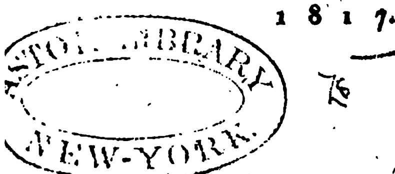
von

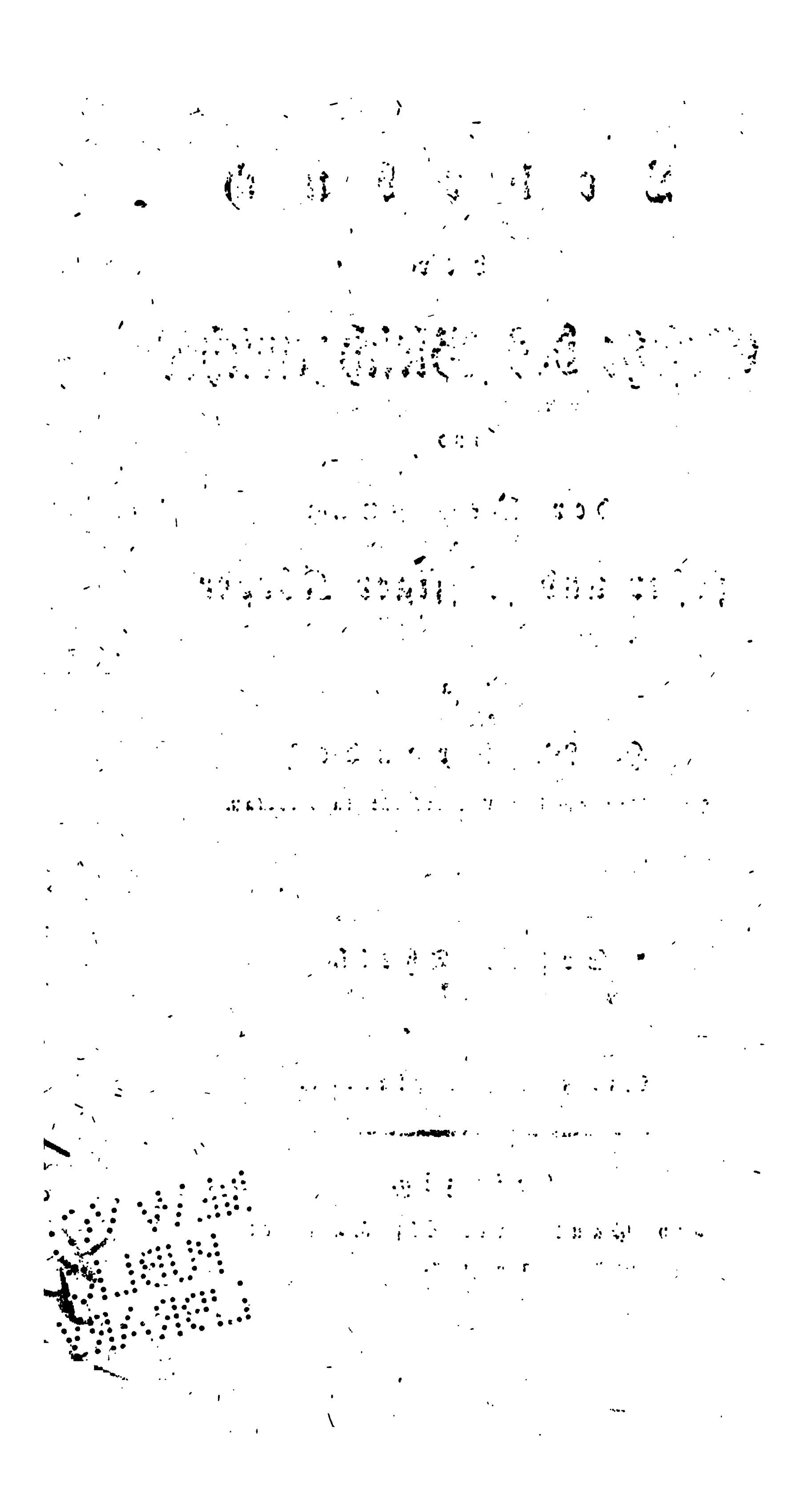
H. W. Brandes,
Professor an der Universität in Breslau.

Erster Theil.

Mit 5 Kupferplatten.

Leipzig,
bey Paul Gotthelf Kummer
1817.





Vorrede.

Obgleich wir schon eine ziemlich große Anzahl von Lehrbüchern der Mathematik besitzen, so glaube ich doch, daß man nicht behaupten kann, allen Bedürfnissen sei durch diese so Genüge geleistet, daß keine Wünsche mehr übrig blieben, und ich hoffe deshalb, man werde ein neues Lehrbuch nicht geradezu als überflüssig ansehen, wenn es auch nur als ein Versuch sich ankündigt, um nach einem bestimmt aufgefaßten Plane etwas zu leisten, was unter seinen Vorgängern keiner ganz leistet. Wir besitzen einige vortreffliche Bücher über die mechanischen Wissenschaften, unter denen Eytelweins Handbuch der Statik fester Körper einen der ersten Plätze verdient; aber so klar und untadelhaft sie geschrie-

*

ben sein mögen, so haben sie dennoch das Vorurtheil derer gegen sich, welche die höhere Analysis als etwas unerlernbar Schweres betrachten, und jedes Buch von sich weisen, welches ohne Kenntniß derselben nicht kann gelesen werden. Ueberdas ist es unstreitig ein Bedürfniß der meisten Lernenden, zuerst eine kurze Uebersicht der Hauptsätze einer Wissenschaft in systematischer und gründlicher Entwickelung vor Augen zu haben, ehe sie es wagen können, sich mit einem ausführlichen, ganz ins Einzelne gehenden Buche bekannt zu machen. Zu einer solchen Vorbereitung besitzen wir freilich Bücher genug; aber ich müßte mich sehr irren, wenn man nicht ihnen fast ohne Ausnahme den Vorwurf machen müßte, daß sie zu sehr bloß die leichtesten Sätze erklären, und den Leser kaum einen Blick in diejenigen Lehren thun lassen, die ihm doch erst die Wissenschaft lieb machen, und ihm ihren wahren Werth zeigen können. Hier also einen Schritt weiter zu gehen, — ein Buch zu liefern, das dem Anfänger durchaus verständlich, gründlich und dennoch kurz, ihn auch in die schwierigern

Lehren einführe, — das ist mein Zweck bei Ausarbeitung des vorliegenden Werkes gewesen.

Ich setze Leser voraus, welche außer den Lehren der gewöhnlichen Arithmetik, der Elementar-Geometrie, der ebenen und sphärischen Trigonometrie, von der Algebra nur so viel wissen, als zur Auflösung quadratischer Gleichungen nöthig ist (*); Leser freilich, die an strenges Denken gewöhnt sind, und mit gereiftem Verstande einen kurzen und gründlichen Vortrag mit Ernst zu durchdenken vermögen. Diese Leser, so weit es irgend möglich ist, alles das, was die Statik und Mechanik lehren soll, übersehen zu lassen; sie, selbst bei schwierigern Lehren, auf den Standpunct zu stellen, wo sie mit gründlicher

(*) Bei den vorkommenden arithmetischen, geometrischen und trigonometrischen Sätzen, habe ich, wo es nöthig schien, mich auf das von mir herausgegebene Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie (Oldenburg, bei Schulze 1809.) bezogen, so daß kein Satz (die Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades ausgenommen) als bekannt vorausgesetzt wird, der nicht dort erwiesen ist. Die Citata (Arithm.) oder (Geom.) oder (Trigon.) beziehen sich auf die §. §. jenes Lehrbuches.

Ueberzeugung die Hauptsätze dieser Lehren erkennen: und den Weg ahnden können, den man bei einer weiteren Untersuchung verfolgen müßte, scheint mir das beste Mittel, um dem Studium der Mathematik immer mehr Freunde zu gewinnen, und ich habe daher dieses zum Ziel meines Bestrebens gemacht. An den wenigen Stellen, wo ich Hülfssätze nöthig hatte, welche ich nicht als bekannt voraussetzen durfte, habe ich vollständige Beweise derselben eingeschaltet. Auf die analytische Geometrie wird sich der Leser zwar in dem Buche hingeleitet finden; aber sie wird nirgends vorausgesetzt, sondern es findet sich (wie ich wenigstens hoffe) gleichsam von selbst, daß Zeichnung und Formel hier einander unterstützen und beide zum Ziele führen.

Welche Gegenstände ich hier, gestützt auf jene sehr mäßigen Vorkenntnisse, erklärt habe, zeigt das Inhalts-Verzeichniß, und ich hoffe in der Mechanik in demselben Verhältnisse tief einzudringen. Eine völlige, von allen Seiten erschöpfende Darstellung dieser Lehren, konnte nicht

Die Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper.

1. Abschnitt.

2. Abschnitt.

3. Abschnitt.

4. Abschnitt.

5. Abschnitt.

6. Abschnitt.

7. Abschnitt.

8. Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Erklärung. Ruhe ist das Verharren in derselben Lage; Bewegung ist Aenderung der Lage.

§. 2. Um zu bestimmen, ob ein Punct sich beweget oder ruhet, müßte man seine geometrische Lage gegen sicher ruhende Puncte oder gleichsam unveränderlich feste Grenzen im Raume bestimmen. Ein ganzer Körper ruhet, wenn jeder Punct in ihm ruhet. Wir richten aber zuerst unsere Aufmerksamkeit nur auf die Ruhe oder Bewegung einzelner Puncte.

§. 3. Erklärung. Die Ruhe ist absolut, wenn die Lage des Punctes gegen alle Puncte des Raumes unveränderlich bleibt; sie ist nur relativ, wenn die Lage in Beziehung auf gewisse Puncte dieselbe bleibt, aber diese selbst sich bewegen. So läßt sich auch von der Bewegung nur behaupten, daß sie relativ sei, wenn die Vergleichung der Lage in Beziehung auf Puncte angestellt wird, die selbst nicht sicher ruhen. Es ist daher schwer zu bestimmen, ob die Ruhe und Bewegung eine absolute sei, oder nur eine relative.

§. 4. Erklärung. Indem ein Punct seine Lage ändert, rückt er auf irgend einer Linie fort oder beschreibt eine Linie; diese heißt der durchlaufene Weg des Punctes.

§. 5. Bemerkung. Jede Bewegung geschieht in der Zeit; die richtige Beurtheilung der Bewegung erfordert

also, sowohl auf den durchlaufenen Weg als auf die verwandte Zeit Rücksicht zu nehmen.

§. 6. Erklärung. Die Bewegung ist gleichförmig, wenn der bewegte Punct in jedem Zeittheilchen gleiche Wege durchläuft; ungleichförmig im entgegengesetzten Falle.

§. 7. Erklärung. Die Bewegung ist beschleuniget, oder accelerirt, wenn in jedem folgenden gleichen Zeittheilchen ein größerer Weg durchlaufen wird, als in jedem vorhergehenden. Sie ist verzögert oder retardirt, wenn in jedem folgenden gleichen Zeittheilchen ein kürzerer Weg zurück gelegt wird, als in jedem vorhergehenden.

§. 8. Erklärung. Die Bewegung heißt stetig beschleuniget, oder stetig verzögert, wenn für alle, noch so kleine, gleiche Zeittheilchen diese Zunahme des durchlaufenen Weges im einen und seine Abnahme im andern Falle statt findet. Die Beschleunigung oder Verzögerung würde dagegen nicht nach dem Gesetze der Stetigkeit erfolgen, wenn die Bewegung eine bestimmte, wenn gleich kleine, Zeit durch gleichförmig bliebe, und dann plötzlich die Aenderung erfolgte, vermöge welcher im folgenden Zeittheilchen der durchlaufene Weg größer oder kleiner würde. Denn das Gesetz der Stetigkeit erfordert, daß alle Aenderungen durch unmerkliche Uebergänge geschehen.

§. 9. Erklärung. Die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Punctes wird bestimmt durch die Vergleichung des durchlaufenen Raumes mit der dazu verwandten Zeit.

§. 10. Um die Zeit richtig zu bestimmen, bedarf es einer Zeit-Eintheilung, oder des Abzählens gleicher Zeit-

theilchen, deren eines als Einheit angenommen wird. Die Geschwindigkeit ist also dem in einem solchen Zeittheile durchlaufenen Raume proportional. Wir pflegen deshalb den Raum, welchen der Punct in einem Zeittheilchen durchläuft, als Maaß der Geschwindigkeit anzusehen.

Anmerkung. Unsre Zeit-Eintheilungen beruhen selbst auf Beobachtung gleichförmiger Bewegungen; dennoch ist es wohl erlaubt, die Zeit-Eintheilung als vorausgegeben anzusehen.

§. 11. Diese Bestimmung der Geschwindigkeit läßt sich nur bei gleichförmiger Bewegung mit Leichtigkeit ausführen. Bei ungleichförmiger Bewegung, wo die Geschwindigkeit sich nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert, darf man, selbst während des kürzesten Zeittheilchens die Bewegung nicht als gleichförmig ansehen, und die Geschwindigkeit nicht aus unmittelbarer Vergleichung des durchlaufenen Weges mit der verflossenen Zeit beurtheilen.

Dennoch können wir uns in der Vorstellung die in irgend einem Momente statt findende Geschwindigkeit denken, als bestimmt durch den Raum, welchen der bewegte Punct während der Zeit-Einheit durchlaufen würde, wenn von diesem Momente an die Beschleunigung oder Verzögerung der Bewegung völlig aufhörte.

§. 12. Grundsatz. Jeder körperliche Punct beharret in dem Zustande von Bewegung oder Ruhe, in welchem er sich befindet, so lange, als nicht irgend eine Ursache eine Aenderung hierin hervorbringt.

§. 13. Ein ruhender Punct wird also nicht anfangen, sich zu bewegen, wenn nicht eine, dieses bewirkende Ursache vorhanden ist. Eben so wird ein mit bestimmter Geschwindigkeit nach bestimmter Richtung fortgehender Punct mit unveränderter Geschwindigkeit und nach der-

selben Richtung fortgehen, wenn nicht eine neue Einwirkung die Geschwindigkeit ändert, oder auch ihn von jener geraden Linie abzuweichen nöthiget.

§. 14. Erklärung. Wir nennen Kraft jede Einwirkung, welche in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung eines Körpers oder Punctes Aenderungen hervorzubringen vermag.

§. 15. Erklärung. Die Richtung einer auf einen Punct wirkenden Kraft ist diejenige grade Linie, nach welcher dieser Punct anfangen würde, sich fort zu bewegen, wenn diese Kraft allein seine Bewegung bestimmte.

Wie diese Richtung erkannt wird, ergiebt sich nachher.

§. 16. Bemerkung. Es können zu gleicher Zeit auf denselben Punct verschiedene Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken, und diese können sich dann gegenseitig unterstützen oder auch einander hindern und zerstören.

§. 17. Erklärung. Wenn auf denselben Punct oder auch auf verschiedene Puncte eines Körpers Kräfte nach verschiedenen Richtungen wirken: so kann es sich ereignen, daß die eine genau die Wirkung der übrigen aufhebt, so daß nun kein Antrieb zur Bewegung entsteht. In diesem Falle halten die Kräfte einander im Gleichgewichte.

§. 18. Erklärung. Die Statik untersucht die Fälle, wo das Gleichgewicht besteht. Die Mechanik handelt von den Fällen, wo wirklich Bewegung erfolgt.

Die Gesetze des Gleichgewichts fester Körper.

Erster Abschnitt.

Von der Abmessung der im Gleichgewichte erhaltenen Kräfte.

§. 1. Erklärung. Feste Körper heißen hier die, deren Gestalt, ungeachtet der auf sie wirkenden Kräfte, keine Aenderung leidet.

Anmerkung. Sobald wir uns den Körper nur als einen Punct denken, wie hier zuerst geschieht, so kann von Veränderung der Gestalt nicht die Rede sein.

§. 2. Erklärung. Die Statik fester Körper untersucht alle Fälle, wo Kräfte, welche auf feste Körper wirken, einander im Gleichgewichte erhalten.

§. 3. Bemerkung. Wenn auf einen festen Körper mehrere Kräfte wirken, so können sie entweder alle unmittelbar auf denselben Punct wirken, oder sie sind an verschiedenen Puncten angebracht. Ferner kann entweder der feste Körper ganz frei der Einwirkung der Kräfte folgen, oder er stützt sich gegen einen unverrückbaren Widerstand, oder endlich es wird ein einziger Punct oder eine einzige grade Linie des Körpers unverrückbar, so daß er sich um diese drehen kann, fest gehalten. Im ersten Falle streben die Kräfte eine fortschiebende Bewegung des ganzen Körpers hervor zu bringen; diese wird im zweiten Falle durch den festen Widerstand gehindert, und im dritten Falle kann nur eine Drehung um den festgehaltenen Punct oder die festgehaltene Linie erfolgen.

§. 4. Grundsatz. Wenn auf einen Punct zwei gleiche Kräfte nach Richtungen wirken, welche einander grade entgegengesetzt sind: so bleibt dieser Punct in Ruhe; die Kräfte erhalten einander im Gleichgewichte.

§. 5. Zwei ungleiche Kräfte nach grade entgegen gesetzten Richtungen auf denselben Punct wirkend, erhalten einander nicht im Gleichgewichte; sondern der Punct wird nach der Richtung der stärkeren Kraft so zur Bewegung angetrieben, als ob eine Kraft, gleich dem Unterschiede jener Kräfte nach der Richtung der stärkeren angebracht wäre.

Wirken dagegen zwei oder mehrere Kräfte auf denselben Punct nach einerlei Richtung, so ist es so gut, als ob statt jener Kräfte nur eine, der Summe jener gleich, vorhanden wäre.

§. 6. Obgleich in diesen letzteren Fällen das Gleichgewicht durch die Kräfte selbst nicht erhalten wird, so würde doch der Punkt A, auf welchen die Kräfte wirken, in Ruhe bleiben, wenn er sich gegen einen unverrückbaren Körper CD stützte (Fig. 1.), der ihn hindert, nach der Richtung AB der Kräfte fortzugehen; eben so wird seine Bewegung gehindert, wenn er fest an einem unverrückbaren Körper EF befestiget ist, welcher (Fig. 2.) an der der Richtung AG der Kräfte entgegen gesetzten Seite sich befindet.

§. 7. Erklärung. Wenn ein unverrückbarer Körper sich an derjenigen Seite eines zur Bewegung angetriebenen Punctes befindet, wohin die Kräfte den Punct zu treiben streben; so leidet jener Körper einen Druck. Hingegen nennen wir es einen Zug, eine ziehende Kraft, wenn die Kräfte den Punct von einem unverrückbaren Widerstande weg zu reißen oder zu entfernen streben, der sich an der andern Seite, der Richtung der Kräfte gegenüber, befindet.

§. 8. Im letztern Falle könnte der Punct oder Körper A auch vermittelst eines Fadens HA (Fig. 3.) an dem festen Widerstande befestiget sein. Alsdann muß der

Faden stark genug sein, um nicht gedehnt zu werden oder zu reißen, und jeder Punct des Fadens leidet nun den Zug der Kräfte.

§. 9. Lehrsatz. Der Druck, welchen der Widerstand in A (Fig. 1.) leidet, oder der Zug, welchen der Punct H, so wie jeder Punct des Fadens HA leidet (Fig. 3.), ist der Summe der nach der Richtung AB (Fig. 1.) oder AG (Fig. 3.) wirkenden Kräfte gleich.

Da alles im Gleichgewichte bleibt, so erhellt dies aus §. 4.

§. 10. Grundsatz. Wenn mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, und es sind zum Beispiel zwei derselben für sich im Gleichgewichte; so ist die gesammte Wirkung aller Kräfte gleich groß, jene zwei, sich im Gleichgewicht haltenden Kräfte, mögen wirksam bleiben oder ganz fehlen.

§. 11. Wenn also Kräfte irgendwo wirken, so ist es allemal erlaubt, außer diesen Kräften sich noch andre, die unter sich im Gleichgewichte sind, hinzu zu denken, oder in der That solche anzubringen. Die vereinigte Wirkung der Kräfte bleibt dennoch ungeändert.

§. 12. Erfahrung. Alle Körper auf der Erde zeigen ein Bestreben, gegen die Erde herab zu fallen, und fallen wirklich, wenn nicht ein fester Körper als Hinderniß im Wege steht, oder andre Kräfte jenem Bestreben entgegen wirken. Wo diese Hinderung statt findet, da bemerken wir einen Druck oder Zug, den der Körper gegen die Erde zu ausübt.

§. 13. Erklärung. Wir betrachten dieses Bestreben zu fallen, und den Druck, welchen die Körper auf einen dieses Bestreben hindernden Widerstand ausüben, als Wirkung einer Kraft, welcher alle Körper auf der Erde unterworfen sind. Diese Kraft heißt die Schwerkraft.

Anmerk. Was diese Kraft ihrem Wesen nach oder ihrem Ursprunge nach sei, untersuchen wir nicht, sondern betrachten hier bloß, wie bei allen Kräften, die Wirkungen der Schwere.

§. 14. Erklärung. Der Druck, welchen ein Körper vermöge seiner Schwere auf eine, sein Fallen gänzlich hindernde Ebne ausübt, heißt des Körpers Gewicht.

§. 15. Erfahrung. Völlig gleiche Körper üben jeder einen gleichen Druck oder Zug (§. 7.) auf die sie unterstützende Unterlage, oder auf den Faden, der sie trägt, aus.

§. 16. Zwei solche gleiche Körper vereinigt geben folglich den doppelten Druck, und hieraus erhellt, wie eine Abmessung des Druckes oder Zuges, welchen verschiedene Körper ausüben, wohl denkbar sei.

§. 17. Erfahrung. Die Richtungen der Schwere sind an Orten, die einander nahe liegen, parallel. Diese Richtungen sind allemal senkrecht auf die ebne Oberfläche stillstehender Gewässer, und wir müssen sie daher betrachten, als überall senkrecht auf die eigentliche Oberfläche der Erde. Da diese Oberfläche sehr nahe kugelförmig ist, so sind die Richtungen der Schwere eigentlich nicht parallel, sondern schneiden sich im Mittelpuncte der Erde; diese Neigung gegen einander ist aber wegen der beträchtlichen Größe der Erde in nahe liegenden Puncten nicht bemerkbar.

§. 18. Frei fallende Körper folgen dieser Richtung der Schwere. Körper, welche an Fäden frei herab hängen, ziehen die Fäden nach eben dieser Richtung herab.

§. 19. Erklärung. Diese Richtung heißt die verticale oder lothrechte; sie steht senkrecht auf der Horizontal-Ebne jedes Ortes, welche folglich parallel ist mit der die Kugelfläche an dem Puncte, wo die Verticallinie ihre Oberfläche trifft, berührenden Ebne (Geom. §. 503.)

§. 20. Lehrsatz. Wenn ein schwerer Körper durch eine der Richtung der Schwere grade entgegen wirkende Kraft im Gleichgewichte erhalten wird: so ist diese Kraft dem Gewichte des Körpers gleich. Beweis. §. 4.

Diese Kraft wird also eben den Druck oder Zug auszuüben im Stande sein, wie das Gewicht des Körpers.

§. 21. Bemerkung. Da es also möglich scheint, andre Kräfte mit Gewichten ins Gleichgewicht zu bringen und es ferner möglich ist, diese Gewichte selbst gegen einander abzumessen: so werden wir uns der Gewichte mit Vortheil bedienen können, um den Druck abzumessen, welchen Kräfte ausüben, die im Gleichgewichte erhalten werden.

§. 22. Wir betrachten daher die Gewichte, deren Einheit ein Pfund, Loth u. s. w. von gewissen bestimmten Massen hergenommen ist, als Maaß der im Gleichgewicht erhaltenen Kräfte selbst. Denn diese dürfen wir als ihren Wirkungen, das ist, als dem ausgeübten Drucke proportional ansehen.

§. 23. Erfahrung. Der Druck oder Zug, den eine im Gleichgewicht erhaltene Kraft ausübt, ist einerlei, sie mag, in welchem Puncte ihrer Richtungslinie man will, an einem festen Körper angebracht sein.

Wenn das Gewicht A (Fig. 1.) unmittelbar bei A auf der horizontalen Ebne ruhet: so leidet diese einen gewissen Druck. Ruhete eben das Gewicht A (Fig. 4.) auf einem vertical stehenden Stabe: so litte der Punct C (wenn wir auf das Gewicht des Stabes nicht sehen) eben den Druck, wofern, wie vorausgesetzt worden, die Richtung des Stabes mit der Richtungslinie der Schwere übereinstimmt.

Eben so wenn (Fig. 5.) AB ein fester Körper ist, auf welchen nach entgegen gesetzten Richtungen CD, EG, die in grader Linie liegen, gleiche Kräfte wirken: so halten diese Kräfte einander im Gleichgewichte, sie mögen an der Oberfläche in C und E, oder irgendwo in der Mitte in dem gemeinschaftlichen Angriffspuncte F angebracht sein.

§. 24. Erfahrung. Nicht alle Körper haben bei gleicher körperlicher Größe oder Volumen ein gleiches

Gewicht, sondern einige sind an sich schwerer, oder specifisch schwerer, als andre.

§. 25. Erklärung. Unter der Masse eines Körpers denken wir uns die Summe der körperlichen Theilchen, aus welchen er besteht. Wir pflegen diese Masse nach dem Gewichte zu schätzen, und nennen daher diejenigen Körper vorzüglich dicht, welche bei geringer Größe viel Gewicht haben, oder eine große specifische oder eigenthümliche Schwere besitzen.

§. 26. Ein Körper würde doppelt so dicht heißen, als ein anderer, wenn jener bei derselben Größe doppelt so viel körperliche Theilchen enthielte, als dieser; wir sagen daher, die Dichtigkeit zweier Körper sei in gradem Verhältnisse ihrer Gewichte, und im umgekehrten Verhältnisse ihrer geometrischen Größe.

§. 27. Anmerk. Diese Begriffe sind etwas dunkel, da wir uns nicht ganz über das verständigen können, was wir körperliche Theilchen (Atome gleichsam, die selbst keine leere Zwischenräume enthalten,) nennen sollen. Indeß machen wir von diesen Begriffen keinen Gebrauch, der der Gründlichkeit der Wissenschaft im Wege stünde.

Zweiter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, die nach verschiedenen Richtungen auf einen bestimmten Punct wirken.

§. 28. Bemerkung. Wenn auf einen Punct A (Fig. 6.) zwei Kräfte wirken, deren Richtungen AB, AC einen Winkel mit einander machen; so kann das Gleichgewicht nicht bestehen, wofern nicht noch andere Kräfte auf diesen Punct wirken. Der bewegliche Punct A nämlich wird zwar weder der einen noch der andern Kraft ganz folgen können; aber indem die eine ihn von der genauen Richtung abzieht, nach welcher die andre ihn hintreibt,

so wird er eine gewisse mittlere Richtung, die durch AD nur angedeutet werden mag, befolgen; und es verhält sich alles ganz so, als ob statt jener zwei, nach AB und AC wirkenden Kräfte, nur eine einzige nach AD wirkte. Die Richtung und Größe dieser Kraft müssen wir zu bestimmen suchen.

Das Gleichgewicht könnte also bei fortdauernder Wirksamkeit der Kraft P nach AB und der Kraft Q nach AC nur dann statt finden, wenn noch eine dritte Kraft R nach derjenigen Richtung AE angebracht wäre, welche der AD grade entgegen gesetzt ist, und R so groß wäre, als es die nach AD gerichtete gesammte Wirkung der Kräfte, P, Q fordert. Statt dieser Kraft R würde auch ein widerstehender fester Körper hinreichen, der, den Punct A stützend, die Bewegung nach AD hinderte. Dieser würde einen Druck = R leiden (§. 9.).

§. 29. Erklärung. Diese Richtung AD (Fig. 6.) heißt die mittlere Richtung der nach AB, AC wirkenden Kräfte P, Q; und die Kraft oder der Druck, welchen sie nach dieser Richtung AD bewirken, heißt die aus ihnen entstehende Mittelkraft, die nämlich aus den Seitenkräften P nach AB, Q nach AC entspringt.

Die mittlere Kraft heißt auch die aus den Seitenkräften zusammengesetzte; und dagegen betrachtet man die mittlere Kraft, wenn sie als die ursprüngliche angesehen wird, als nach bestimmten Richtungen zerlegt in die Seitenkräfte.

§. 30. Erklärung. Kräfte, welche eben das bewirken, was eine oder mehrere andre ausrichten, heißen dieser gleichgeltend, gleichwirkend, äquivalent, äquipollent.

§. 31. Grundsatz. Wenn zwei gleiche Kräfte nach Richtungen wirken, die einen Winkel mit einander machen: so trifft die Richtung der Mittelkraft mit der Linie zusammen, welche diesen Winkel halbirt.

§. 32. Bemerkung. Obgleich wir noch nicht im

Stande sind, die Größe und Richtung der Mittelkraft aus der Richtung und Stärke der Seitenkräfte zu finden: so erhellt doch, daß hier sechs verschiedene Stücke, drei Kräfte nämlich und drei Winkel vorkommen, die gegenseitig von einander abhängen. Wir werden daher zuerst untersuchen, welche dieser Stücke gegeben sein müssen, um die übrigen dadurch als sicher bestimmbar ansehen zu dürfen.

Jene sechs Stücke sind: die beiden Seitenkräfte P, Q, die Mittelkraft R, der Winkel, den die Richtung der letztern mit der Richtung der erstern einschließt = a, der Winkel, den R mit Q macht = b; der Winkel zwischen P und Q, = a + b.

§. 33. Lehrsatz. Wenn die Seitenkräfte P nach AB, Q nach AC wirkend, gegeben sind, nebst dem Winkel, den ihre Richtungslinien einschließen BAC = a + b: so ist hiedurch Richtung und Größe der Mittelkraft völlig bestimmt (Fig. 6.).

Beweis. Wenn BA nach F, CA nach G verlängert wird, und es wirken Kräfte, = P nach AB, = Q nach AC, = P nach AF, = Q nach AG: so ließe sich vielleicht denken, AD sei die Richtung der aus den beiden ersten entspringenden Mittelkraft, AH aber die Richtung der Mittelkraft, welche die Wirkung der beiden letzteren darstellt. Wäre hier nicht die Richtung der Mittelkraft aus den gegebenen, für die beiden ersten Kräfte und für die beiden letzten Kräfte ganz gleichen Umständen fest bestimmt: so könnte der Winkel FAH ungleich BAD sein. Nun aber erhalten P nach AB und P nach AF, und eben so Q nach AC und Q nach AG einander im Gleichgewichte, und diese vier Kräfte bringen, vereint wirkend, gar keine Wirkung hervor; die Mittelkraft nach AD soll aber eben das bewirken, wie die nach AB, AC gerichteten Kräfte, die Mittelkraft nach AH soll eben das bewirken, wie die nach AF, AG gerichteten Kräfte; beide Mittelkräfte zugleich wirkend müssen sich also eben so wie jene vier Kräfte einander ganz aufheben. Aber

dieses ist (§. 20.) nur möglich, wenn AD, AH einander grade entgegen gesetzt sind, und die Mittelkräfte einander gleich.

§. 34. Lehrsatz. Wenn die Mittelkraft = R, nebst der einen Seitenkraft = P und dem Winkel = a bestimmt ist, unter welchem sie gegen einander geneigt wirken sollen: so ist auch die Größe = Q und Richtung der andern Seitenkraft bestimmt, welche mit P vereint die Mittelkraft = R nach der bestimmten Richtung hervorbringt.

Beweis. Wäre die Seitenkraft = Q ihrer Größe oder Richtung nach unbestimmt; so könnte (Fig. 7.) R, nach AD wirkend, die Mittelkraft sein aus den Kräften P nach AB und Q nach AC; und zugleich könnte, wenn man DA nach AE, BA nach AF verlängert, GAE aber ungleich DAC nimmt, R nach AE die Mittelkraft sein aus P nach AF und Q + x nach AG.

Hier heben R nach AD und R nach AE einander auf; die ihnen äquipollenten Kräfte P nach AB, Q nach AC, P nach AF, Q + x nach AG müssen sich also gleichfalls einander aufheben; und da P nach AB die P nach AF völlig im Gleichgewichte erhält, so muß auch Q nach AC der Q + x nach AG gleich und entgegen gesetzt sein. Es ist also AC der AG grade entgegen gesetzt, DAC = EAG und Q + x = Q.

§. 35. Lehrsatz. Wenn eine Kraft = R, nach AD wirkend, nach bestimmten Richtungen AB, AC, welche mit der Richtung jener gegebene Winkel BAD = a und CAD = b machen, in Seitenkräfte zerlegt werden soll: so ist die Größe beider Seitenkräfte völlig bestimmt (Fig. 8.).

Beweis. Man verlängere AD nach E, AB nach F, AC nach G, und nehme an, es wirke nach AE eben die Kraft = R, welche nach AD wirkt. Ließe sich diese Kraft = R bei gleichbleibenden Richtungswinkeln der Seitenkräfte, das eine Mal in Kräfte, P nach AB, Q nach AC, und das andere Mal in die Kräfte P + x

nach AF, Q ± y nach AG zerlegen: so müßten, da die Kräfte R nach AD und R nach AE einander aufheben, auch die vier Kräfte P nach AB, Q nach AC, P + x nach AF, Q ± y nach AG sich gegenseitig zerstören. Aber P und P + x wirken einander grade entgegen, und gelten daher einer Kraft = x nach AF gleich; Q und Q ± y wirken eben so einander grade entgegen und gelten einer Kraft = ± y nach AG, das ist, entweder einer Kraft = + y nach AG oder einer Kraft = + y nach AC gleich. Diese beiden Kräfte x und y sind unter einem Winkel gegen einander geneigt, und können einander nicht aufheben (§. 28.), sie müssen daher selbst = 0 sein, oder die Zerlegung ist nur auf eine einzige bestimmte Weise möglich.

§. 36. Lehrsatz. Es ist die Größe der einen Seitenkraft = P bestimmt, nebst dem Winkel BAD = a, unter welchem die Mittelkraft (Fig. 8.) und dem Winkel BAC = a + b, unter welchem die andre Seitenkraft wirken soll; dann ist die Größe der Mittelkraft = R und der andern Seitenkraft = Q völlig bestimmt.

Beweis. Nach AB wirke die Kraft = P und man bringe eine ihr gleiche nach entgegesetzter Richtung AF an. Zugleich nehme man an, daß bei gleich bleibenden Richtungswinkeln BAD = FAE und BAC = FAG, das eine Mal aus P nach AB und Q nach AC die Mittelkraft = R nach AD entstehen könne, das andre Mal aus P nach AE und Q + x nach AG die Mittelkraft = R + y nach AE hervorgehen. Hier sollen die Mittelkräfte R und R + y jede für sich dasselbe, was die zugehörigen Seitenkräfte, bewirken; die Mittelkräfte vereinigt geben eine Kraft = y nach AE, und eben diese müßte aus den vier Seitenkräften entspringen. Aber da P nach AB und P nach AF einander aufheben, und Q nach AC der Q + x nach AG grade entgegen wirkt, so ist eine Kraft = x nach AG der gesammte Erfolg dieser vier Kräfte; diese müßte mit y nach AE ganz einerlei sein, welches, da beide in verschiedenen Richtungen

wirken, ganz unmöglich ist, wofern nicht $x = z = 0$ ist.

§. 37. Lehrsatz. Wenn die unter gegebnen Neigungswinkel $BAC = c$ wirkenden Seitenkräfte P und Q die Mittelkraft $= R$ hervorbringen (Fig. 9.): so ist es nicht möglich, daß aus eben den Seitenkräften P und Q dieselbe Mittelkraft $= R$ entspringe, wenn die Richtungen jener unter einem andern Winkel gegen einander geneigt sind.

Beweis. Es sei (Fig. 9.) die Kraft $= P$ nach AB, die Kraft $= Q$ nach AC an dem Puncte A angebracht und aus ihnen entspringe die Mittelkraft $= R$ nach AD. Verlängere ich AB nach F, und lasse eine Kraft $= P$ nach AF wirken, eine Kraft $= Q$ aber unter dem Winkel $FAG \gtrless BAC$ gegen sie geneigt, so kann nicht die Mittelkraft aus diesen $= R$ sein.

Erster Fall (Fig. 9.). Es sei $FAG < BAC$. Da die Kräfte P nach AB und P nach AF sich zerstören, so ist es so gut, als ob nur Q nach AC und Q nach AG wirkten. Diese bringen (§. 31.) eine mittlere Kraft hervor, deren Richtung den Winkel CAG halbirt, und folglich würde die Wirkung aller vier Kräfte, P nach AB, Q nach AC, P nach AF, Q nach AG durch eine nach AI wirkende Kraft dargestellt, wenn $IAG = IAC$. Aber eben jener vier Kräfte Wirkung soll durch R nach AD und R nach AE dargestellt werden, und diese geben eine Mittelkraft nach AK, wenn $KAE = KAD$. Sollte nun in beiden angenommenen Fällen die Mittelkraft $= R$ sein: so müßten AK und AI zusammenfallen. Aber das ist unmöglich; denn schon AL, welche EAC halbirt, wird um $\frac{1}{2}$ GAE gegen AK geneigt sein, AI wird also um $\frac{1}{2}$ CAD + $\frac{1}{2}$ EAG von ihr abweichen.

Zweiter Fall. Wäre $FAG > BAC$, so würde (Fig. 10.) der ganze vorige Beweis gelten, nur hätten jetzt die Richtungen der Mittelkräfte eine andre Lage, aber immer würde $IAK = \frac{1}{2} EAG + \frac{1}{2} CAD$ sein.

§. 38. Lehrsatz. Wenn die Größe der Seitenkräfte P und Q bestimmt ist, und zugleich die Größe der Mittelkraft R, welche ihnen gleichgeltend sein soll: so sind auch die Winkel nothwendig bestimmt, unter welchen sie gegen einander geneigt wirken müssen.

Beweis. Wofern in einem Falle die Seitenkräfte P, Q wirklich eine Mittelkraft = R hervorbringen, wenn sie unter dem Winkel BAC (Fig. 9.) gegen einander geneigt wirken: so ist es nicht möglich, daß eben jene Wirkung bei einem andern Neigungswinkel statt finde, (§. 37.); also sind auch die Winkel, unter welchen die Richtung der R gegen P und Q geneigt sein muß, fest bestimmt (§. 33.).

§. 39. Bemerkung. In den betrachteten fünf Fällen reichen drei gegebne Stücke hin, um die übrigen drei, als nothwendig daran geknüpft, zu bestimmen. Um zu sehen, ob in allen Fällen drei gegebene Stücke hinreichen, wollen wir alle Fälle, wo drei jener Stücke gegeben sind, hier zusammen stellen und die noch nicht betrachteten einer Prüfung unterwerfen.

Unter den drei Kräften P, Q, R und Winkeln a, b, a + b, können sein:

	gegeben	gesucht
1.	P, Q, R . . .	a, b, a + b;
2.	P, a, R . . .	Q, b, a + b;
3.	P, b, R . . .	Q, a, a + b;
4.	P, a + b, R . .	Q, a, b;
5.	a, b, R . . .	P, Q, a + b;
6.	P, Q, a . . .	R, b, a + b;
7.	P, Q, (a + b) . .	R, b, a;
8.	P, a, b . . .	R, Q, a + b.

Von diesen Fällen ist der 1ste in §. 38;
der 2te in §. 34; der 5te in §. 35;
der 7te in §. 33; der 8te in §. 36, betrachtet;
der 3te, 4te, 6te Fall müssen noch näher untersucht werden.

§. 40. Lehrsatz. Wenn die Größe der Mittelkraft $= R$, und der einen Seitenkraft $= P$ bestimmt ist, und es ist zugleich der Winkel $= b$ bekannt, unter welchem die andre Seitenkraft gegen die Mittelkraft geneigt wirken soll: so ist diese zweite Seitenkraft Q und die Richtung der ersteren dadurch noch nicht ganz fest bestimmt. (Fig. 11.)

Beweis. Man lasse zwei gleiche Kräfte $= R$ nach entgegen gesetzten Richtungen AD, AE wirken, und nehme die Winkel $EAG = DAC$, um die Richtung der unbestimmten Seitenkraft anzugeben. Ist es nun möglich, R einmal in die Seitenkräfte P unter dem Winkel $= a$, $= BAD$ wirkend, und Q unter dem Winkel $CAD = b$ wirkend, zu zerlegen, das andre Mal in Seitenkräfte P unter dem Winkel $FAE = a \pm x$, und $Q + z$ unter dem Winkel $GAE = b$: so müssen die so angebrachten vier Kräfte, P, P, Q $+ z$ einander im Gleichgewichte erhalten, weil dies bei den ihnen gleichgeltenden Mittelkräften der Fall ist. Die Kräfte Q und $Q + z$ wirken einander grade entgegen, und gelten einer Kraft $= z$ nach AG gleich; die Kräfte P nach AB und P nach AF geben eine nach AI wirkende Mittelkraft, wenn $IAB = IAF$ ist, und diese kann mit der nach AG wirkenden z im Gleichgewichte sein, wenn AI auf AC fällt.

Damit dies geschehe, muß $BAC = CAF$ sein, also $a + b = 180^\circ - (a \pm x) - b$; oder $a + b \pm x = 180^\circ - a - b$. Es ist also möglich, daß P und Q unter den Neigungswinkeln a, b wirkend die Mittelkraft $= R$ hervorbringen, und daß auch eben die Mittelkraft aus den Seitenkräften P und $Q + z$ entspringe, wenn die letztere unter dem Winkel $= b$, die erstere aber unter dem Winkel $= 180^\circ - a - 2b$ gegen die Mittelkraft geneigt wirkt. Aber nur diese zwei Fälle sind für die Richtung der Kraft P möglich.

§. 41. Dieser doppelte Fall kann nur vorkommen, wenn $a + 2b < 180^\circ$.

§. 42. Lehrsatz. Wenn die Mittelkraft = R nebst einer Seitenkraft = P bestimmt ist, und es ist der Winkel = a + b gegeben, unter welchem die andre Seitenkraft gegen P geneigt wirken soll: so ist die letztere Seitenkraft = Q, und die Winkel a und b, unter welchen die Richtung der Mittelkraft gegen jede Seitenkraft geneigt ist, nicht völlig bestimmt.

Beweis. Man lasse (Fig. 12.) zwei gleiche Kräfte = P nach Richtungen, einander grade entgegen gesetzt AB, AF wirken. Wenn nun nach den, gleichfalls einander grade entgegen gesetzten Richtungen AC, AG, Kräfte = Q nach AC, = Q + x nach AG angebracht sind: so nehmen wir an, aus P und Q entspringe nach AD die Mittelkraft = R, und es sei BAD = a; aus P und Q + x aber entspringe eine gleiche Mittelkraft = R nach einer Richtung, die nicht der AD grade entgegengesetzt, sondern wo FAE = a + z ist.

Die vier Kräfte P, P, Q, Q + x sind einer Kraft = x nach AG gleichwirkend; sollen also die Kräfte R, R eben die Wirkung hervorbringen: so muß DAE < 2 rechte Winkel und EAG = DAG sein, damit die Richtung der aus R, R entspringenden Mittelkraft auf AG falle. Folglich wird GAE = b — z = GAD = 180° — b.

Auch hier sind also zwei Fälle möglich, indem dieselbe Mittelkraft = R hervorgebracht werden kann, sowohl aus den Seitenkräften P unter dem Winkel a, Q unter dem Winkel b, als aus den Seitenkräften P unter dem Winkel a + 2 b — 180° und Q unter dem Winkel 180° — b wirkend, deren Richtungslinien in beiden Fällen den Winkel = a + b einschließen.

§. 43. Die Möglichkeit eines doppelten Falles tritt nur ein, wenn a + 2 b > 180°.

§. 44. Lehrsatz. Wenn die Seitenkräfte P und Q bestimmt sind, nebst dem Winkel = a, welchen die erstere mit der Mittelkraft einschließen soll: so sind für die Größe der Mittelkraft und für ihren Neigungswinkel

gegen die Richtung der zweiten Seitenkraft Q höchstens zwei Werthe möglich (Fig. 13.).

Beweis. Ist es möglich, aus den Seitenkräften P, Q, das eine Mal die Mittelkraft = R, das andre Mal die Mittelkraft = R + z hervorzubringen, indem man zuerst P unter den Winkel = a, Q unter dem Winkel = b gegen die Mittelkraft geneigt wirken läßt, im zweiten Falle aber, jenen Winkel = a, diesen = b ± x nimmt: so bringe man die Kräfte P, P nach entgegen gesetzten Richtungen AB, AF an, nehme BAD = FAE = a, DAC = b, EAG = b ± x, und stelle sich vor, daß nach AC, AG gleiche Kräfte Q wirken, und daß R nach AD die Mittelkraft aus P nach AB und Q nach AC, dagegen R + z nach AE wirkend die Mittelkraft aus P nach AF und Q nach AG sei. Dann sollen die vier Kräfte P, P, Q, Q eben das wie R und R + z ausrichten. Die letztern, einander grade entgegen wirkend, bringen die Wirkung = z nach AE hervor, und da P, P sich aufheben, Q, Q aber eine Mittelkraft hervorbringen, deren Richtung den Winkel GAC halbirt: so muß diese Richtung mit AE zusammen fallen, wenn jene vier Kräfte den beiden Mittelkräften gleichwirkend sein sollen.

Soll also Q nicht unter dem Winkel = b gegen die Mittelkraft geneigt sein, so muß ihr Richtungswinkel GAE = EAC = 180° — b, das ist b ± x = 180 — b werden, und ein dritter Werth ist unter den vorausgesetzten Bestimmungen nicht möglich.

§. 45. Dieser doppelte Fall findet nur statt, wenn a < b; denn wenn GAE = 180 — b ist: so wird GAF = 180° — b + a, welches größer als 180° wäre, wenn a > b.

§. 46. Bemerkung. Alle hier untersuchten Fälle, wo drei Größen gegeben sind, lassen sich unter folgende Regel zusammen fassen. Alle sechs vorkommenden Stücke sind völlig bestimmt, wenn entweder alle drei Kräfte gegeben sind, oder zwei Kräfte mit dem eingeschlossenen

Winkel, oder eine Kraft mit beiden Richtungswinkeln; dagegen ist eine doppelte Bestimmung der übrigen Stücke möglich, wenn zwei Kräfte nebst einem, nicht von ihnen eingeschlossenen Richtungswinkel gegeben sind.

§. 47. Diese Bestimmungen treffen ganz mit denen überein, die in der Geometrie für das Dreieck vorkommen, wo auch 1. zwei gegebene Winkel den dritten bestimmen; 2. alle drei Seiten (so wie hier alle drei Kräfte) die Winkel strenge bestimmen; 3. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel (so wie hier zwei Kräfte mit dem eingeschlossenen Winkel) alles übrige angeben; 4. eine Seite mit zwei Winkeln (hier eine Kraft mit zwei Richtungswinkeln der übrigen Kräfte) die übrigen Stücke bestimmen; 5. zwei Seiten mit einem nicht eingeschlossenen Winkel (so wie hier zwei Kräfte mit dem einen, nicht eingeschlossenen Winkel) eine doppelte Bestimmung der übrigen Stücke zulassen. Diese Vergleichung wird sich auch in der Folge als wichtig zeigen.

§. 48. Lehrsatz. Wenn das Verhältniß der beiden Seitenkräfte zu einander bestimmt ist, und der Winkel, welchen ihre Richtungen einschließen: so ist die Richtung der Mittelkraft, und das Verhältniß derselben zu jeder der Seitenkräfte völlig bestimmt (Fig. 6.).

Beweis. Den Seitenkräften, P und Q, deren Richtungen AB, AC einen bestimmten Winkel einschließen, entspricht (§. 33.) eine, nach bestimmter Richtung AD wirkende Mittelkraft R. Denken wir uns also eine zweite Kraft $= P$ gleichfalls nach AB, und eine zweite Kraft $= Q$, gleichfalls nach AC wirkend: so bringen auch sie eine nach AD wirkende Mittelkraft $= R$ hervor, und so entspringt aus der Kraft $= 2P$ nach AB, und der Kraft $= 2Q$ nach AC die Mittelkraft $= 2R$ nach AD, und Kräfte $= n.P$ und $= n.Q$ nach jenen Richtungen wirkend, bringen die Mittelkraft $= n.R$ nach AD hervor. Dieses ist richtig für jeden Werth von n.

§. 49. Lehrsatz. Aus den gegebenen Richtungs-

winkeln zweier Seitenkräfte gegen die aus ihnen entstehende Mittelkraft ist das Verhältniß der drei Kräfte zu einander völlig bestimmt.

Beweis. Geben bei jenen bestimmten Richtungswinkeln einmal die Seitenkräfte P, Q die Mittelkraft R: so geben auch die Seitenkräfte n P, n Q, die Mittelkraft n . R; und wenn umgekehrt die Mittelkraft = n R sein soll, so können die Seitenkräfte keine andern Werthe als n P, n Q haben (§. 35.).

§. 50. Bemerkung. Es kömmt also hier zunächst nur auf das Verhältniß der Kräfte zu einander an, und es ist daher erlaubt, sie als Zahlen zu betrachten, oder durch Linien darzustellen, welche das gehörige Verhältniß zu einander haben.

§. 51. Wenn wir in der Folge Kräfte in einander zu multipliciren verlangen, so heißt dieses nur, die Zahlen in einander multipliciren, durch welche diese Kräfte in Vergleichung gegen eine bestimmte Einheit ausgedrückt sind (vergl. Geom. §. 199.).

§. 52. Lehrsatz. Wenn der Winkel, welchen die Richtungslinien zweier Seitenkräfte einschließen, ein rechter ist: so findet man das Quadrat der Mittelkraft gleich der Summe der Quadrate der beiden Seitenkräfte (Fig. 14.).

Beweis. Es wirke die Kraft = P nach AB, und die Kraft = Q nach einer auf AB senkrechten Richtung AC; die noch unbekannte Richtung der Mittelkraft R werde durch AD vorgestellt.

Man kann Q betrachten, als entstehend aus zwei Seitenkräften, deren eine = T nach AD, die andre = S senkrecht auf AD nach AF wirkt. Da die Richtungswinkel dieser Seitenkräfte gegen die Mittelkraft Q eben so sind, wie die Richtungswinkel der P und Q gegen R: so ist (§. 49.) $P : R = S : Q$;

und $Q : R = T : Q$;

$$\text{also } S = \frac{PQ}{R} \text{ und } T = \frac{Q^2}{R}.$$

Eben so läßt sich P betrachten, als entstehend aus zwei Seitenkräften V nach AD und U nach AE, senkrecht auf AD; und auch hier ist wegen der Gleichheit der Richtungswinkel BAE = CAD,

$$P : R = V : P \text{ und } Q : R = U : P,$$

$$\text{also } U = \frac{PQ}{R} \text{ und } V = \frac{P^2}{R}.$$

Die Kräfte P und Q sollen eben das bewirken, wie die Mittelkraft R; die Kräfte P und Q sollen aber auch den vier Kräften S, T, U, V, gleichgeltend sein. Da nun U = S und ihr grade entgegen gesetzt ist, so zerstören diese einander, und es muß R = V + T sein, weil sie nach einerlei Richtung wirken. Es ist also

$$R = \frac{P^2 + Q^2}{R} \text{ oder } R^2 = P^2 + Q^2.$$

§. 53. Für Seitenkräfte, die unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt sind, verhält sich also die Mittelkraft zu jeder der Seitenkräfte, wie die Hypotenuse zu den Catheten desjenigen rechtwinklichten Dreieckes, dessen Catheten den Seitenkräften proportionel sind.

§. 54. Bemerkung. Auch in andern Fällen läßt sich das Verhältniß der drei Kräfte durch die drei Seiten eines Dreieckes ausdrücken, dessen einer Winkel den von beiden Seitenkräften eingeschlossenen Richtungswinkel zu zwei rechten ergänzt. Folgende Beispiele zeigen dies.

Erstes Beispiel. Wenn die Richtung der Seitenkräfte P, Q unter einem halbrechten Winkel gegen einander geneigt ist: so wird die Mittelkraft dargestellt durch die dritte Seite eines Dreieckes, in welchem die beiden übrigen Seiten die Kräfte P, Q darstellen und einen Winkel von $135° = 2\,R - \frac{1}{2}\,R$ einschließen.

Es sei (Fig. 15.) BAC = 45°, und es wirkt nach AB die Kraft = P, nach AC die Kraft = Q; AD deute die Richtung der Mittelkraft an. Man nehme CAF = BAD, BAG = DAC, welches FAG = 90° giebt.

Statt Q könnten die Kräfte S nach AF, T nach AD wirken; statt P könnten die Kräfte U nach AG, V nach AD wirken: so wird (§. 49.)

$$S = U = \frac{PQ}{R}; \quad T = \frac{Q^2}{R}; \quad V = \frac{P^2}{R}.$$

Die Mittelkraft R soll eben das bewirken, wie P und Q, oder wie S, T, U, V. Da nun T und V nach der Richtung AD selbst wirken, die gleichen Kräfte S und U aber eine Mittelkraft = W nach der ihren Richtungswinkel halbirenden Richtung AD hervorbringen: so ist $R = T + V + W$, und $W^2 = S^2 + U^2$, weil S und U unter einem rechten Winkel gegen einander geneigt sind (§. 52.),

$$\text{also } W = \frac{PQ}{R}\sqrt{2} \text{ und } R = \frac{P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{2}}{R},$$

oder $R^2 = P^2 + Q^2 + PQ.\sqrt{2}$.

Eben dieses ist der Ausdruck für die dritte Seite R eines Dreiecks, in welchem die Seiten P, Q den Winkel $= 135°$ einschließen; denn da ist (Trigon. §. 65.) $R^2 = P^2 + Q^2 - 2.PQ.\text{Cos}.135° = P^2 + Q^2 + 2.PQ\,\text{Cos}\,45°$

$$= P^2 + Q^2 + P.Q.\sqrt{2}.$$

Zweites Beispiel. Die Richtungen der Kräfte P, Q sind unter einem Winkel von $22\frac{1}{2}$ Gr. gegen einander geneigt; dann wird die Mittelkraft R durch die dritte Seite eines Dreieckes dargestellt, dessen beide Seiten P, Q den Winkel $= 180° - 22\frac{1}{2}° = 157\frac{1}{2}°$ einschließen (Fig. 16.).

BAC sei $= \frac{1}{4}$ des rechten Winkels, P wirke nach AB, Q nach AC, AD stelle die Richtung der Mittelkraft vor. Nimmt man BAG = DAC und CAF = DAB: so ist GAF = 45°. Die Kraft P kann zerlegt werden in Kräfte S nach AG, T nach AD, und eben so kann Q zerlegt werden in Kräfte U nach AF, V nach AD. Dann ist $S = U = \frac{P.Q}{R}; \; T = \frac{P^2}{R}; \; V = \frac{Q^2}{R}.$ Die gleichen, unter 45° gegen einander geneigten Kräfte

U geben eine Mittelkraft = W nach der Richtung 8, AD, die ihren Richtungswinkel halbirt, und W ist, wie eben gezeigt, $W = \sqrt{(S^2 + U^2 + SU.\sqrt{2})}$ das ist $W^2 = \frac{P^2 . Q^2}{R^2}(2 + \sqrt{2})$.

Es wird also $R = T + V + W$

$$= \frac{P^2 + Q^2 + PQ . \sqrt{(2 + \sqrt{2})}}{R},$$

oder $R^2 = P^2 + Q^2 + PQ . \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$.

Im Dreiecke aber, dessen Seiten P, Q den Winkel $= 157\frac{1}{2}$ Grad einschließen, ist die dritte Seite = R

$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 - 2 PQ . Cos. 157\frac{1}{2}^\circ)};$$

$$= \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2 PQ \ Cos. 22\frac{1}{2}^\circ)};$$

oder da (Trig. §. 51.) . $Cos. \frac{1}{2} . 45^\circ = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}$,

$$Cos. 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2 + \sqrt{2})},$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + PQ . \sqrt{(2 + \sqrt{2})}.$$

Etwas ähnliches ließe sich in mehrern Fällen beweisen.

§. 55. Bemerkung. In den hier betrachteten Fällen läßt sich die Größe der Mittelkraft nach folgender Anleitung finden: Man nehme (Fig. 17.) auf den Richtungen AB, AC der Kräfte P, Q, die Stücke AB : AC = P : Q; vollende das Parallelogramm ABDC, und ziehe von A aus die Diagonale AD: so ist AD : AB = R : P. Hier bilden AB, AC mit einander den Winkel, welchen die Richtungen der Seitenkräfte einschließen, und es ist wohl einiger Grund zu der Vermuthung, daß auch AD die richtige Richtung der Mittelkraft sein werde. Diese Vermuthung erhält wenigstens dadurch einige Bestätigung, daß für P = Q, die Diagonale die wahre Richtung der Mittelkraft ist.

§. 56. Gäbe diese Zeichnung wirklich die wahre Richtung: so wäre bei senkrecht auf einander wirkenden Seitenkräften (Fig. 14.) P = R . Cos BAD, und Q = R

Cos. CAD = R. Sin BAD, das würde heissen, in diesem Falle fände man jede Seitenkraft, wenn man die Mittelkraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirte, welchen sie mit der Mittelkraft einschließt. Wir wollen sehen, ob diese Zerlegung der Mittelkraft sich als die richtige zeigen wird.

§. 57. Lehrsatz. Wenn es möglich ist, die Kraft R in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte so zu zerlegen, daß die eine $= P = R \operatorname{Cos} \varphi$ unter dem Winkel $= \varphi$, die andre $= Q = R . \operatorname{Sin} \varphi$, unter dem Winkel $= 90^\circ - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt ist: so ist es auch möglich, R in Seitenkräfte $S = R . \operatorname{Cos} . 2 \varphi$, unter dem Winkel $= 2 \varphi$, und $T = R . \operatorname{Sin} . 2 \varphi$. unter dem Winkel $= 90^\circ - 2 \varphi$ gegen R geneigt, zu zerlegen.

Beweis. In Fig. 18. sei R, nach AD wirkend, in Seitenkräfte P, Q zerlegt, deren Richtungen mit AD die Winkel $BAD = \varphi$, $CAD = 90^\circ - \varphi$ bilden. Es sei $P = R \operatorname{Cos} . \varphi$ nach AB, und $Q = R . \operatorname{Sin} \varphi$ nach AC angebracht.

Ist nun $BAE = CAF = \varphi$: so kann man P betrachten, als aus Kräften S nach AF und T nach AE zusammen gesetzt, und es ist (§. 49.)

$S : P = Q : R$ und

$T : P = P : R$; oder

$$S = \frac{P . Q}{R} = R . \operatorname{Sin} \varphi . \operatorname{Cos} \varphi, \text{ nach AF,}$$

$$T = \frac{P^2}{R} = R . \operatorname{Cos}^2 \varphi, \text{ nach AE.}$$

Eben so kann man Q als eine, aus den Kräften U nach AG und V nach AF entstandene Mittelkraft ansehen, wo nämlich $CAF = \varphi$, $CAG = 90^\circ - \varphi$ ist, und es wird $U = \frac{Q^2}{R} = R \operatorname{Sin}^2 \varphi$, nach AG,

und, $V = \frac{PQ}{R} = R \operatorname{Sin} . \varphi . \operatorname{Cos} . \varphi$, nach AF.

Da die vier Kräfte S, T, U, V eben das bewirken,

wie P und Q: so ist ihre gesammte Wirkung der Mittelkraft R äquivalent, und man kann R in die Kräfte T—U nach AE und S+V nach AF zerlegen. Das ergiebt die eine Seitenkraft $= T - U = R(\text{Cos}^2\varphi - \text{Sin}.^2\varphi)$
$= R.\text{Cos}\,2\varphi$, nach AE unter dem Winkel $= 2\varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt, und die andre Seitenkraft $= S + V = 2.R.\text{Sin}\,\varphi.\text{Cos}\,\varphi = R.\text{Sin}.2\varphi$, nach AF unter dem Winkel $= 90° - 2\varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt. Diese Zerlegung ist allemal richtig, wenn die im Lehrsatze vorausgesetzte es ist.

§. 58. Es ist nicht ganz überflüssig, zu bemerken, daß sich auf eben dem Wege beweisen ließe, die Voraussetzung $P = R.\text{Cos}(\varphi - x)$ als eine unter dem Winkel $= \varphi$, und die (§. 52.) nothwendig daran geknüpfte $Q = R.\text{Sin}(\varphi - x)$ als eine unter dem Winkel $= 90° - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt wirkende Seitenkraft, führe zu Seitenkräften $= R.\text{Cos}(2\varphi - 2x)$ unter dem Winkel $= 2\varphi$, und $= R.\text{Sin}(2\varphi - 2x)$ unter dem Winkel $= 90° - 2\varphi$.

Es ergiebt sich aus den folgenden Betrachtungen, daß nicht diese Formeln richtig sind, sondern die des vorigen §.

§. 59. Lehrsatz. Wenn es möglich ist (Fig. 19.), die Mittelkraft $= R$ in Seitenkräfte $= P = R\,\text{Cos}\,\varphi$ nach AB, und $Q = R.\text{Sin}\,\varphi$ nach AC zu zerlegen, so daß AB mit der Richtung der Mittelkraft den Winkel $BAD = \varphi$, AC mit derselben den Winkel $CAD = 90° - \varphi$ einschließe: so ist es auch möglich, eben die Mittelkraft $= R$ in zwei Seitenkräfte $X = R.\text{Cos}.n\varphi$ unter dem Winkel $= n.\varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt, und $Z = R.\text{Sin}\,n\varphi$ unter dem Winkel $= 90° - n\varphi$ gegen sie geneigt zu zerlegen, wofern n eine ganze Zahl bedeutet.

Beweis. Wir wollen annehmen, aus jener Voraussetzung sei schon bewiesen, daß die Zerlegung der R in Seitenkräfte $S = R.\text{Cos}(n-1)\varphi$, unter dem Rich-

tungswinkel HAD $= (n-1)\varphi$, und $T = R \cdot \text{Sin}\,(n-1)\varphi$ unter dem Richtungswinkel GAD $= 90° - (n-1)\varphi$ möglich sei, wenn die Voraussetzung des Lehrsatzes zugestanden wird; dann läßt sich zeigen, daß die ähnlichen Bestimmungen für die Richtungswinkel $= n\varphi$, und $= 90° - n\varphi$ gelten.

Es ist nämlich, wenn HAE $= \varphi$, $=$ FAG, und EAK $=$ FAH $= 90° - \varphi$; vermöge der Voraussetzung die Kraft $= X$ nach AE, äquipollent den Kräften

$V = X \cdot \text{Sin}\,\varphi$ nach AK

und $U = X \cdot \text{Cos}\,\varphi$ nach AH;

und Z nach AF wirkend äquipollent den Kräften

$Y = Z\,\text{Cos}\,\varphi$ nach AG

und $W = Z \cdot \text{Sin}\,\varphi$ nach AH.

Nun sollen diese Kräfte den F und S gleichgelten, welche angenommen sind, $T = R \cdot \text{Sin}\,(n-1)\varphi$, nach AG und $S = R\,\text{Cos}\,(n-1)\varphi$, nach AH; das heißt, es soll sein:

$R \cdot \text{Sin}\,(n-1)\varphi = Z\,\text{Cos}\,\varphi - X\,\text{Sin}\,\varphi;$

$R\,\text{Cos}\,(n-1)\varphi = Z\,\text{Sin}\,\varphi + X\,\text{Cos}\,\varphi.$

oder

$R\,\text{Cos}\,\varphi \cdot \text{Sin}\,(n-1)\varphi = Z\,\text{Cos}^2\varphi - X\,\text{Sin}\,\varphi \cdot \text{Cos}\,\varphi;$

$R\,\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,(n-1)\varphi = Z\,\text{Sin}^2\varphi + X\,\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\varphi.$

Die Summe beider Gleichungen giebt (Trigon. §. 44.),

$R \cdot \text{Sin} \cdot n\varphi = Z.$

Man erhält eben so aus den vorigen Gleichungen

$R \cdot \text{Sin}\,\varphi \cdot \text{Sin}\,(n-1)\varphi. = Z\,\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\varphi - X\,\text{Sin}^2\varphi;$

$R \cdot \text{Cos}\,\varphi \cdot \text{Cos}\,(n-1)\varphi = Z\,\text{Sin}\,\varphi \cdot \text{Cos}\,\varphi + X\,\text{Cos}^2\varphi;$

der Unterschied beider giebt

$R \cdot \text{Cos} \cdot n\varphi = X.$

Diese Werthe gelten also für die Richtungswinkel $= n\varphi$ und $= 90° - n\varphi$, wenn ähnliche für $(n-1)\varphi$ und $90° - (n-1)\varphi$ gelten; wofern sie also für φ gelten, so sind sie richtig für 2φ, und $90° - 2\varphi$, für 3φ und $90° - 3\varphi$ und folglich für jedes $n\varphi$ und $90° - n\varphi$, wenn n eine ganze Zahl ist.

§. 60. Lehrsatz. Wenn sich die Mittelkraft $= R$

in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte $P = R \operatorname{Cos} \varphi$ und $Q = R \operatorname{Sin} \varphi$ zerlegen läßt, deren eine P unter dem Winkel φ, die andre Q unter dem Winkel $90^\circ - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt ist: so läßt sich eben die Mittelkraft R auch in Seitenkräfte $S = R . \operatorname{Cos} \frac{1}{n} \varphi$ und $T = R . \operatorname{Sin} \frac{1}{n} \varphi$, deren Richtungswinkel $\frac{1}{n} \varphi$ und $90^\circ - \frac{1}{n} \varphi$ sind, zerlegen.

Beweis. Erhielte man für die aus R unter den Richtungswinkeln $\frac{1}{n} \varphi$ und $90^\circ - \frac{1}{n} \varphi$ entstehenden Seitenkräfte Werthe $= R \operatorname{Cos} (\frac{1}{n} \varphi - x)$ und $= R . \operatorname{Sin} (\frac{1}{n} \varphi - x)$, (§. 52.): so würden auch Kräfte $= R \operatorname{Cos} (\frac{2}{n} \varphi - 2x)$ und $= R . \operatorname{Sin} (\frac{2}{n} \varphi - 2x)$ unter den Richtungswinkeln $\frac{2}{n} \varphi$ und $90^\circ - \frac{2}{n} \varphi$ der Kraft R äquipollent sein. Daraus aber würde (§. 59.) folgen, daß auch Seitenkräfte $= R . \operatorname{Cos} (\varphi - nx)$ und $= R \operatorname{Sin} (\varphi - nx)$ unter den Winkeln $= \varphi$ und $= 90^\circ - \varphi$ gegen die Richtung der R geneigt ihr gleichwirkend sein müßten. Da wir nun für die letztern Richtungswinkel die Seitenkräfte $= R . \operatorname{Cos} \varphi$ und $= R . \operatorname{Sin} \varphi$ vorausgesetzt haben: so muß, da kein mehrfacher Werth der Seitenkräfte möglich ist (§. 35.), nothwendig $x = 0$ sein, wenn die angenommene Voraussetzung richtig ist.

§. 61. Lehrsatz. Wenn man die Mittelkraft $= R$ in zwei gegen einander senkrecht wirkende Kräfte zerlegt, deren eine $= P$ unter dem Winkel $= \varphi$, die andre $= Q$ unter dem Winkel $= 90^\circ - \varphi$ gegen die Mittelkraft geneigt ist, so muß nothwendig $P = R \operatorname{Cos} \varphi$ und $Q = R \operatorname{Sin} \varphi$ sein.

Beweis. Für $\varphi = 45^\circ$ ist $P = Q$ (§. 31.), also (§. 52.), $2P^2 = R^2$; $P = Q = R . \operatorname{Sin} 45^\circ$. In jedem andern Falle also, wenn $\varphi = \frac{1}{n} . 45^\circ$ ist, muß (§. 60.) $P = R \operatorname{Cos} \varphi$; $Q = R . \operatorname{Sin} \varphi$ sein, und folg-

sich auch für $\varphi = \frac{m}{n} . 45^\circ$, $P = R \text{Cos}\,\varphi$, $Q = R . \text{Sin}\,\varphi$. (§. 59.) es mögen m und n welche ganze Zahlen man will bedeuten.

§. 62. Der Beweis läßt sich nun leicht auch auf irrationale Zahlen m . n anwenden, weil er gilt für jede rationale Grenzen, zwischen welchen die irrationalen Zahlen eingeschlossen sind (vergl. Geom. §. 193.).

§. 63. Lehrsatz. Wenn man (Fig. 20.) auf den Richtungslinien AB, AC der auf den Punct A wirkenden Kräfte P, Q, Stücke, diesen Kräften proportionel nimmt, so daß $AB : AC = P : Q$ ist: so giebt die Diagonale AD des aus den Seiten AB, AC und dem durch die Richtungen der Kräfte gegebenen Winkel BAC gebildeten Parallelogramms die Größe und Richtung der aus P, Q entspringenden Mittelkraft an.

Beweis. Zieht man GF durch A auf AD senkrecht, BG, CF mit AD, dagegen CH, BI mit GF parallel; dann läßt sich $P = AB$, in die Seitenkräfte

$AG = P . \text{Sin} . BAD$, nach AG

und $AI = P . \text{Cos}\, BAD$, nach AD zerlegen. Eben so ist $Q = AC$ den Seitenkräften

$AF = Q . \text{Sin}\, CAD$, nach AF

und $AH = Q . \text{Cos}\, CAD$, nach AD, äquipollent.

Die Kräfte $= P . \text{Sin}\, BAD$ und $= Q . \text{Sin}\, CAD$ sind einander gleich; denn sie werden durch die gleichen Linien $CH = BI$ dargestellt; sie heben also einander auf. Es ist daher die gesammte Wirkung der Kräfte P, Q nach AD gerichtet, und die entstehende Mittelkraft ist

$= R = P . \text{Cos}\, BAD + Q . \text{Cos}\, CAD$,

das ist $= AI + ID$, indem $ID = AH$.

Die Diagonale giebt also die wahre Richtung der Mittelkraft an, und stellt ihre Größe in eben den Einheiten dar, in welchen AB die Kraft P, AC die Kraft Q angiebt.

§. 64. Erklärung. Dieses Parallelogramm aus Linien gebildet, die den Seitenkräften proportionel sind

und unter eben dem Winkel gegen einander geneigt, welchen die Richtungen der Seitenkräfte einschließen, heißt das **Parallelogramm der Kräfte**.

§. 65. **Lehrsatz.** Wenn die Kräfte (Fig. 20.) P nach AB, Q nach AC, R nach AK (der AD grade entgegen gesetzt), sich einander im Gleichgewichte erhalten: so ist P : Q = Sin KAC : Sin KAB,
und P : R = Sin KAC : Sin BAC.

Beweis. Denn die nach AK wirkende Kraft muß eben so groß als die ihr grade entgegen wirkende durch AD dargestellte Mittelkraft sein; es ist also (nach der Construct. §. 63.)

P : Q = AB : AC = Sin DAC : Sin DAB
oder P : Q = Sin KAC : Sin KAB
und P : R = AB : AD = Sin DAC : Sin DBA
oder P : R = Sin KAC : Sin BAC.

§. 66. **Bemerkung.** Aus den Sätzen §. 32 bis 46. erhellt, daß das Parallelogramm der Kräfte zu Beantwortung aller hier vorkommender Fragen dienen könne, daß nämlich aus drei gegebenen von einander unabhängigen Stücken, die übrigen durch die Zeichnung des Parallelogramms bestimmt werden. Und hier erhellet nun auch die Richtigkeit der in §. 47. nur hingeworfenen Bemerkung, welche §. 54. einige Bestätigung erhielt.

§. 66. Gehen wir die sämmtlichen Fälle in §. 39. durch: so läßt sich nun auch übersehen, warum fünf Fälle eine strenge bestimmte Auflösung ergaben, drei Fälle aber eine doppelte Auflösung zuließen.

Das Parallelogramm ist nämlich völlig bestimmt:

1. wenn beide Seiten nebst der Diagonale gegeben sind;
2. wenn eine Seite, die Diagonale und der eingeschlossene Winkel bestimmt sind;
3. wenn die Diagonale bestimmt ist, nebst den Winkeln, unter welchen die Seiten gegen sie geneigt sein sollen;

4. wenn man die Seiten nebst dem Winkel des Parallelogramms kennt;
5. Wenn eine Seite gegeben ist und die Winkel, welche sie mit der Diagonale und mit der andern Seite macht.

Hingegen sind in folgenden Fällen zwei verschiedene Parallelogramme aus einerlei gegebenen Stücken möglich:

1) Wenn eine Seite $= P$, nebst der Diagonale $= R$ gegeben ist, und es ist der Winkel zwischen der Diagonale und der andern Seite bestimmt. Denn man ziehe (Fig. 21.) $AD = R$, nehme DAF gleich dem gegebenen Winkel zwischen R und der zweiten Seite, ziehe um D mit dem Halbmesser $= DC = P$ einen Kreis, so kann dieser die AF in zwei Puncten C und E schneiden, und das Parallelogramm GAED enthält eben so gut die gegebenen Stücke, als das Parallelogramm ACDB.

Diese doppelte Auflösung ist aber (übereinstimmend mit §. 41.) nur möglich, wenn $a + 2b < 180°$, das ist

$$ADC + 2 . DAC < 180°$$

und auch $ADE + 2 . DAC < 160°$.

Der Grund erhellet, wenn man dies gleichschenklichte Dreieck ADH zeichnet, worin $DA = DH$ und $A + H + ADH = 180°$ ist. Die doppelte Bestimmung kann nur eintreten, wenn DC, DE, zwischen DA, DH fallen.

2) Ist die Seite P, die Diagonale R und der von P und der andern Seite eingeschlossene Winkel $= a + b$, gegeben: so sind gleichfalls in gewissen Fällen zwei Auflösungen möglich. Man zeichne (Fig. 22.) $AB = P$, $ABE = 180° - a - b$; dann ist es möglich, daß ein Kreis mit dem Halbmesser $AD = R$ um den Mittelpunct A gezeichnet, BE zweimal an derselben Seite von AB in D und in F schneidet, und so zwei Parallelogramme bestimmt, ACDB, AGFB, welche die gegebenen Stücke enthalten.

Nach §. 43. tritt dieser Fall nur ein, wenn

$a + 2b > 180^\circ$ oder $b > 180^\circ - a - b$ ist. ABD ist $= 180^\circ - a - b$, sollte dieser größer als ADB $= b$, sein, so wäre AD > AB und keine doppelte Bestimmung des Dreiecks möglich (Geom. §. 107.).

3) Wenn beide Seiten des Parallelogramms $= P$ und $= Q$ gegeben sind, nebst dem Winkel $= a$, welche die erstere mit der Diagonale einschließen soll: so nehme man (Fig. 23.) AB $= P$, BAG $= a$, und ziehe um B als Mittelpunct, mit dem Halbmesser $Q =$ BD $=$ BE einen Kreis, welcher AG in D und E schneidet; dann sind AD, AE die Diagonalen der beiden Parallelogrammen ABDC und ABEF, welche sich aus den gegebenen Stücken zeichnen lassen.

Daß diese doppelte Bestimmung nur eintreten kann, wenn $a < b$ ist, erhellt aus Geom. §. 107.

§. 67. In den zuletzt betrachteten Fällen können also verschiedene Seitenkräfte eben die Mittelkraft, oder gleich bleibende Seitenkräfte eine verschiedene Mittelkraft hervorbringen. In Fig. 21. wird dieselbe Mittelkraft hervorgebracht aus Kräften AB $= P$ und AC $= Q$ und aus Kräften AG $= P$ und AE $= q$. In Fig. 22. ist etwas Aehnliches. In Fig. 23. dagegen bewirken die Seitenkräfte AB $= P$ und AC $=$ AF $= Q$ das eine Mal eine Mittelkraft AD $= R$, das andre Mal eine davon ganz verschiedene AE $= r$.

§. 68. Aufgabe. Auf einen Punct wirken mehr als zwei Kräfte nach verschiedenen Richtungen, die Kräfte sind nebst ihren Richtungen gegeben; man sucht die Größe und Richtung der Kraft, welche angebracht werden müßte, um jenen das Gleichgewicht zu halten.

Erste Auflösung. Man zeichnet die Richtungslinien aller gegebnen Kräfte, und nimmt auf ihnen Stücke, den Kräften proportionel, so daß AB die nach AB wirkende Kraft, AC die nach AC wirkende Kraft vorstellt, und eben so AD, AE, AF die nach diesen Richtungen wirkenden Kräfte. Aus zweien derselben, zum Beispiel AB, AC construirt man das Parallelogramm

ABGC, und nun stellt AG, als Diagonale, die Richtung und Größe der Mittelkraft vor, die eben die Wirkung, wie AB, AC hat.

Wir stellen uns daher nun vor, statt der Kräfte AB, AC wirke die Kraft AG und aus ihr und der dritten Kraft AD werde durch Hülfe des Parallelogramms AGHD die Mittelkraft AH bestimmt, die also gleichwirkend mit AB, AC, AD ist. Statt dieser drei könnte also AH wirken, und das aus dieser und der vierten Kraft AE gebildete Parallelogramm AHIE giebt die den vier Kräften äquipollente Kraft AI, welche mit der fünften AF zu einem Parallelogramm verbunden die Kraft AK darstellt, als eben so viel leistend, wie jene fünf. Eine Kraft AL also nach der Richtung AL, der AK grade entgegengesetzt wirkend, deren Größe durch AL = AK dargestellt würde, wäre die zu Erhaltung des Gleichgewichts erforderliche Kraft.

Diese Auflösung ist auch da anwendbar, wo die Richtungen der Kräfte nicht alle in einerlei Ebne liegen. In diesem Falle muß man die Parallelogramme in verschiedenen Ebnen zeichnen, nämlich ABGC in der durch AB, AC; AGHD in der durch GAD bestimmten Ebne u. s. w.

Zweite Auflösung. Erster Fall. Wenn alle Richtungslinien der Kräfte (Fig. 25.) AF, AG, AH, AI in einer Ebne liegen.

Man ziehe in dieser Ebne durch den Punct A, auf welchen alle Kräfte wirken, zwei gegen einander senkrechte Linien BC, DE, und bestimme aus den gegebnen Richtungen der Kräfte die Winkel FAB, GAB u. s. w. Jede der Kräfte zerlege man in zwei Seitenkräfte, deren eine mit BC, die andre mit DE parallel wirket; nenne diejenigen positiv, welche nach AC und AD zu wirken, die entgegengesetzten negativ. Dann ergiebt sich die Summe aller nach AD und aller nach AC wirkenden Kräfte, und die aus ihnen entspringende Mittelkraft ist diejenige, welche allen gegebnen Kräften äquipollent ist. In unse-

rer Figur (Fig. 25.) mögen die Kräfte P nach AF, Q nach AG, R nach AH, S nach AI wirken, und jede durch die Länge ihrer Richtungslinie vorgestellt werden; dann ist die Summe der nach AD wirkenden Kräfte $= P . \mathrm{Sin}\, CAF + Q . \mathrm{Sin}\, CAG + S . \mathrm{Sin}\, BAI - R\, \mathrm{Sin}\, BAH$; die Summe der nach AC wirkenden Kräfte $= P . \mathrm{Cos}\, CAF + Q . \mathrm{Cos}\, CAG - R . \mathrm{Cos}\, BAH - S . \mathrm{Cos}\, BAI$. Stellt man jene Summe durch AK in der Richtung AD, diese Summe durch AR in der Richtung AC dar: so ergiebt das rechtwinklichte Parallelogramm AKRP die Richtung und Größe der Mittelkraft AP, welcher gleich und entgegengesetzt diejenige Kraft wirken müßte, die zu Herstellung des Gleichgewichts erfordert wird.

Durch Rechnung würde man die Größe derselben finden, wenn man die Quadrate der nach AD und nach AC wirkenden Kräfte suchte, und aus ihrer Summe die Quadratwurzel zöge, indem $AP = \sqrt{(AK^2 + AR^2)}$; ihre Richtung aber wird dadurch bestimmt, daß

$$\mathrm{tang}\, PAC = \frac{AK}{AR},$$

$$\mathrm{tang}\, PAC = \frac{P . \mathrm{Sin}\, CAF + Q . \mathrm{Sin}\, CAG + S . \mathrm{Sin}\, CAI - R . \mathrm{Sin}\, CAH}{P . \mathrm{Cos}.\, CAF + Q . \mathrm{Cos}\, CAG + S . \mathrm{Cos}\, CAI + R . \mathrm{Cos}\, CAH}$$

sein muß (Trig. §. 20.).

Zweiter Fall. Wenn die Richtungslinien der Kräfte nicht alle in derselben Ebne liegen. Man ziehe (Fig. 26.) durch den Punct A, auf welchen die Kräfte wirken, zwei in der Ebne BCG auf einander senkrechte Linien BC, FG, und dann eine auf diese Ebne senkrechte Linie DE, die folglich gegen BC und FG senkrecht ist. Durch je zwei dieser Linien lege man die Ebnen BFCG, BECD, DFEG. Stellt nun AI die Richtung und Größe einer auf A wirkenden Kraft = P vor, die nicht in einer jener Ebnen liegt, so zerlege man sie in drei Seitenkräfte, nach der Richtung der Linien AB, AD, AF. Dieses geschieht, indem man von I, nachdem AI der

Größe der Kraft P gemäß genommen ist, IK senkrecht auf die Ebne BFGC zieht, und zwischen dem Puncte K, wo dieser Perpendikel die Ebne trifft und A die Linie AK zeichnet, dann ist P äquipollent zweier Kräften, P. Cos IAK nach der Richtung AK und P. Sin IAK nach der Richtung AD. Die Richtung der ersteren Kraft liegt in der Ebne BFGC und kann in zwei Kräfte mit AB und AG parallel zerlegt werden; sie ist nämlich gleichwirkend den Kräften

P. Cos. IAK. Cos. KAB nach AB; und
P. Cos IAK. Sin KAB nach AG.

So ist also die Kraft P in die ihr äquipollenten nach den drei Richtungen AD, AB, AG wirkenden Kräfte zerlegt. Auf eben die Weise zerlegt man alle vorkommenden Kräfte, vereinigt, mit gehöriger Rücksicht auf das Negative, alle nach AB wirkende Kräfte, und eben so alle nach AD, und alle nach AG wirkende Kräfte jede für sich in eine Summe. Nenne ich die Summe der nach AB wirkenden Kräfte $= p$, der nach AG $= q$, der nach AD $= r$: so ergeben die beiden ersteren vereinigt eine Mittelkraft $= \sqrt{(p^2 + q^2)}$, deren Richtung in der Ebne BFCG liegt und mit AB einen Winkel macht, dessen Tangente $= \frac{q}{p}$ ist. Diese Kraft läßt sich mit der nach AD wirkenden $= r$ vereinigen; denn ihre Richtungen sind auf einander senkrecht, und sie geben eine Mittelkraft $= \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$, deren Richtungslinie gegen die Ebne BFCG unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente $= \frac{r}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$.

§. 69. Im letzten Falle hätte man auch die Richtung und Größe der Mittelkraft dadurch finden können, daß man aus Seitenlinien, den Kräften p, q, r, proportional ein rechtwinklichtes Parallelepipedum construirte; die Diagonale würde die wahre Richtung

und die verhältnißmäßige Größe der Mittelkraft angeben.

§. 70. Sind die Kräfte, deren Mittelkraft gesucht wird, schon für sich im Gleichgewichte: so ist die ihnen gleichgeltende Mittelkraft = o, und es müssen folglich die Kräfte nach AD und AC (Fig. 25.) oder nach den drei auf einander senkrechten Richtungen in Fig. 26. jede für sich = o werden, indem sie sich einander nicht aufheben können. Hierin also liegt die Bedingung des Gleichgewichtes.

§. 71. Bemerkung. Wenn an einen Punct A (Fig. 27.) Linien, alle in derselben Ebne liegend, gezogen sind, wie AB, AC, AD; und es wird dieses System von Linien so nach ab, ac, ad fortgerückt, daß ab mit AB, ac mit AC, ad mit AD parallel bleibt: so wird man mit Recht sagen, die Verrückung des Punctes A betrage nach einer mit AD parallelen Richtung so viel als AE, wenn nämlich aE aus a auf AD senkrecht gesetzt ist; die Verrückung nach der Richtung AB beträgt AG, wenn aG auf AB senkrecht ist, u. s. w.

§. 72. Lehrsatz. Wenn (Fig. 27.) auf den Punct A Kräfte nach den Richtungen AB, AC, AD wirken: so werden diese einander im Gleichgewichte halten, wenn bei einer nach willkührlicher Richtung gehenden Fortrückung des ganzen Systems, wobei die Richtungslinien ihren vorigen Lagen parallel bleiben, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die ihrer Richtung parallele Fortrückung verschwindet.

Erläuterung. Wenn nach AB die Kraft = P, nach AC die Kraft = Q, nach AD die Kraft = R wirkt, und es stellen aG, aF, aE die aus dem fortgerückten Puncte a auf jene Richtungen gefälleten Senkrechte vor, so ist AG die Fortrückung nach AB, es ist AF die negative Fortrückung nach AC, und AE die Fortrückung nach AD. Unser Satz behauptet also, daß für das Gleichgewicht $P . AG - Q . AF + R . AE = o$ sei.

Beweis. Es sei BAD $= \alpha$, BAC $= \beta$; die Richtung der willkürlichen Fortrückung des Punctes A nach a sei durch BAa $= \omega$ bestimmt; Aa sei $= s$. da hier AG $= s \operatorname{Cos} \omega$, AE $= s \operatorname{Cos} (\alpha - \omega)$; AF $= s . \operatorname{Cos} (\omega + \beta)$, und es sich durch die Größe der Winkel von selbst ergiebt, ob diese Größen positiv oder negativ werden: so sollte

$P . s \operatorname{Cos} \omega + Q . s . \operatorname{Cos} (\omega + \beta) + R . s . \operatorname{Cos} (\alpha - \omega) = 0$

sein.

Wenn die Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten: so hat man (§. 65.)

$P : Q : R = \operatorname{Sin} CAD : \operatorname{Sin} BAD : \operatorname{Sin} BAC$; oder

$P : Q : R = - \operatorname{Sin} (\alpha + \beta) : \operatorname{Sin} \alpha : \operatorname{Sin} \beta$

(Trig. §. 29.), also

$$Q = - \frac{P . \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)}; \quad R = - \frac{P . \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)};$$

es soll also

$$P . s . \left(\operatorname{Cos} \omega - \frac{\operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} (\omega + \beta)}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)} - \frac{\operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Cos} (\alpha - \omega)}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)} \right)$$

$= 0$, sein, oder

$$0 = \frac{P . s .}{\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos} \omega . \operatorname{Sin} (\alpha + \beta) - \operatorname{Cos} \omega . \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \beta \\ - \operatorname{Cos} \omega . \operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \omega . \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Sin} \beta \\ - \operatorname{Sin} \omega . \operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Sin} \alpha \end{array} \right\}$$

wo der in der Parenthese stehende Factor offenbar $= 0$ ist.

Die Summe dieser Producte verschwindet also für den Fall des Gleichgewichtes, und eben das ließe sich für mehrere Kräfte beweisen, auch dann, wenn ihre Richtungen nicht alle in derselben Ebne lägen.

§. 73. Da die Richtung, nach welcher wir die Fortrückung des ganzen Systems annehmen, völlig willkürlich ist: so können wir dazu die Richtung der einen Kraft, etwa AD wählen. Dann könnten wir uns diese Verrückung als die Wirkung vorstellen, welche die Kraft R hervorbringen würde, wenn keine andre Kraft den Punct A zur Bewegung antriebe. Durch diese Bewe-

gung würde, wenn sie geschähe, der Punct A bestimmte Wege = s nach der Richtung AD, = ſ nach der Richtung AB, = σ nach der Richtung AC durchlaufen. Aber die nach AB und AC wirkenden Kräfte P und Q hindern, daß R nicht jene Wirkung, die eine bloß gedachte ist, in der That hervorbringe, und unsre Untersuchung zeigt, daß die Bewegung völlig gehindert wird, wenn $R.s + P.ſ + Q.\sigma = o$ ist.

§. 74. Das hier erwiesene Gesetz heißt das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**, das ist, des Bestrebens nach Geschwindigkeit, oder der von jeder Kraft zwar angeregten (gleichsam beabsichtigten), aber wegen der entgegengesetzten Thätigkeit der übrigen Kräfte nicht zur Wirklichkeit kommenden Wirkungen oder Bewegungen.

§. 75. Eben diese Betrachtungen zeigen auch, warum man R . s **die Wirkung der Kraft R** genannt hat, indem, wenn man sich eine Verrückung des ganzen Systems, etwa als der einen Kraft Folge leistend, denkt, das Geschäft der andern Kräfte ist, die Fortrückung, so viel davon auf die ihnen parallele Richtung fällt, zu hindern, und die Wirkung der Kraft also desto größer ist, je stärker diese von ihr gehinderte Fortrückung ist.

§. 76. Dieses Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, ehmals bekannt unter dem Namen des Cartesischen Grundsatzes, kann dienen, um alle Lehren der Statik daraus herzuleiten, sobald es selbst einmal gründlich bewiesen ist.

§. 77. **Bemerkung.** Wenn ein beweglicher Punct A (Fig. 28.) sich an der Oberfläche eines unverrückbaren Widerstandes befindet: so kann dieser Widerstand nur diejenigen Kräfte aufheben, welche an der Stelle, wo sie wirken, senkrecht auf seine Oberfläche sind. Schief gegen die Oberfläche wirkende Kräfte werden zwar einen Druck auf dieselbe hervorbringen; aber doch zugleich ein

Fortschieben mit der Richtung der Oberfläche parallel bewirken.

§. 78. Aufgabe. Der bewegliche Punct A (Fig. 28.) befindet sich an der Oberfläche FG eines festen Widerstandes, und es wirken auf A Kräfte, wie P nach AB, Q nach AC und mehrere. Man sucht die Bedingungen, unter welchen der Punct A in Ruhe bleiben kann, und den Druck, welchen die Oberfläche in A leidet.

Auflösung. Es sei AD die Richtung der Oberfläche in dem Puncte, wo A an ihr anliegt, so daß AD, wenn des Körpers Oberfläche krumm ist, eine ihn berührende Ebne vorstellt. Man zerlege nun jede der wirkenden Kräfte in zwei Seitenkräfte, deren eine mit AD parallel, die andre auf sie senkrecht ist; man vereinige die sämmtlichen in der Ebne AD liegenden Seitenkräfte in eine einzige, allen äquipollente Kraft, und sehe, ob diese verschwindet; ist das der Fall, so kann A vermöge des Widerstandes, welchen FG ihm in den Weg stellt, in Ruhe bleiben, oder das Gleichgewicht kann bestehen, wofern die Summe des auf AD senkrechten Drucks gegen den Körper zu gerichtet ist. Um dies zu entscheiden, bringt man die sämmtlichen auf AD in A senkrechten Kräfte in eine Summe und betrachtet dabei die gegen FG zu wirkenden als positiv, die entgegengesetzt wirkenden als negativ, so ist diese Summe der Druck, welchen die feste Oberfläche in A leidet, und es ist offenbar, daß das Gleichgewicht nur besteht, wenn diese Summe positiv oder gegen den festen Körper FG zu gerichtet ist.

§. 79. Wäre dieser Druck $= 0$, so wären die Kräfte schon für sich im Gleichgewichte, ohne daß es der Unterstützung des Punctes A bedurft hätte.

Dritter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte am Hebel und an der um einen unterstützten Punct beweglichen Ebne.

§. 80. Erklärung. Eine grade, unbiegsame Linie, welche in einem Puncte so unterstützt ist, daß sie sich um diesen frei drehen, der Punct aber nicht verrückt werden kann, heißt ein gradlinigter Hebel, und zwar ein zweiarmiger Hebel, wenn an beiden Seiten, ein einarmiger Hebel, wenn nur an einer Seite des unterstützten Punctes Kräfte auf ihn wirken.

§. 81. Erklärung. Ueberhaupt heißt jede grade, krumme oder aus graden Theilen zusammengesetzte Linie ein Hebel, wenn sie unbiegsam ist, und sich um einen fest unterstützten Punct frei drehen kann. Nach Verschiedenheit der Gestalt heißt der Hebel dann ein Winkelhebel u. s. w.

§. 82. Wir betrachten hier den Hebel, als ob er selbst ohne Schwere wäre.

§. 83. Erklärung. Der festgehaltene Punct des Hebels heißt der Ruhepunct oder Drehungspunct; er ruhet auf der festen Unterlage, die man als unverrückbar annimmt.

§. 84. Lehrsatz. Am graden zweiarmigen Hebel sind zwei senkrecht auf ihn und nach parallelen Richtungen wirkende Kräfte im Gleichgewichte, wenn sie sich umgekehrt verhalten, wie die Entfernungen der Puncte auf welche sie wirken, vom Ruhepuncte.

Beweis. Es sei (Fig. 29.) BC der in A unterstützte Hebel. Die in B und C parallel unter sich und

senkrecht auf AC wirkenden Kräfte stelle man durch die ihnen proportionalen Linien CD, BE dar, und setze das Verhältniß der Kräfte CD : BE = AB : AC voraus.

Die Kraft CD kann angesehen werden, als eine aus Seitenkräften CF, CG entspringende Mittelkraft. Man nehme die Richtung von CF in der verlängerten Richtung des Hebels selbst, und die Kraft = CF von willkürlicher Größe: so ist zugleich die Richtung und Größe der andern Seitenkraft CG bestimmt (§. 34. 66.). Eben so kann BE angesehen werden als Mittelkraft aus den Seitenkräften BH = CF, nach der verlängerten Richtung des Hebels der CF grade entgegen wirkend, und aus BI, deren Richtung und Größe nun auch bestimmt ist.

Die Kräfte CF, BH heben einander auf und könnten folglich (§. 10.) ganz fehlen. Die Wirkung der Kräfte CG, BI wird eben dieselbe sein, als ob sie in ihrem Durchschnittspuncte K wirkten (§. 23.) und die ganze Ebne BACK um die Unterlage A zu drehen strebten. Dieser Durchschnittspunct K liegt in der durch A auf BC gezogenen Senkrechten; denn wenn man von K eine Senkrechte auf BC zieht, und nähme an, daß diese die BC nicht in A, sondern in A″ schnitte: so ist doch das Dreieck CA″K ∽ FCD, und BA″K ∽ HBE, also

HB : BE = BA″ : A″K,

CD : CF = A″K : A″C,

das ist, da BH = CF,

CD : BE = BA″ : A″C,

und auch, zu Folge der Voraussetzung

CD : BE = BA : AC; es fällt also A″ mit A zusammen.

Wirkten in K die Kräfte KL = CG, KM = BI, so wäre offenbar die Mittelkraft = KO + NO = CD + BE, nach der verlängerten Richtung AK. Denn, wenn man KO parallel mit CD und LO parallel mit GD nimmt: so ist das Dreieck LKO ≅ GCD, also bei O rechtwinklicht; zieht man nun LN parallel mit KM und nimmt

LN = KM, so ist OLN $\cong$ BHE, weil LO = CF = HB, LN = HE, L = H, also O ein rechter Winkel, also KN = CD + BE, eine mit CD parallele grade Linie.

Die gesammte Wirkung der Kräfte CD, BE oder der ihnen gleich geltenden CF, KL und BH, KM ist also die, den Punct A nach der Richtung AK zu drücken, mit einer Kraft = BE + CD; da nun dieser Punct A unterstützt ist: so besteht das Gleichgewicht.

Anmerkung. Kästners Beweis der Lehre vom Hebel hat zwar eine etwas mehr elementarische Form; aber man nimmt bei ihr gleichsam als von selbst erhellend an, daß A den ganzen Druck = CD + BE leide. Auch wird die Herleitung des Parallelogramms der Kräfte nicht ohne Schwierigkeit zu Stande gebracht. Aus diesem Grunde habe ich eine andre Darstellung, die im Wesentlichen mit Eytelwein übereinstimmt, gewählt. Doch verdient Kästners Beweisart, so wie Karsten sie in seines Lehrbegriffes 3ten Bande mittheilt, nachgelesen zu werden.

§. 86. Man kann hieraus leicht herleiten, daß das Gleichgewicht nicht besteht, wenn die Kräfte sich nicht umgekehrt wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten. Wendet man genau dieselben Schlüsse an: so sieht man, daß das Perpendikel aus K nicht mehr in A, sondern zwischen A und C trifft, wenn $AC > \frac{AB \cdot BE}{CD}$ ist. Es ist also dann grade so, als ob eine einzige Kraft = CD + BE in einem nicht unterstützten Puncte A′ senkrecht auf den Hebel wirkte, und in diesem Falle muß nothwendig ein Drehen des Hebels um A erfolgen.

§. 87. Wenn CD : BE = AB : AC ist: so könnte statt der Unterlage eine in A senkrecht auf BC, nach AR wirkende Kraft = BE + CD angebracht sein, und diese würde hinreichen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Wäre alsdann in C eine Unterstützung, welche den Punct C fest hielte, ohne die freie Drehung um C zu hindern: so wäre am einarmigen Hebel die Kraft = BE in der Entfernung = CB vom Ruhepuncte, und die Kraft

$= CD + BE = \frac{AB . BE}{AC} + BE = \frac{BC . BE}{AC}$ in der Entfernung $= AC$ vom Ruhepuncte im Gleichgewichte, wenn sie senkrecht auf den Hebel, parallel unter sich und nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es gilt also auch hier folgender

Lehrsatz. Das Gleichgewicht findet auch beim einarmigen Hebel statt, wenn die Kräfte sich umgekehrt, wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten, und kann im entgegengesetzten Falle nicht statt finden.

§. 88. Die Proportion, daß die Kräfte sich umgekehrt wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten müssen; also, wenn ich (Fig. 29.) die an B wirkende Kraft $= P$, die an C wirkende $= Q$ nenne, $P : Q = AC : AB$ sein muß, führt zu der Gleichheit der Producte

$$P . AB = Q . AC,$$

wo wir uns statt der Linien und Kräfte unbenannte Zahlen denken müssen.

§. 89. Erklärung. Man nennt dieses richtig verstandene Product einer jeden senkrecht auf den Hebel wirkenden Kraft in ihre Entfernung vom Ruhepuncte das Moment der Kraft.

§. 90. Nach dem strengen analytischen Begriffe von positiven und negativen Größen sollten wir hier diejenigen Kräfte positiv nennen, welche nach der einen Richtung, und die negativ, welche nach der entgegengesetzten Richtung wirken. Und eben so sollten die von A an gerechneten Entfernungen nach der einen Seite positiv, nach der andern negativ genannt werden.

Am zweiarmigen Hebel (Fig. 30.) sind also beide Kräfte positiv, aber die eine Entfernung ist hier als negativ zu betrachten; bei dem einarmigen Hebel hingegen (Fig. 31.) ist die an B wirkende Kraft P negativ, wenn die an C angebrachte Kraft Q positiv ist, die Entfernungen aber liegen beide nach einerley Richtung und sind also als positiv anzusehen.

§. 91. Diesem zu Folge ist am zweiarmigen Hel (Fig. 30.) das Moment der Kraft $P = P.AB$; d Moment der Kraft $Q, = -Q.AC$, also die Summ der Momente $= P.AB - Q.AC = 0$.

Am einarmigen Hebel ist (Fig. 31.)
das Moment der Kraft $P, = -AB.P$.
das Moment der Kraft $Q, = Q.AC$,
also wieder die Summe der Momente $= Q.AC - $] $AB = 0$. Beim Gleichgewichte der Kräfte am Hel ist also die Summe ihrer Momente $= 0$.

Wir werden diese Rücksicht auf das Positive u Negative strenge im Auge behalten.

§. 92. Aufgabe. An der graden unbiegsamen I nie, welche in zwei Puncten B, C, unterstützt ist (Fi 32.), wirkt senkrecht auf sie in A eine Kraft $= R$; m sucht den Druck, welchen die Puncte B und C leiden.

Auflösung. Der Druck in B heiße $= P$, d Druck in C, $= Q$, und man betrachte diesen Druck a positiv, wenn seine Richtung mit der Richtung der Kra R übereinstimmt; so ist allgemein

$$P = \frac{R.AC}{BC} \text{ und } Q = \frac{R.AB}{BC}.$$

Beweis. Erster Fall. Es sei die grade Lin oder der Hebel in zwei Puncten unterstützt, die an ve schiedenen Seiten von A liegen (Fig. 32.), dann würd offenbar das Gleichgewicht bestehen, wenn an B ei Kraft $= P$, und an C eine Kraft $= Q$ nach einer Rich tung der Richtung der R parallel und entgegengese wirkte, und zugleich $P + Q = R$ und $P.AB = Q.A$ wäre (§. 84.). Aus diesen beiden Gleichungen aber fol $(R - Q).AB = Q.AC$; also

$$Q = \frac{R.AB}{AB+AC} = \frac{R.AB}{BC}, \text{ und folglich}$$

$$P = \frac{R.AC}{BC}.$$

Zweiter Fall. Wenn die unterstützten Punc

beide an derselben Seite von A liegen, dann müßte in B (Fig. 33.) eine Kraft P nach einer Richtung der Richtung der R parallel und entgegengesetzt, in C eine Kraft $= Q$ nach übereinstimmender Richtung mit R wirken; und es müßte $P = Q + R$,

$Q . BC = R . AB$. sein (§. 87.),

also $Q = \frac{R . AB}{BC}$; $P = \frac{R . AC}{BC}$.

§. 93. Um sogleich das richtige Zeichen für den Druck zu erhalten, wollen wir (Fig. 33.) A als Drehepunct betrachten, also $P . AB$ und $Q . AC$ als Momente der Kräfte P und Q in Beziehung auf A. Diese Momente sind beide positiv, wenn die Kräfte nach einerley Richtung wirken. Es ist aber zum Gleichgewichte erforderlich, daß die Summe aller Kräfte am Hebel $= 0$, und die Summe aller Momente $= 0$ sei (§. 91.), also hier

$P + Q + R = 0$, und

$P . AB + Q . AC = 0$, weil R in der Entfernung $= 0$ das Moment $= 0$ hat.

Daraus ergiebt sich, da $Q = - P - R$ ist,

$P . AB = + P . AC + R . AC = - Q . AC$,

oder $P . (AB - AC) = R . AC$;

$$P = \frac{R . AC}{AB - AC};$$

$$\text{und } Q = \frac{R . AB}{AC - AB}.$$

Hier wird nun erstlich P positiv, wenn $AB > AC$ und zugleich AC positiv ist, und es wird dann Q negativ, wofern auch AB positiv ist, das heißt: liegen beide Unterlagen an derselben Seite von A, so übt die entferntere einen Druck aus nach der mit der Richtung der R übereinstimmenden Richtung, die nähere aber einen Druck nach entgegengesetzter Richtung, und der Druck, den jede leidet, ist entgegengesetzt dem Drucke, welchen sie ausübt.

Zweitens. Es wird P und auch Q negativ, wenn

AB, AC an entgegengesetzten Seiten von A liegen; denn wenn ich AC = $-$a nenne, und AB = $+$b, so ist $P = \frac{-Ra}{a+b}$ und $Q = \frac{R.b}{-a-b}$. Das heißt: liegt A zwischen den Unterstützungspuncten, so üben diese beide einen Druck aus nach der Richtung, welche dem Drucke der R entgegengesetzt ist, und beide Puncte leiden folglich einen Druck nach der mit der Richtung der R übereinstimmenden Richtung.

§. 94. Lehrsatz. Wenn auf einen gradlinigten Hebel mehrere Kräfte nach parallelen, entweder übereinstimmenden oder entgegengesetzten auf den Hebel senkrechten Richtungen wirken; und es ist A der Punct (Fig. 34.) in Beziehung auf welchen die Summe der Momente aller Kräfte = 0 ist: so leistet eine in A angebrachte, der Summe aller Kräfte gleiche, nach paralleler Richtung mit ihnen wirkende Kraft, genau eben das, was alle jene einzelnen Kräfte insgesammt bewirkten.

Beweis. Wenn (Fig. 34.) G derjenige Punct ist, wo der Hebel unterstützt werden müßte, damit die Kräfte P in B, Q in C einander im Gleichgewichte erhielten: so ist CG.Q = GB.P, oder $CG = \frac{P.GB}{Q}$. Wofern nun ein willkürlicher Punct A des Hebels unterstützt wird: so ist in Beziehung auf ihn die Summe der Momente der einzeln wirkenden Kräfte P in B, Q in C,

$$= P.AB + Q.AC,$$
$$= P.AG + P.GB + Q.AG - Q.CG,$$
$$= (P+Q).AG + P.GB - \frac{Q.P.GB}{Q},$$
$$= (P+Q)\,AG.$$

Die Summe jener Momente ist also gleich dem Momente der in G wirkenden Summe der Kräfte P, Q.

Wäre außer diesen in F eine Kraft = U angebracht: so ist die Summe der Momente der drei Kräfte P, Q, U,

in Beziehung auf A $= AB \,.\, P + AC \,.\, Q - AF \,.\, U$
$= AG \,.\, (P+Q) - AF \,.\, U.$
Soll dieses Moment $= 0$ sein, wie der Lehrsatz verlangt, so ist $AF = \frac{AG \,.\, (P+Q)}{U}$, und wenn man irgend einen andern Punct E des Hebels unterstützt: so ist die Summe der Momente $= P \,.\, EB + Q \,.\, EC - U \,.\, EF$, eben so groß als das Moment einer in A angebrachten Kraft $= P+Q+U$, in Beziehung auf E. Für $P \,.\, EB + Q \,.\, EC$ ist schon erwiesen, daß es $= EG \,.\, (P+Q)$ sei; das ist $=(P+Q)\,(EA+AG)$ und $U \,.\, EF$ ist $= U \,.\, (FA - EA)$, also $P \,.\, EB + Q \,.\, EC - U \,.\, EF = (P+Q+U)\, EA + (P+Q) \,.\, AG - U \,.\, FA$, also da $U \,.\, FA = (P+Q)\, AG$; diese Summe $= (P+Q+U) \,.\, EA$.

Diese Gleichheit der Momente der in B, C, F einzeln wirkenden Kräfte mit der in A angebrachten Summe, zeigt eine völlig gleiche Wirkung an, da eine Kraft $= x$, in der Entfernung $= y$ wirkend, sowohl den einzelnen als den so in eine Summe verbundenen und in A angebrachten Kräften das Gleichgewicht hält, wenn ihr Moment $x \,.\, y$ dem Momente jener gleich ist.

Aber auch für eine Kraft $= P+Q$ in G und eine Kraft $= S$ nach entgegengesetzter Richtung in D wirkend, gilt unser Satz. Dann, soll in A eine Kraft $= S - P - Q$ jenen das Gleichgewicht halten, so muß $(S - P - Q) \,.\, AD = (P+Q) \,.\, GD$ sein, oder $S \,.\, AD = AG\,(P+Q)$. Aber in Beziehung auf irgend einen andern Punct E, wenn dieser der Drehungspunct wäre, ist der in A wirkenden Kraft $= S - P - Q$, Moment $= EA \,.\, (S - P - Q)$, die Summe der einzelnen Momente $+ S$ in D und $- (P+Q)$ in G, ist $= ED \,.\, S - EG \,.\, (P+Q)$.
$= \div EA \,.\, (P+Q) \div AG\,(P+Q) + EA \,.\, S + AD \,.\, S$,
$= EA\,(S - P - Q)$.

Es ist leicht zu übersehen, daß diese Gleichheit der Momente für jeden Unterstützungspunct, und für jede

Anzahl parallel wirkender, gegen den Hebel senkrechten Kräfte statt findet.

§. 95. Erklärung. Dieser Punct, in welchem die Summe der parallel wirkenden Kräfte angebracht werden muß, um eben das zu bewirken, was alle zugleich, jede an ihrem bestimmten Angriffspuncte ausrichten, heißt der Mittelpunct der Kräfte.

§. 96. Bemerkung. Wenn eine Ebne in einem Puncte so festgehalten wird, daß sie sich um diesen frei drehen kann: so wird, wenn die Richtungen der wirkenden Kräfte in die Ebne selbst fallen, die Ebne sich nur so bewegen können, daß jeder ihrer Puncte immerfort in derselben geometrischen Ebne bleibt. Dieser Fall ist es, zu dessen Betrachtung wir jetzt übergehen.

§. 97. Lehrsatz. Wenn die Ebne BAC sich um den festgehaltenen Punct A frei drehen kann, und durch zwei Kräfte P in B nach der Richtung BD, und Q in C nach der Richtung CE, zur Bewegung angetrieben wird: so besteht das Gleichgewicht, wofern die Richtungen der Kräfte in der Ebne selbst liegen, wenn die Kräfte die Ebne nach entgegengesetzten Seiten zu drehen streben, und zugleich sich umgekehrt verhalten, wie die von A aus gegen ihre Richtungslinien gezogenen Senkrechten AH, AI (Fig. 35.).

Beweis. Man ziehe durch den Punct A in willkürlicher Richtung eine, die Richtungslinien BD, CE schneidende grade Linie FG. Schneidet sie die Richtungslinien der Kräfte in F und in G: so darf man (§. 23.) diese Kräfte als in den Puncten F und G nach ihren Richtungen FD, GE wirkend betrachten. Zerlegt man nun die nach FD wirkende Kraft = P in eine Seitenkraft nach der Richtung von FG, und in eine auf diese senkrechte Richtung: so kann nur die letztere die Drehung um A bestimmen, indem die erstere bloß einen Druck auf A ausübt. Dasselbe gilt für die Zerlegung der Kraft Q, welche nach GE wirkt. Die auf FG senkrechten Kräfte sind, = P . Sin AFD, in F, und = Q . Sin AGE,

in G; ihre Momente sind = P . AF . Sin AFD, und = Q . AG . Sin AGE.

Diese Momente müssen gleich sein, wofern keine Drehung erfolgen soll, indem hier alles wie am Hebel ist, und die übrigen Theile der Ebne, welche wir noch immer als nicht schwer betrachten, die Bewegung weder hindern noch befördern.

Zieht man nun von A aus die Linien AH, AI senkrecht auf die Richtungslinien der Kräfte: so ist AH = AF . Sin AFB = AF . Sin AFD; und

AI = AG . Sin AGC = AG . Sin AGE.

Die Gleichheit der Momente fordert also, daß P . AH = Q . AI, oder P : Q = AI : AH sei, und das Gleichgewicht besteht, wenn dieses Verhältniß statt findet, und zugleich die Drehungen, welche die Kräfte zu bewirken streben, nach entgegengesetzten Richtungen gehen.

§. 98. Nennt man hier das Product aus der Kraft in den senkrechten Abstand des Drehungspunctes von der Richtung der Kraft, ihr **Moment**, und betrachtet man die Momente derjenigen Kräfte, welche eine entgegengesetzte Drehung zu bewirken streben, als entgegengesetzt, so gilt es auch hier, daß das Gleichgewicht besteht, wenn die Summe der Momente = 0 ist.

§. 99. Es erhellt, daß eben dieses Gesetz für die Summe der Momente noch gilt, wenn auch mehrere Kräfte nach Richtungen wirken, welche in der Ebne selbst liegen.

§. 100. **Lehrsatz.** Wenn die Kräfte P, Q, nach Richtungen BD, CE (Fig. 35.), die in der Ebne BAC selbst liegen, wirken: so ist, bei bestehendem Gleichgewichte, der Druck, welchen der unterstützte Punct A leidet, eben so groß, als er sein würde, wenn die Kräfte P nach AK, Q nach AL, nach Richtungen ihren wahren Richtungen parallel an A selbst angebracht wären.

Beweis. Wir finden Größe und Richtung des Druckes auf A ganz gleich, wir mögen ihn nach den Gesetzen der am Hebel wirkenden Kräfte unmittelbar aus

Dritter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte am Hebel und an der um einen unterstützten Punct beweglichen Ebne.

§. 80. Erklärung. Eine grade, unbiegsame Linie welche in einem Puncte so unterstützt ist, daß sie sich um diesen frei drehen, der Punct aber nicht verrückt werden kann, heißt ein gradlinigter Hebel, und zwar ein zweiarmiger Hebel, wenn an beiden Seiten, ein einarmiger Hebel, wenn nur an einer Seite des unterstützten Punctes Kräfte auf ihn wirken.

§. 81. Erklärung. Ueberhaupt heißt jede grade, krumme oder aus graden Theilen zusammengesetzte Linie ein Hebel, wenn sie unbiegsam ist, und sich um einen fest unterstützten Punct frei drehen kann. Nach Verschiedenheit der Gestalt heißt der Hebel dann ein Winkelhebel u. s. w.

§. 82. Wir betrachten hier den Hebel, als ob er selbst ohne Schwere wäre.

§. 83. Erklärung. Der festgehaltene Punct des Hebels heißt der Ruhepunct oder Drehungspunct; er ruhet auf der festen Unterlage, die man als unverrückbar annimmt.

§. 84. Lehrsatz. Am graden zweiarmigen Hebel sind zwei senkrecht auf ihn und nach parallelen Richtungen wirkende Kräfte im Gleichgewichte, wenn sie sich umgekehrt verhalten, wie die Entfernungen der Puncte, auf welche sie wirken, vom Ruhepuncte.

Beweis. Es sei (Fig. 29.) BC der in A unterstützte Hebel. Die in B und C parallel unter sich und

senkrecht auf AC wirkenden Kräfte stelle man durch die ihnen proportionalen Linien CD, BE dar, und setze das Verhältniß der Kräfte CD : BE = AB : AC voraus.

Die Kraft CD kann angesehen werden, als eine aus Seitenkräften CF, CG entspringende Mittelkraft. Man nehme die Richtung von CF in der verlängerten Richtung des Hebels selbst, und die Kraft = CF von willkürlicher Größe: so ist zugleich die Richtung und Größe der andern Seitenkraft CG bestimmt (§. 34. 66.). Eben so kann BE angesehen werden als Mittelkraft aus den Seitenkräften BH = CF, nach der verlängerten Richtung des Hebels der CF grade entgegen wirkend, und aus BI, deren Richtung und Größe nun auch bestimmt ist.

Die Kräfte CF, BH heben einander auf und könnten folglich (§. 10.) ganz fehlen. Die Wirkung der Kräfte CG, BI wird eben dieselbe sein, als ob sie in ihrem Durchschnittspuncte K wirkten (§. 23.) und die ganze Ebne BACK um die Unterlage A zu drehen strebten. Dieser Durchschnittspunct K liegt in der durch A auf BC gezogenen Senkrechten; denn wenn man von K eine Senkrechte auf BC zieht, und nähme an, daß diese die BC nicht in A, sondern in A″ schnitte: so ist doch das Dreieck CA″K ∽ FCD, und BA″K ∽ HBE, also

$$HB : BE = BA'' : A''K,$$

$$CD : CF = A''K : A''C,$$

das ist, da BH = CF,

$$CD : BE = BA'' . A''C,$$

und auch, zu Folge der Voraussetzung

$CD : BE = BA : AC$; es fällt also A″ mit A zusammen.

Wirkten in K die Kräfte KL = CG, KM = BI, so wäre offenbar die Mittelkraft = KO + NO = CD + BE, nach der verlängerten Richtung AK. Denn, wenn man KO parallel mit CD und LO parallel mit GD nimmt: so ist das Dreieck LKO ≅ GCD, also bei O rechtwinklicht; zieht man nun LN parallel mit KM und nimmt

LN = KM, so ist OLN $\cong$ BHE, weil LO = CF = HI
LN = H[illegible]L = H, also O ein rechter Winkel, al
KN = CD + BE, eine mit CD parallele grade Linie.

Die gesammte Wirkung der Kräfte CD, BE od
der ihnen gleich geltenden CF, KL und BH, KM ist al
die, den Punct A nach der Richtung AK zu drücke
mit einer Kraft = BE + CD; da nun dieser Punct
unterstützt ist: so besteht das Gleichgewicht.

Anmerkung. Kästners Beweis der Lehre vom Heb hat zwar eine etwas mehr elementarische Form; ab man nimmt bei ihr gleichsam als von selbst erhellend a daß A den ganzen Druck = CD + BE leide. Auch wi die Herleitung des Parallelogramms der Kräfte nicht oh Schwierigkeit zu Stande gebracht. Aus diesem Grun habe ich eine andre Darstellung, die im Wesentlichen m Eytelwein übereinstimmt, gewählt. Doch verdien Kästners Beweisart, so wie Karsten sie in seine Lehrbegriffes 3ten Bande mittheilt, nachgelesen z werden.

§. 86. Man kann hieraus leicht herleiten, daß da Gleichgewicht nicht besteht, wenn die Kräfte sich nich umgekehrt wie die Entfernungen vom Ruhepuncte ver halten. Wendet man genau dieselben Schlüsse an: s sieht man, daß das Perpendikel aus K nicht mehr in A sondern zwischen A und C trifft, wenn $AC > \frac{AB \cdot BE}{CD}$ ist. Es ist also dann grade so, als ob eine einzige Kraf = CD + BE in einem nicht unterstützten Puncte A senkrecht auf den Hebel wirkte, und in diesem Falle muß nothwendig ein Drehen des Hebels um A erfolgen.

§. 87. Wenn CD : BE = AB : AC ist: so könnt statt der Unterlage eine in A senkrecht auf BC, nach AI wirkende Kraft = BE + CD angebracht sein, und die würde hinreichen, um das Gleichgewicht zu erhalte Wäre alsdann in C eine Unterstützung, welche den Pun C fest hielte, ohne die freie Drehung um C zu hinder so wäre am einarmigen Hebel die Kraft = BE i der Entfernung = CB vom Ruhepuncte, und die Kra

$= CD + BE = \frac{AB . BE}{AC} + BE = \frac{BC . BE}{AC}$ in der Entfernung $= AC$ vom Ruhepuncte im Gleichgewichte, wenn sie senkrecht auf den Hebel, parallel unter sich und nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es gilt also auch hier folgender

Lehrsatz. Das Gleichgewicht findet auch beim einarmigen Hebel statt, wenn die Kräfte sich umgekehrt, wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten, und kann im entgegengesetzten Falle nicht statt finden.

§. 88. Die Proportion, daß die Kräfte sich umgekehrt wie die Entfernungen vom Ruhepuncte verhalten müssen; also, wenn ich (Fig. 29.) die an B wirkende Kraft $= P$, die an C wirkende $= Q$ nenne, $P : Q = AC : AB$ sein muß, führt zu der Gleichheit der Producte

$$P . AB = Q . AC,$$

wo wir uns statt der Linien und Kräfte unbenannte Zahlen denken müssen.

§. 89. Erklärung. Man nennt dieses richtig verstandene Product einer jeden senkrecht auf den Hebel wirkenden Kraft in ihre Entfernung vom Ruhepuncte das Moment der Kraft.

§. 90. Nach dem strengen analytischen Begriffe von positiven und negativen Größen sollten wir hier diejenigen Kräfte positiv nennen, welche nach der einen Richtung, und die negativ, welche nach der entgegengesetzten Richtung wirken. Und eben so sollten die von A an gerechneten Entfernungen nach der einen Seite positiv, nach der andern negativ genannt werden.

Am zweiarmigen Hebel (Fig. 30.) sind also beide Kräfte positiv, aber die eine Entfernung ist hier als negativ zu betrachten; bei dem einarmigen Hebel hingegen (Fig. 31.) ist die an B wirkende Kraft P negativ, wenn die an C angebrachte Kraft Q positiv ist, die Entfernungen aber liegen beide nach einerley Richtung und sind also als positiv anzusehen.

§. 91. Diesem zu Folge ist am zweiarmigen Hebel (Fig. 30.) das Moment der Kraft $P = P . AB$; das Moment der Kraft Q, $= - Q . AC$, also die Summe der Momente $= P . AB - Q . AC = 0$.

Am einarmigen Hebel ist (Fig. 31.)
das Moment der Kraft P, $= - AB . P$.
das Moment der Kraft Q, $= Q . AC$,
also wieder die Summe der Momente $= Q . AC - P . AB = 0$. Beim Gleichgewichte der Kräfte am Hebel ist also die Summe ihrer Momente $= 0$.

Wir werden diese Rücksicht auf das Positive und Negative strenge im Auge behalten.

§. 92. **Aufgabe.** An der graden unbiegsamen Linie, welche in zwei Puncten B, C, unterstützt ist (Fig. 32.), wirkt senkrecht auf sie in A eine Kraft $= R$; man sucht den Druck, welchen die Puncte B und C leiden.

Auflösung. Der Druck in B heiße $= P$, der Druck in C, $= Q$, und man betrachte diesen Druck als positiv, wenn seine Richtung mit der Richtung der Kraft R übereinstimmt: so ist allgemein

$$P = \frac{R . AC}{BC} \text{ und } Q = \frac{R . AB}{BC}.$$

Beweis. Erster Fall. Es sei die grade Linie oder der Hebel in zwei Puncten unterstützt, die an verschiedenen Seiten von A liegen (Fig. 32.), dann würde offenbar das Gleichgewicht bestehen, wenn an B eine Kraft $= P$, und an C eine Kraft $= Q$ nach einer Richtung der Richtung der R parallel und entgegengesetzt wirkte, und zugleich $P + Q = R$ und $P . AB = Q . AC$ wäre (§. 84.). Aus diesen beiden Gleichungen aber folgt $(R - Q) . AB = Q . AC$; also

$$Q = \frac{R . AB}{AB + AC} = \frac{R . AB}{BC}, \text{ und folglich}$$

$$P = \frac{R . AC}{BC}.$$

Zweiter Fall. Wenn die unterstützten Puncte

beide an derselben Seite von A liegen, dann müßte in B (Fig. 33.) eine Kraft P nach einer Richtung der Richtung der R parallel und entgegengesetzt, in C eine Kraft $= Q$ nach übereinstimmender Richtung mit R wirken; und es müßte $P = Q + R$,

$Q.BC = R.AB$, sein (§. 87.),

also $Q = \frac{R.AB}{BC}$; $P = \frac{R.AC}{BC}$.

§. 93. Um sogleich das richtige Zeichen für den Druck zu erhalten, wollen wir (Fig. 33.) A als Drehepunct betrachten, also $P.AB$ und $Q.AC$ als Momente der Kräfte P und Q in Beziehung auf A. Diese Momente sind beide positiv, wenn die Kräfte nach einerley Richtung wirken. Es ist aber zum Gleichgewichte erforderlich, daß die Summe aller Kräfte am Hebel $= 0$, und die Summe aller Momente $= 0$ sei (§. 91.), also hier

$P + Q + R = 0$, und

$P.AB + Q.AC = 0$, weil R in der Entfernung $= 0$ das Moment $= 0$ hat.

Daraus ergiebt sich, da $Q = - P - R$ ist,

$P.AB = + P.AC + R.AC = - Q.AC$,

oder $P.(AB - AC) = R.AC$;

$$P = \frac{R.AC}{AB - AC};$$

und $Q = \frac{R.AB}{AC - AB}$.

Hier wird nun erstlich P positiv, wenn $AB > AC$ und zugleich AC positiv ist, und es wird dann Q negativ, wofern auch AB positiv ist, das heißt: liegen beide Unterlagen an derselben Seite von A, so übt die entferntere einen Druck aus nach der mit der Richtung der R übereinstimmenden Richtung, die nähere aber einen Druck nach entgegengesetzter Richtung, und der Druck, den jede leidet, ist entgegengesetzt dem Drucke, welchen sie ausübt.

Zweitens. Es wird P und auch Q negativ, wenn

unterstützt werden müßte, damit alle auf OE senkrechten Kräfte sich im Gleichgewichte erhielten. Dieser Punct ist einer von denen, welche man unterstützen kann, um das Gleichgewicht zu erhalten.

Beweis und Erläuterung. Die Richtigkeit der Auflösung erhellt, wofern alle Richtungslinien die Linie OE schneiden (aus §. 97.). Würde OE nicht von allen Richtungslinien geschnitten, so wählte man statt dieser, an sich willkürlichen Linie, besser eine andre, die von allen geschnitten würde.

Auffallend kann es vielleicht scheinen, daß wir den verlangten Ruhepunct in jeder dieser Linien OE finden können; aber es läßt sich wohl übersehen, daß es eine ganze Reihe von Puncten giebt, die jeder allein unterstützt das Gleichgewicht erhalten. Wir haben gesehen (§. 100.) daß die Wirkung zweier Kräfte Q nach CH und R nach DI, völlig aufgehoben wird, wenn ein Punct der Ebne unterstützt wird, der in der mittleren Richtung NR der Kräfte, wenn man sich diese als im Durchschnittspuncte N ihrer Richtungen angebracht vorstellt, liegt; und daß ein solcher Punct R eben den Druck leidet, als ob Q in N nach der Richtung NH, R in N nach der Richtung NI wirkte, oder eben den Druck, als ob die aus ihnen entstehende Mittelkraft = S, nach NS an dem Puncte N selbst angebracht wäre. Trifft nun die verlängerte Richtung NS, RS dieser Mittelkraft die Richtung BG der dritten Kraft P in einem Puncte Q: so ist es eben so gut, als ob jene Mittelkraft = S nach der Richtung QS in Q, und die Kraft P nach QG in Q angebracht wäre. Die aus ihnen entstehende Mittelkraft, welche nach der Richtung QM wirkt, kann daher als die angesehen werden, welche eben das, wie jene Kräfte bewirkt, und jeder Punct, welcher in der Richtungslinie QM liegt, ist geschickt, um festgehalten die Drehung der ganzen Ebne zu hindern, sowohl wenn bloß diese Mittelkraft vorhanden ist, als wenn die Kräfte P, Q, R nach ihren ursprünglichen Richtungen wirken.

§. 109. Man hätte auch jede Kraft in dem Puncte selbst, wo sie angreift, als in Seitenkräfte gegen OE und OF senkrecht zerlegt, sich denken können. Die auf OE senkrechten Kräfte könnte man sich als in den Puncten zum Beispiel T, wo ihre Richtungen die OE treffen, angebracht vorstellen, und den in OE liegenden Mittelpunct dieser Kräfte, welchen ich mit V bezeichne, suchen. Eben so wären die auf OF senkrechten Kräfte so zu betrachten, als ob sie in U und den übrigen Puncten, wo ihre Richtungen die OF treffen, angebracht wären; und man müßte den Mittelpunct W dieser Kräfte suchen. Zieht man dann VX mit OF, WX mit OE parallel: so ist X einer der Puncte, die man unterstützen darf, und auch hier könnte man aus der Richtung des auf X ausgeübten Druckes die Richtungslinie finden, in der alle Puncte liegen, welche sich hier zu Ruhepuncten eignen.

§. 110. Lehrsatz. Wenn in einer um A beweglichen Ebne die Kräfte P, p, π nach Richtungen BD, bd, $\beta\delta$ wirken, die in der Ebne selbst liegen (Fig. 40.), und es wird die ganze Ebne um einen sehr geringen Winkel um A gedreht: so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft, in den ihrer Richtung parallelen Weg, welchen der Punct, auf den sie wirkt, durchläuft, gleich Null, wenn die Kräfte sich in Beziehung auf die Drehung um den unterstützten Punct A im Gleichgewichte erhalten.

Beweis. Es sei der Drehungswinkel, den wir als sehr klein voraussetzen, $BAC = bAc = \beta A\gamma = \alpha$: so ist der von dem Puncte B durchlaufene Weg $= \alpha . AB$, und der von B nach der Richtung BD durchlaufene Weg $= BE = - \alpha . AB . \mathrm{Cos}\, CBE$, oder weil bei kleinen Winkeln beinahe Sehne und Bogen gleich, das ist $\alpha = 2 . \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$BE = - 2 . AB . \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}\alpha . \mathrm{Cos}\, CBE .$$
$$= - 2 . AB . \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2}\alpha\, \mathrm{Cos}(ABE - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha))$$
weil $ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

oder $BE = - 2\, AB . \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha . \mathrm{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2}\alpha)$.

unterstützt werden müßte, damit alle auf OE senkrechten Kräfte sich im Gleichgewichte erhielten. Dieser Punct ist einer von denen, welche man unterstützen kann, um das Gleichgewicht zu erhalten.

Beweis und Erläuterung. Die Richtigkeit der Auflösung erhellt, wofern alle Richtungslinien die Linie OE schneiden (aus §. 97.). Würde OE nicht von allen Richtungslinien geschnitten, so wählte man statt dieser, an sich willkürlichen Linie, besser eine andre, die von allen geschnitten würde.

Auffallend kann es vielleicht scheinen, daß wir den verlangten Ruhepunct in jeder dieser Linien OE finden können; aber es läßt sich wohl übersehen, daß es eine ganze Reihe von Puncten giebt, die jeder allein unterstützt das Gleichgewicht erhalten. Wir haben gesehen (§. 100.) daß die Wirkung zweier Kräfte Q nach CH und R nach DI, völlig aufgehoben wird, wenn ein Punct der Ebne unterstützt wird, der in der mittleren Richtung NR der Kräfte, wenn man sich diese als im Durchschnittspuncte N ihrer Richtungen angebracht vorstellt, liegt; und daß ein solcher Punct R eben den Druck leidet, als ob Q in N nach der Richtung NH, R in N nach der Richtung NI wirkte, oder eben den Druck, als ob die aus ihnen entstehende Mittelkraft = S, nach NS an dem Puncte N selbst angebracht wäre. Trifft nun die verlängerte Richtung NS, RS dieser Mittelkraft die Richtung BG der dritten Kraft P in einem Puncte Q: so ist es eben so gut, als ob jene Mittelkraft = S nach der Richtung QS in Q, und die Kraft P nach QG in Q angebracht wäre. Die aus ihnen entstehende Mittelkraft, welche nach der Richtung QM wirkt, kann daher als die angesehen werden, welche eben das, wie jene Kräfte bewirkt, und jeder Punct, welcher in der Richtungslinie QM liegt, ist geschickt, um festgehalten die Drehung der ganzen Ebne zu hindern, sowohl wenn bloß diese Mittelkraft vorhanden ist, als wenn die Kräfte P, Q, R nach ihren ursprünglichen Richtungen wirken.

§. 109. Man hätte auch jede Kraft in dem Puncte selbst, wo sie angreift, als in Seitenkräfte gegen OE und OF senkrecht zerlegt, sich denken können. Die auf OE senkrechten Kräfte könnte man sich als in den Puncten zum Beispiel T, wo ihre Richtungen die OE treffen, angebracht vorstellen, und den in OE liegenden Mittelpunct dieser Kräfte, welchen ich mit V bezeichne, suchen. Eben so wären die auf OF senkrechten Kräfte so zu betrachten, als ob sie in U und den übrigen Puncten, wo ihre Richtungen die OF treffen, angebracht wären; und man müßte den Mittelpunct W dieser Kräfte suchen. Zieht man dann VX mit OF, WX mit OE parallel: so ist X einer der Puncte, die man unterstützen darf, und auch hier könnte man aus der Richtung des auf X ausgeübten Druckes die Richtungslinie finden, in der alle Puncte liegen, welche sich hier zu Ruhepuncten eignen.

§. 110. Lehrsatz. Wenn in einer um A beweglichen Ebne die Kräfte P, p, π nach Richtungen BD, bd, $\beta\delta$ wirken, die in der Ebne selbst liegen (Fig. 40.), und es wird die ganze Ebne um einen sehr geringen Winkel um A gedreht: so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft, in den ihrer Richtung parallelen Weg, welchen der Punct, auf den sie wirkt, durchläuft, gleich Null, wenn die Kräfte sich in Beziehung auf die Drehung um den unterstützten Punct A im Gleichgewichte erhalten.

Beweis. Es sei der Drehungswinkel, den wir als sehr klein voraussetzen, $BAC = bAc = \beta A\gamma = \alpha$: so ist der von dem Puncte B durchlaufene Weg $= \alpha . AB$, und der von B nach der Richtung BD durchlaufene Weg $= BE = - \alpha . AB . \mathrm{Cos}\, CBE$, oder weil bei kleinen Winkeln beinahe Sehne und Bogen gleich, das ist $\alpha = 2 . \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} \alpha$ ist,

$$BE = - 2 . AB . \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2} \alpha . \mathrm{Cos}\, CBE .$$

$$= - 2 . AB . \mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2} \alpha\ \mathrm{Cos}(ABE - (90^\circ - \tfrac{1}{2} \alpha))$$

weil $ABC = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha$,

oder $BE = - 2\ AB . \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} \alpha . \mathrm{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2} \alpha)$.

Eben so ist $be = 2 . Ab . \text{Sin} \frac{1}{2} \alpha . \text{Sin} (Abe + \frac{1}{2} \alpha)$,
$\beta\varepsilon = - 2 . A\beta . \text{Sin} \frac{1}{2} \alpha . \text{Sin} (A\beta\varepsilon + \frac{1}{2} \alpha)$,
also die Summe der Producte aus jeder Kraft in den ihrer Richtung parallelen Weg

$$= 2 . \text{Sin} \tfrac{1}{2} \alpha . \begin{pmatrix} - P . AB . \text{Sin} (ABE + \frac{1}{2} \alpha) \\ + p . Ab . \text{Sin} (Abe + \frac{1}{2} \alpha) \\ - \pi . A\beta . \text{Sin} (A\beta\varepsilon + \frac{1}{2} \alpha) \end{pmatrix}$$

Nimmt man hier α so klein an, daß man $\text{Sin} (ABE + \frac{1}{2} \alpha)$ mit Sin ABE verwechseln und bei den übrigen Winkeln eben so verfahren darf: so ist der eingeschlossene Factor $= -P . AB . \text{Sin}\, ABE + p . Ab . \text{Sin}\, Abe + \pi . A\beta . \text{Sin}\, A\beta\varepsilon$, und dieses ist die Summe der Momente aller Kräfte, welche beim Gleichgewichte $= 0$ ist.

§. 111. Das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten findet also auch hier statt, wenn man eine so sehr kleine Drehung, oder α überaus klein, annimmt. Und diese Voraussetzung ist hier erlaubt, da beim Gleichgewichte gar keine Drehung erfolgt, sondern die Wirkung, welche die eine Kraft hervorzubringen strebt, von der übrigen schon, ehe sie erfolgt, aufgehoben wird.

Man kann beim Hebel, wenn zwei parallel wirkende Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten, dieses Gesetz so ausdrücken, daß die Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die Wege, welche die Puncte, auf den sie wirken, bei einer kleinen Drehung des Hebels durchlaufen würden. Hieraus erklärt es sich, wie eine kleine Kraft einer großen das Gleichgewicht halten kann; denn die geringste, durch jene bewirkte Verrückung würde den von der kleinen Kraft festgehaltenen Punct durch einen sehr erheblichen Weg fortbewegen, und es ist offenbar, daß eine so starke Fortrückung nicht mit der Intensität der Kraft bewirkt wird, als jene von derselben Kraft hervorgebrachte geringere Verrückung; ihr wird also hier durch eine Kraft von geringerer Intensität hinreichend widerstanden.

Durch ähnliche Ueberlegungen ließe sich auch in andern Fällen das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten begreiflicher machen.

Vierter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf verschiedene Puncte eines Körpers nach Richtungen wirken, die nicht in einer Ebne liegen.

§. 112. Erklärung. Wenn zwei Puncte eines festen Körpers unverrückt festgehalten werden, so daß der Körper sich um die zwischen ihnen gezogene grade Linie frei drehen kann: so heißt diese grade Linie seine Axe oder Umdrehungsaxe.

§. 113. Lehrsatz. Wenn eine feste Ebne (Fig. 41.) sich um die Axe EF, die hinreichend unterstützt ist, frei drehen kann; so besteht das Gleichgewicht, wenn für alle auf die Ebne wirkenden Kräfte die Summe der Producte einer jeden Kraft in die senkrechte Entfernung des Punctes, wo sie wirkt, von der Axe, und in den Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtungslinie gegen die Ebne verschwindet.

Beweis. Es sei (Fig. 41.) ABCD die um die Axe EF bewegliche Ebne. Wirken nun in G und H Kräfte nach den Richtungen GI, HK; so ziehe man in der Ebne selbst GL, HM auf EF senkrecht. Legt man nun durch die Richtungen GI, HK der Kräfte Ebnen auf die bewegliche Ebne ABCD senkrecht: so werden sie diese irgendwo in GN, HO schneiden, und IGN, KHO sind die Neigungswinkel der Richtungslinien gegen die bewegliche Ebne.

Hier läßt sich nun offenbar die nach GI wirkende

Eben so ist $be = 2 \,.\, Ab \,.\, \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha \,.\, \text{Sin}\,(Abe + \frac{1}{2}\alpha)$,

$\beta\varepsilon = -2 \,.\, A\beta \,.\, \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha \,.\, \text{Sin}\,(A\beta\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha)$;

also die Summe der Producte aus jeder Kraft in den ihrer Richtung parallelen Weg

$$= 2 \,.\, \text{Sin}\, \frac{1}{2}\alpha \,.\, \begin{pmatrix} -P \,.\, AB \,.\, \text{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2}\alpha) \\ +p \,.\, Ab \,.\, \text{Sin}\,(Abe + \frac{1}{2}\alpha) \\ -\pi \,.\, A\beta \,.\, \text{Sin}\,(A\beta\varepsilon + \frac{1}{2}\alpha) \end{pmatrix}$$

Nimmt man hier α so klein an, daß man $\text{Sin}\,(ABE + \frac{1}{2}\alpha)$ mit Sin ABE verwechseln und bei den übrigen Winkeln eben so verfahren darf: so ist der eingeschlossene Factor $= -P \,.\, AB \,.\, \text{Sin}\, ABE + p \,.\, Ab \,.\, \text{Sin}\, Abe + \pi \,.\, A\beta \,.\, \text{Sin}\, A\beta\varepsilon$, und dieses ist die Summe der Momente aller Kräfte, welche beim Gleichgewichte $= 0$ ist.

§. 111. Das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten findet also auch hier statt, wenn man eine so sehr kleine Drehung, oder α überaus klein, annimmt. Und diese Voraussetzung ist hier erlaubt, da beim Gleichgewichte gar keine Drehung erfolgt, sondern die Wirkung, welche die eine Kraft hervorzubringen strebt, von der übrigen schon, ehe sie erfolgt, aufgehoben wird.

Man kann beim Hebel, wenn zwei parallel wirkende Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten, dieses Gesetz so ausdrücken, daß die Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die Wege, welche die Puncte, auf den sie wirken, bei einer kleinen Drehung des Hebels durchlaufen würden. Hieraus erklärt es sich, wie eine kleine Kraft einer großen das Gleichgewicht halten kann; denn die geringste, durch jene bewirkte Verrückung würde den von der kleinen Kraft festgehaltenen Punct durch einen sehr erheblichen Weg fortbewegen, und es ist offenbar, daß eine so starke Fortrückung nicht mit der Intensität der Kraft bewirkt wird, als jene von derselben Kraft hervorgebrachte geringere Verrückung; ihr wird also hier durch eine Kraft von geringerer Intensität hinreichend widerstanden.

Durch ähnliche Ueberlegungen ließe sich auch in andern Fällen das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten begreiflicher machen.

Vierter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf verschiedene Puncte eines Körpers nach Richtungen wirken, die nicht in einer Ebne liegen.

§. 112. Erklärung. Wenn zwei Puncte eines festen Körpers unverrückt festgehalten werden, so daß der Körper sich um die zwischen ihnen gezogene grade Linie frei drehen kann: so heißt diese grade Linie seine Axe oder Umdrehungsaxe.

§. 113. Lehrsatz. Wenn eine feste Ebne (Fig. 41.) sich um die Axe EF, die hinreichend unterstützt ist, frei drehen kann: so besteht das Gleichgewicht, wenn für alle auf die Ebne wirkenden Kräfte die Summe der Producte einer jeden Kraft in die senkrechte Entfernung des Punctes, wo sie wirkt, von der Axe, und in den Sinus des Neigungswinkels ihrer Richtungslinie gegen die Ebne verschwindet.

Beweis. Es sei (Fig. 41.) ABCD die um die Axe EF bewegliche Ebne. Wirken nun in G und H Kräfte nach den Richtungen GI, HK: so ziehe man in der Ebne selbst GL, HM auf EF senkrecht. Legt man nun durch die Richtungen GI, HK der Kräfte Ebnen auf die bewegliche Ebne ABCD senkrecht: so werden sie diese irgendwo in GN, HO schneiden, und IGN, KHO sind die Neigungswinkel der Richtungslinien gegen die bewegliche Ebne.

Hier läßt sich nun offenbar die nach GI wirkende

gesetzten Senkrechten treffen diese (*) in Puncten, welche in einer zu KL parallelen Linie liegen; und da diese Parallele gewiß die GI schneidet, so ist auch unter jenen Senkrechten eine die GI schneidende.

§. 116. Dieser kürzeste Abstand läßt sich berechnen. Es sei IGN die auf ABCD senkrechte durch IG gelegte Ebne, IGN $= \nu$ der Neigungswinkel, der IG gegen ABCD, und NGL $= \mu$ der Winkel, welchen die Durchschnittslinien GN der senkrechten und GL der zu EF parallelen Ebne mit ABCD gegen einander bilden. Ist nun T der Punct, wo das Perpendikel die mit EF parallelen Ebne trifft, und SR der senkrechte Abstand der Parallellinien EF, KL von einander; so ist ST $=$ SR . Sin SRT; SRT aber ist der Ebne IGL Neigungswinkel und (Sphär. Trigon. §. 81.) durch $\text{tang SRT} = \frac{\text{tang } \nu}{\text{Sin } \mu}$ bestimmt.

§. 117. Lehrsatz. Wenn die Ebne ABCD sich um EF frei drehen kann (Fig. 42.), so ist das Moment (§. 114.) einer jeden Kraft in Beziehung auf diese Axe, gleich dieser Kraft multiplicirt in den kleinsten Abstand ihrer Richtungslinie von der Axe, und multiplicirt in den Sinus des Winkels, welchen die Richtungslinie mit der der Axe parallel gezogenen Linie KL macht.

Beweis. Ich nehme die Figur so wie §. 115, und GI ist die Richtung der Kraft $=$ P. Das Moment der Kraft war nach den vorigen Bestimmungen $=$ P . Sin . IGN . GM $=$ P . SR . Sin ν. In dem körperlichen Dreiecke an G ist der Winkel IGN $= \nu$ die eine Cathete und TGR die Hypotenuse, TRS ist der Neigungswinkel, welcher jener Cathete gegenübersteht. Daher (Sphär.

(*) Dieses läßt sich aus Geom. §. 384. ableiten. Es erhellt aber auch daraus, weil die Senkrechten gleich und parallel sind, also die Verbindungslinien ihrer Endpuncte parallel zu EF, parallel zu KL werden.

Trig. §. 77.) $\text{Sin TGR} = \frac{\text{Sin } \nu}{\text{Sin TRS}} = \text{Cos GTR}.$
Denkt man sich die Kraft P nach Richtungen mit KL parallel und auf KL senkrecht zerlegt, so wirkt die letztere Kraft mit TR parallel und ist $= \text{P . Cos GTR}$ $= \frac{\text{P . Sin } \nu}{\text{Sin SRT}}$. Diese in den senkrechten Abstand ST $= \text{SR . Sin SRT}$ von der Axe, multiplicirt, ist offenbar das zur Drehung wirkende Moment $= \text{P . SR . Sin } \nu$; oder in Fig. 41. $= \text{P . GL . Sin } \nu$, wie §. 113.

§. 118. Man findet also das Moment der Kraft P, wenn man sie zerlegt nach einer mit EF parallelen Richtung, und nach einer in der Ebne KGI liegenden, auf KL senkrechten Richtung, und wenn man die letztere mit dem kleinsten Abstande der Richtungslinie von der Axe multiplicirt.

§. 119. Aufgabe. Wenn die Ebne ABCD bloß in den Puncten E und F (Fig. 43.) festgehalten wird, den Druck zu finden, welchen diese Puncte leiden, wenn eine Kraft = P, deren Richtung in der Ebne selbst liegt, die Ebne zu verrücken strebt.

Auflösung. Die festgehaltenen Puncte EF leiden eben den Druck, welchen sie leiden würden, wenn die Kraft P unmittelbar an L, wo die Richtungslinie HG die festgehaltene Axe EF schneidet, angebracht wäre. Daher ist der Druck, welchen E und F parallel mit EF leiden, $= \text{P . Cos HLE}$, und der Druck senkrecht auf EF ist in F, $= \frac{\text{P . EL . Sin HLE}}{\text{EF}}$;

in E, $= \frac{\text{P . FL . Sin HLE}}{\text{EF}}$.

Der Beweis erhellt aus §. 23. 63. 92.

§. 120. Man hätte die in G wirkende Kraft = P auch im Puncte G selbst als in zwei Seitenkräfte zerlegt ansehen können, eine $= \text{P . Sin GLE}$ senkrecht auf die Axe, eine $= \text{P . Cos GLE}$ mit ihr parallel. Hier

bringt offenbar die erstere bei M einen ihr gleichen, auf die Axe senkrechten Druck hervor, der in E den Druck $= \frac{FM \cdot P \cdot \text{Sin } GLE}{EF}$ bewirkt (§. 92.).

Die andre würde, wenn F allein festgehalten wird, die Ebne um F zu drehen streben und eine Kraft in E senkrecht auf EF müßte (§. 97.) $= P \cdot \text{Cos } GLE \cdot \frac{GM}{EF}$ sein, um ihr das Gleichgewicht zu halten. Der Punct E leidet also auf EF senkrecht den Druck

$$= \frac{P}{EF} \cdot (GM \cdot \text{Cos } GLE - FM \cdot \text{Sin } GLE)$$

oder, da $GM = GL \cdot \text{Sin } GLE$, und

$$FM = FL + GL \cdot \text{Cos } GLE,$$

den Druck $= \frac{P \cdot FL \cdot \text{Sin } GLE}{EF}$, wie oben.

Auf ähnliche Weise würde man für F rechnen, wenn man E als allein unterstützt ansähe.

§. 121. Aufgabe. Die in den Puncten E, F festgehaltene und um EF frei bewegliche Ebne ABCD, wird von Kräften = P in G, und Q in H, deren Richtungen GI, HK nicht in der Ebne selbst liegen, gedrückt; man sucht den Druck, welchen die unterstützten Puncte E und F leiden, wenn jene Kräfte sich im Gleichgewichte erhalten (Fig. 41.).

Auflösung. Man zerlege beide Kräfte in die auf die Ebne senkrechten Seitenkräfte $= P \cdot \text{Sin } IGN$ und $= Q \cdot \text{Sin } KHO$, und die der Ebne parallelen Seitenkräfte nach den Richtungen GN und HO, in welchen die durch IG, HK gelegten auf ABCD senkrechten Ebnen diese schneiden.

Da das Gleichgewicht bestehen soll, so liegt (§. 113.) der Mittelpunct der auf ABCD senkrechten Kräfte in der Axe in R, und es ist so gut, als ob ihre Summe dort die Axe nach einer auf die Ebne senkrechten Richtung drückte. Die nach GN wirkende Kraft $= P \cdot \text{Cos } IGN$

. 122. Die auf die Ebne senkrechten Kräfte üben
ie Axe eben den Druck aus, als ob sie da, wo die
hren Angriffspuncten gegen die Axe gezognen Senk-
n GL, HM diese treffen, in M und L ihren wah-
Richtungen parallel wirkten. Denn es ist GR : HR
R : MR, und R leidet folglich den Druck = S + T,
ig die Kraft = S in G und T in H, oder die Kraft
in L und T in M wirken, wofern sie nur im Gleich-
hte erhalten werden.

§. 123. Lehrsatz. Wenn die Ebnen ABCD,
F (Fig. 44.) in AD so gegen einander befestigt
daß sie ihre gegenseitige Lage nicht verändern, sich
vereinigt um AD frei drehen können: so halten
te, welche auf eine oder die andre dieser Ebnen wir-
einander im Gleichgewichte, wenn die Summe der
jungsmomente = o ist, das heißt, wenn die Sum-
er Producte aus jeder Kraft in den Sinus ihres
jungswinkels gegen die Ebne auf welche sie wirkt,
in die senkrechte Entfernung ihres Angriffspunctes
der Axe, verschwindet.

Beweis. Es wirke die Kraft = P in H nach der
tung HN auf die eine Ebne unter dem Neigungs-
el NHI = ν. Man lege durch ihre Richtung die
e NHI senkrecht auf jene, und bezeichne mit HIA = μ
Winkel, welchen ihre Durchschnittslinie mit der Axe
ht.

Dann kann man P in zwei Seitenkräfte zerlegen,
= P . Sin ν auf die Ebne ABCD senkrecht, eine
P . Cos ν nach der Richtung HI. Die letztere trägt
nicht zu Erhaltung des Gleichgewichts bei.

Wenn eben so eine Kraft = Q in G nach der Rich-

tung GO unter dem Winkel = n = OGK gegen die Ebne ADEF geneigt wirkt, und es ist OGK die auf ADEF senkrechte Ebne und GKA = m, so ist die auf ADEF senkrechte Kraft = Q . Sin n, die einzige für das Gleichgewicht in Betracht kommende, indem die nach GK wirkende Kraft bloß einen Druck auf die Axe ausübt.

Dieser auf ADEF in G senkrecht wirkenden Kraft = Q . Sin n in der senkrechten Entfernung = GK . Sin m von der Axe, würde eine senkrecht auf die andre Ebne in U wirkende eben so große Kraft = Q . Sin n das Gleichgewicht halten, wenn die von G und von U senkrecht gegen die Axe gezogenen Linien GT = TU wären, und beide die Axe in demselben Puncte T träfen (§. 97.). Eine solche in U angebrachte Kraft = Q . Sin n, welche nach eben der Richtung wie Q die Drehung der Ebne zu bewirken strebte, würde also in Beziehung auf die Drehung ihr gleichgeltend sein. Diese Kraft aber würde von P im Gleichgewichte erhalten, §. 113., wenn Q . Sin n . UF = P . Sin ν . HV und HV auf die Axe senkrecht ist, woraus die Richtigkeit des Lehrsatzes erhellt, der leicht auf mehrere Kräfte angewandt werden könnte.

§. 124. Lehrsatz. Wenn eben die Verbindung der Ebnen, wie vorhin, statt findet, die Kräfte P in H und Q in G aber jede auf ihre Ebne senkrecht wirken: so leidet die Axe, wofern die Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten, eben den Druck, welchen sie litte, wenn P in V und Q in T, jede nämlich in dem Puncte der Axe, wo diese von dem durch den Angriffspunct gezogenen Perpendikel getroffen wird, ihrer wahren Richtung parallel wirkte.

Beweis. Es sei in U die auf ABCD senkrechte Kraft = $\frac{Q . GT}{UT}$, um der Q das Gleichgewicht zu halten, und nach der grade entgegengesetzten Richtung in U

die Kraft $= \frac{P . HV}{UT}$, um P das Gleichgewicht zu halten. Da wir angenommen haben, daß P und Q für sich im Gleichgewichte sind: so werden die in U angebrachten Kräfte einander ganz gleich sein, und sich aufheben. Aber die erstern der an U angebrachten Kräfte bringt, mit Q vereint wirkend, auf den Punct T der Axe, wo nämlich beide Senkrechten GT, UT die Axe treffen, eben den Druck hervor, den dieser Punct leiden würde, wenn dieselben Kräfte dort ihren wahren Richtungen parallel angebracht wären (§. 100.). Die zweite an U wirkende Kraft, zugleich wirkend mit P, welcher sie das Gleichgewicht hält, drückt die Axe eben so, als ob sie in T ihrer wahren Richtung parallel, und P in V ihrer wahren Richtung parallel angebracht wäre (§. 122.). Der Druck der vier Kräfte auf die Axe ist also ganz eben so, als ob Q in T und P in V auf die Axe selbst ihren wahren Richtungen parallel wirkten, indem die Wirkungen der beiden in U angenommenen Kräfte auch in Beziehung auf den Druck gegen die Axe einander ganz aufheben, da es für den Druck so ist, als ob die gleichen Kräfte in grade entgegengesetzten Richtungen auf denselben Punct der Axe drückten.

§. 125. **Aufgabe.** Wenn alles so ist wie §. 123. und die Kräfte einander im Gleichgewichte erhalten; den Druck zu bestimmen, welchen die beiden festgehaltenen Puncte der Axe, zum Beispiel A und D leiden.

Auflösung. Man zerlege P in die auf ABCD senkrechte Kraft $= P . \sin \nu$, und die mit der Ebne parallele, nach HI gerichtete Kraft $= P . \cos \nu$.

Eben so betrachte man Q als entstanden aus einer auf die Ebne ADEF senkrechten Kraft $= Q . \sin n$ und einer ihr parallelen, nach GK gerichteten Kraft $= Q . \cos n$. Man findet nun, da $P . \sin \nu$ und $Q . \sin n$ einander im Gleichgewichte erhalten, ihren Druck auf die Axe, wenn man von den Angriffspuncten H, G, Senkrechte HV, GT gegen die Axe AD zieht,

und $P . Sin\,\nu$ als in V senkrecht auf ABCD, $Q\ Sin\,n$ als in T senkrecht auf ADEF wirkend ansieht (§. 121.). Dann ergiebt sich aus der erstern auf A der Druck $= \frac{VD . P\ Sin\,\nu}{AD}$ senkrecht auf ABCD; aus der zweiten auf A der Druck $= \frac{TD . Q . Sin\,n}{AD}$ senkrecht auf ADEF.

Die nach HI gerichtete Seitenkraft $= P . Cos\,\nu$ ist anzusehen, als ob sie in I selbst auf die Axe wirkte, und folglich dort einen Druck $= P . Cos\,\nu . Cos\,\mu$ mit der Axe parallel, und einen Druck $= P . Cos\,\nu . Sin\,\mu$ auf sie senkrecht in der Richtung der Ebne ABCD hervorbrächte. Vermöge der erstern leiden die Unterstützungspuncte einen Druck $= P . Cos\,\nu . Cos\,\mu$ nach der Richtung der Axe selbst; vermöge der letztern leidet A den Druck $= \frac{DI}{AD} . P . Cos\,\nu . Sin\,\mu$ mit HV parallel. Eben so findet man aus Q in G den der Axe parallelen Druck $= Q . Cos\,n . Cos\,m$ und den mit GT parallelen Druck auf den Punct A, $= \frac{DK}{AD} . Q . Cos\,n . Sin\,m$.

A leidet also außer dem der Axe parallelen Drucke $= Q . Cos\,n\ Cos\,m + P . Cos\,\nu\ Cos\,\mu$ einen zusammengesetzten Druck, dessen gesammte Größe und Richtung aus

der Kraft $= \frac{P . VD . Sin\,\nu}{AD}$ senkrecht auf AD und AB,

d. Kraft $= \frac{Q . TD . Sin\,n}{AD}$, senkrecht auf AD und AE,

d. Kraft $= \frac{P . DI . Cos\,\nu . Sin\,\mu}{AD}$ parallel mit HV,

d. Kraft $= \frac{Q . DK . Cos\,n . Sin\,m}{AD}$ parallel mit GT hergeleitet werden müßte.

Der Druck auf D läßt sich nach denselben Regeln bestimmen.

§. 126. Aufgabe. Auf einen Körper, welcher sich um die in A und B festgehaltene Axe frei drehen kann (Fig. 45.), wirken in verschiedenen Puncten C, D, E gegebene Kräfte nach bekannten Richtungen; man soll bestimmen, ob das Gleichgewicht bestehen kann, und welchen Druck bei bestehendem Gleichgewichte die unterstützten Puncte leiden.

Erste Auflösung. Man denke sich durch die Axe AB und jeden der Puncte, auf welchen eine der Kräfte wirkt, Ebnen ABC, ABD, ABE gelegt. Dann kann man die in C wirkende Kraft in eine Seitenkraft senkrecht auf die Ebne ABC und in eine mit ihr parallele zerlegen; und eben so kann man mit allen einzelnen Kräften verfahren.

Sollen nun die Kräfte sich in Beziehung auf die Drehung um AB im Gleichgewichte halten: so muß die Summe der Momente der auf die einzelnen Ebnen senkrechten Kräfte = o seyn (§. 123.).

Der Druck auf die Puncte A, B der Axe wird dann nach §. 125. gefunden.

Zweite Auflösung. Man denke sich eine auf die Axe AB senkrechte Ebne; so läßt jede der wirkenden Kräfte sich zerlegen in eine Seitenkraft dieser Ebne parallel, und in eine auf sie senkrecht, das ist mit der Axe parallel. Jene mit der Ebne parallele Kraft läßt sich wieder zerlegen in eine gegen die Axe gerichtete und in eine auf die gegen die Axe gezogene Linie senkrechte Kraft. So zerlegt man jede zum Beispiel auf C wirkende Kraft = P in drei Kräfte,

eine = Q der Axe parallel;
eine = R auf die Axe senkrecht und grade gegen die Axe zu oder von ihr abwärts wirkend;
eine = S in einer auf die Axe senkrechten Ebne senkrecht gegen die nach der Axe zu gezogene Linie.

Die beiden erstern wirken gar nicht auf die Drehung. Wenn also mehrere Kräfte = P, P′, P″ in Puncten

wirken, deren Entfernungen von der Axe $= a, a', a''$ sind, und es entspringen aus ihnen die Kräfte $= Q$, Q', Q'' nach der ersten; R, R', R'' nach der zweiten; S, S', S'' nach der dritten Richtung, so muß die gehörig genommene Summe der Producte $a S + a' S' + a'' S'' = o$, sein, wenn das Gleichgewicht bestehen soll.

Der Druck auf die Axe müßte hier auf ähnliche Art, wie in der vorigen Auflösung bestimmt werden.

Dritte Auflösung. Man nehme wieder die in der vorigen Auflösung erwähnte, auf AB senkrechte Ebne an; ziehe nun aber in derselben zwei auf einander senkrechte Linien. Man zerlege nun (§. 68.) jede Kraft $= P$ in drei, diesen drei Richtungen parallele Seitenkräfte. Die erste $= Q$ wird so wie vorhin sich ergeben, die zweite mag $= U$, die dritte $= V$ heißen, und Q', U', V'; Q'', U'', V'' bei den übrigen Kräften dasselbe bedeuten.

Man kann nun alle unter sich parallel wirkenden Kräfte Q, Q', Q'' sich als im Mittelpuncte dieser Kräfte vereinigt vorstellen. Eben so kann man die Summe der U, U', U'' als in dem Mittelpuncte dieser Kräfte vereinigt betrachten, und auch V, V', V'' sich auf ähnliche Weise vereinigt denken. Soll dann das Gleichgewicht bestehen: so muß die Summe der Momente der aus U, U', U'' und aus V, V', V'' entstehenden Kräfte verschwinden. Der gesammte Druck auf die Axe aber wird bestimmt, wenn man die Lage jener Mittelpuncte der Kräfte gefunden hat, und nach den vorigen Regeln verfährt.

§. 127. Aufgabe. Auf verschiedene Puncte eines ganz freien Körpers wirken Kräfte nach gegebenen Richtungen; zu bestimmen, ob dieser Körper in Ruhe bleibt, oder welcher Kräfte es noch bedarf, um ihn im Gleichgewichte zu erhalten.

Auflösung. Man zerlegt am besten, wie §. 126, dritte Aufl. die Kräfte in drei Seitenkräfte, dreien gegebenen auf einander senkrechten Linien parallel, und sucht

:fte nicht aufheben. Aus eben dem Grunde muß die
mme der nach der zweiten auf jene senkrechte Richtung
:enden Kräfte $= R + R' + R''$, die wir uns im Mit-
uncte dieser Kräfte vereinigt denken, $= 0$ sein; und
: das gilt für die Summe der nach der dritten Rich-
g, senkrecht gegen jene beiden wirkenden Kräfte.

Wären einige dieser Summen oder alle nicht gleich
l: so ergiebt sich aus den Summen der nach jenen
Richtungen wirkenden Kräfte und aus der Lage der
:telpuncte der Kräfte, wie man den Körper unter-
en oder mit Hülfe neu angebrachter Kräfte im Gleich-
ichte erhalten müßte.

§. 128. Im Allgemeinen kann der Mittelpunct der
i der ersteren Richtung wirkenden Kräfte verschieden
von dem der Kräfte nach der zweiten Richtung, und
:r wieder verschieden von dem der Kräfte nach der
ten Richtung. Träfe es sich aber, daß sie alle zu-
men fielen; so brauchte man nur diesen einen Punct
Körpers gehörig zu unterstützen, um den Körper
; in Ruhe zu erhalten.

Da wo sich dieses Zusammenfallen der Mittelpuncte
Kräfte nicht ereignet, ist es nicht möglich, daß der
per durch Unterstützung eines einzigen Punctes in

doch Fälle vor, wo man den Schwerpunct eines Systems von Linien verlangt. Man würde z. B. den Schwerpunct einer Verbindung gleich dicker Balken ganz so suchen, als ob sie grade schwere Linien wären.

§. 135. Lehrsatz. Der Schwerpunct einer graden Linie liegt in ihrer Mitte. Denn die nach beiden Seiten gleich entfernt liegenden Puncte haben gegen jenen gleiche Momente.

§. 136. Lehrsatz. Der Schwerpunct H einer Anzahl $= 2^n$ von Seiten eines regulären Polygons ABCDE wird gefunden, wenn man auf dem die Sehne AE halbirenden Halbmesser FC des um das Polygon gezeichneten Kreises, den Abstand vom Mittelpuncte,

$$FH = \frac{IF \cdot AE}{AB + BC + CD + DE}$$ nimmt, wo FI der Abstand der Polygonseite vom Mittelpuncte ist.

Beweis. Halbirt man die Seiten, so liegt jeder Polygonseite Schwerpunct in ihrer Mitte, wie in I, K. Wegen der Gleichheit der Seiten ist es anzusehen, als ob K, I mit gleichen Gewichten beschwert wären, und der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Seiten CDE liegt in L, wenn KL = LI auf der graden Linie IK genommen ist. Eben so wird M als Schwerpunct der Seiten ABC gefunden, und da L, M von gleichen Gewichten beschwert sind, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct aller vier Seiten auf ML in H, wenn HM = HL ist.

Da nun DNE ∽ ILF und HLF ∽ GCE; so ist

$$FH : FL = GE : CE;$$

und $$FL : FI = CE : CD + DE;$$

weil $CE = 2 \cdot NE$ und $CD + DE = 2 \cdot DE$ ist.

Hieraus folgt $FH : FI = GE : CD + DE$,

oder $$FH : FI = AE : AB + BC + CD + DE.$$

Dieser Beweis läßt sich leicht auf die doppelte Anzahl Seiten und so ferner erweitern.

§. 137. Da dieser Beweis sich für die immerfort verdoppelte Anzahl Seiten führen läßt: so ist vorauszu-

sehen, daß auch des Kreisbogens ABCDE Schwerpunct O gefunden wird, wenn man auf dem seine Sehne halbirenden Halbmesser CF den Abstand FO vom Mittelpuncte $= \frac{FC \,.\, AE}{\text{Bogen } ABCDE}$ nimmt. Es verhält sich nämlich der Abstand des Schwerpunctes vom Centro zum Abstande der Polygonseite vom Centro, wie die Sehne des Polygonbogens zur Summe aller Polygonseiten; folglich beim Kreisbogen, der Abstand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte zum Halbmesser, wie die Sehne des Bogens zur Länge des Bogens.

§. 138. Lehrsatz. Einer Dreiecksfläche ABO (Fig. 48.) Schwerpunct F liegt auf der von dem einen Winkel nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite gezogenen Linie so, daß $DF = \frac{1}{3} AD$ ist.

Beweis. Die Linie AD, welche BC halbirt, halbirt alle mit BC im Dreiecke parallel gezogene Linien; der Schwerpunct liegt also in AD, indem, wenn AD unterstützt wird, beide Hälften des Dreiecks einander im Gleichgewichte halten. Aus eben dem Grunde liegt der Schwerpunct in BE, welche AC halbirt. Er liegt also in F in dem Durchschnittspuncte beider.

Verlängert man nun AB bis $BH = AB$, und zieht HC, so ist HC mit BE parallel (Geom. §. 275.) zieht man ferner GD parallel mit HC, so ist $GB = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} AB$, und es ist, da auch BF mit GD parallel, $FD : AD = BG : AG = \frac{1}{3} AG : AG$.

§. 139. Lehrsatz. Eines Kreisausschnittes ABCDEFA Schwerpunct wird gefunden, wenn man auf dem den Ausschnitt halbirenden Radius den Abstand vom Centro $= \frac{2}{3} \cdot \frac{AE \,.\, FC}{\text{Bogen } ABCDE}$ nimmt (Fig. 47.).

Beweis. Für den Ausschnitt eines Polygons würde sich des Dreieckes DFE Schwerpunct in FI und um $\frac{2}{3}$ FI vom Mittelpuncte entfernt finden. Eben das würde für alle übrigen durch Radien und eine Polygon-

seite gebildeten Dreiecke gelten, und die Betrachtungen des 136. §. würden dazu führen, aus den Schwerpuncten der einzelnen Dreiecke den gemeinschaftlichen Schwerpunct aller in der Entfernung $= \frac{2}{3}$ FH vom Mittelpuncte zu finden, wenn H des Polygonbogens Schwerpunct war.

Eben die Schlüsse gelten für eine auf das doppelte vermehrte Seitenzahl; sie gelten also auch für den Kreisausschnitt, dessen Schwerpunct um $\frac{2}{3}$ FO $= \frac{2}{3} \cdot \frac{AE \cdot FG}{\text{Bogen } ABCDE}$ vom Mittelpuncte absteht, wenn O des Bogens Schwerpunct ist.

§. 140. Aufgabe. Den Schwerpunct jeder gradlinigten Figur zu finden.

Auflösung. Man zerlegt sie in Dreiecke und sucht eines jeden Inhalt und Schwerpunct. Man betrachtet dann den Schwerpunct jedes einzelnen Dreieckes als mit einem Gewichte, dem Inhalte des Dreiecks proportional, belastet, und sucht den Schwerpunct aller dieser parallel wirkenden Gewichte oder Kräfte, indem man zuerst für zwei den Schwerpunct bestimmt (§. 92.), sich da die Summe der Gewichte beider vereinigt denkt, und nun den Schwerpunct dieser Summe und des dritten sucht u. s. w.

§. 141. Aufgabe. Den Schwerpunct einer krummlinigt begrenzten Figur wenigstens nahe richtig zu finden.

Auflösung. Man theilt die krummlinigte Begrenzung, wie Fig. 49. in so kleine Stücke, daß diese fast als gradlinigt können angesehn werden, und verfährt nun mit den einzelnen Dreiecken oder Trapezen wie in der vorigen Aufgabe.

§. 142. Der Schwerpunct eines cylindrischen oder prismatischen Körpers wird leicht gefunden; denn da die Schwerpuncte aller, den Grundflächen parallelen Schnitte in der graden Linie liegen, welche die Schwerpuncte der Grundflächen verbindet; so liegt in ihr und zwar in ihrer Mitte des ganzen Körpers Schwerpunct.

§. 143. Lehrsatz. Wenn man in einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 50.) eine grade Linie von der Spitze A nach dem Schwerpuncte G der gegenüberstehenden Seitenfläche zieht: so liegt der Schwerpunct C der ganzen Pyramide in AG, und sein Abstand von der Spitze ist $AC = \frac{3}{4} AG$.

Beweis. Da alle mit BDE parallelen Schnitte der Pyramide ähnliche Dreiecke sind, so läßt sich leicht zeigen, daß die Schwerpuncte aller dieser Schnitte in AG liegen. Aus eben dem Grunde liegen die Schwerpuncte aller mit AED parallelen Schnitte in BH, wenn H der Seitenfläche AED Schwerpunct ist. BH und AG liegen in einer Ebne, weil H sich in der einen, G sich in der andern Seite des Dreiecks ABF befindet, wo zugleich $HF = \frac{1}{3} AF$ und $GF = \frac{1}{3} BF$ ist. Stellt (Fig. 51.) das Dreieck ABF das eben so bezeichnete der 50ten Figur dar, und man verlängert AB nach K, wo die mit BH parallel gezogne Linie FK sie trifft: so ist $BK = \frac{1}{2} AB$, und wenn man GI parallel zu BH zieht, $BI = \frac{2}{3} BK = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{4} AI$, folglich $CG = \frac{1}{4} AG$.

§. 144. Hieran läßt sich leicht der Beweis knüpfen, daß auch bei vielseitigen Pyramiden und eben so beim Kegel der Schwerpunct auf $\frac{1}{4}$ der Höhe in derjenigen Linie liegt, die vom Schwerpuncte der Grundfläche gegen die Spitze gezogen ist.

§. 145. Lehrsatz. Der Schwerpunct einer Halbkugel liegt auf dem gegen ihre Grundfläche senkrechten Radius in einer Entfernung vom Mittelpuncte, die $= \frac{3}{8}$ des Halbmessers ist.

Beweis. Es sei ADBC (Fig. 52.) die Halbkugel. Ueber dem größten Kreise AB, der ihr zur Grundfläche dient, denke man sich einen Cylinder ABFE, dessen Höhe dem Halbmesser der Halbkugel gleich, aus diesem aber einen Kegel ausgeschnitten, dessen Durchschnitt durch ECF vorgestellt wird.

In dem alsdann übrig bleibenden hohlen Theile des Cylinders haben alle mit AB parallelen Schnitte glei-

chen Flächen-Inhalt mit den in gleichen Entfernungen von AB liegenden Schnitten der Halbkugel. NO, MK zum Beispiel stellen den Durchschnitt des ausgehöhlten Körpers dar, und dieses Kreisringes Inhalt ist $= \pi \cdot (BC^2 - PN^2)$, der eben so hoch liegende Querschnitt der Halbkugel $= Q$ ist $= \pi \cdot PL^2 = \pi (BC^2 - PN^2)$, da $PN = CP$.

Jeder Querschnitt dieses Körpers hat also nicht bloß eben den Inhalt, sondern zugleich eben das Moment gegen die Axe AB, wie der zugehörige Schnitt der Halbkugel; des ganzen ausgehöhlten Körpers Schwerpunct fällt folglich mit der Halbkugel Schwerpuncte zusammen. Da wir nun wissen, daß des ganzen Cylinders Schwerpunct in G liegt, wo $CG = \frac{1}{2} r =$ dem halben Halbmesser, und daß des Kegels ECF Schwerpunct in H liegt, so daß $CH = \frac{3}{4} r$: so muß, weil der Inhalt der Körper sich wie $1 : \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ verhält, des ausgehöhlten Körpers Schwerpunct in I so liegen, daß $IG = \frac{1}{2} HG$ sei, weil in I die Masse des ausgehöhlten Körpers $= \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$, in H des Kegels Masse $= \frac{1}{3} \pi r^3$, als vereinigt angesehn wird, und G des ganzen Cylinders oder jener beiden verbundenen Körper Schwerpunct ist. Es ist also $IG = \frac{1}{8} r$, $CI = \frac{3}{8} r$.

§. 146. Aufgabe. Den Schwerpunct eines jeden Körpers zu finden.

Auflösung. Man suche zuerst seinen Abstand von irgend einer willkürlich angenommenen Ebne. Dies geschieht, wenn der Körper unregelmäßig ist, allenfalls dadurch, daß man sich den Körper in Scheiben, jener Ebne parallel, zerlegt denkt, ohngefehr so wie §. 141. Heißt dann irgend einer Scheibe Gewicht $= P$, der senkrechte Abstand ihres Schwerpunctes von jener Ebne $= a$, und bedeuten P', P'', a', a'' eben das für andre Scheiben, so muß der Abstand des Schwerpunctes des ganzen Körpers von jener Ebne $= x$

$$= \frac{P \cdot a + P' \cdot a' + P'' \cdot a'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}} \text{ sein.}$$

Eben so sucht man den Abstand des Schwerpunctes von einer zweiten, auf jene senkrechten Ebne, und von einer dritten, auf beide senkrechten Ebne. Auf diese Weise wird des Schwerpunctes Lage völlig bestimmt.

Beweis. Denkt man sich die erste Ebne als der Richtung der Schwere parallel: so wird, wenn sich der Körper um eine in ihr liegende horizontale Axe drehen kann, $P.a + P'.a' + P''.a'' +$ etc. die Summe der Momente aller Theile des Körpers in Beziehung auf diese Axe ausdrücken. Eine Kraft $= P + P' + P'' +$ etc. in der Entfernung $= x$ von dieser Axe, jener Ebne parallel wirkend, hat eben das Drehungsmoment, und folglich liegt in dieser Entfernung $= x$ der Schwerpunct. Eben das gilt in Beziehung auf die übrigen Ebnen.

Anmerkung. Vollständige Anleitung zur Bestimmung der Schwerpuncte giebt Eytelwein Handb. d. Statik f. K. 1ster Theil.

Sechster Abschnitt.

Von der Stabilität der Körper.

§. 147. Erklärung. Ein Körper, bloß der Wirkung der Schwere unterworfen, kann nicht umfallen, wenn sein Schwerpunct unterstützt ist; aber eine horizontal wirkende Kraft kann ihn, wenn er sich nicht fortschieben läßt, umreißen. Das Gleichgewicht oder das Feststehen des Körpers ist desto sicherer, je größer die hiezu erforderliche Kraft ist. Die Sicherheit dieses Feststehens nennen wir des Körpers mehrere oder mindere Stabilität.

§. 148. Erklärung. Wenn man sich eine im Schwerpuncte des Körpers angebrachte horizontal wirkende Kraft denkt, welche grade hinreicht, um den Körper bis ans Umstürzen zu bringen, so daß jede Vermeh-

rung derselben ihn wirklich umstürzen würde, so dient die Größe dieser Kraft als Maaß seiner Stabilität.

§. 149. Aufgabe. Für ein aus gleichartiger Materie bestehendes Parallelepipedum ABCD (Fig. 53.) die Stabilität zu bestimmen.

Auflösung. Des Körpers Länge sei = l, Breite CD = b, Höhe DB = h, so ist $l \cdot b\,h \cdot g$ sein Gewicht, wenn g das Gewicht des als Einheit angenommenen Körpermaaßes bezeichnet.

Die Höhe des Schwerpuncts ist EF = $\frac{1}{2}$ h. Steht dieser Körper frei auf dem horizontalen Boden CD, so hat eine nach EG horizontal wirkende Kraft = Q das Bestreben den Körper um D zu drehen. Das Gewicht des Körpers, welches als in E vereinigt kann angesehn werden, hat in Beziehung auf diese Drehungsaxe das Moment $= l \cdot b \cdot h \cdot g\,\frac{1}{2}\,b$, die Kraft Q hat das Moment $= Q \cdot \frac{1}{2}h$, also ist $Q = l \cdot b^2 \cdot g$. des Körpers Stabilität.

§. 150. Wir nehmen hier die Kraft Q als nur in einem Puncte wirkend an, und da verhält sich offenbar die Stabilität wie die Länge des Körpers. Wirkte, etwa so wie beim Drucke der Erde gegen eine Mauer, wenn diese an einer Seite frei, an der andern mit einer Erdmasse belastet ist, auf jeden Punct der Länge eine Kraft, so würde diese Kraft nur dem Quadrate der Breite proportional sein dürfen.

§. 151. Aufgabe. Des Körpers (Fig. 54.) ABCD Querschnitt ist ein Trapez mit zwei horizontalen und zwei gleich gegen den Horizont geneigten Seiten; man sucht seine Stabilität.

Auflösung. Des Körpers Länge sei = l, obere Breite AB = b, untere Breite CD = B, Höhe = h, Gewicht $= h \cdot l \cdot g \cdot \frac{1}{2}(B + b)$.

Um die Lage des Schwerpunctes zu finden, müssen wir den Körper ECD betrachten, dessen Inhalt $= \frac{1}{2}\,B \cdot l \cdot \frac{Bh}{B-b}$; Entfernung des Schwerpunctes

$= \frac{1}{3} \frac{Bh}{B-b}$ von CD; des Körper EAB Inhalt $= \frac{1}{2}\, b.l. \frac{bh}{B-b}$; Entfernung seines Schwerpuncts $= h + \frac{1}{3} \frac{bh}{B-b}$ von CD. Daher die Entfernung $= x$ von CD, in welcher sich des Trapezes Schwerpunct befindet

$$= \frac{\frac{\frac{1}{6}B^3\, l\, h^2}{(B-b)^2} - \frac{\frac{1}{6}b^3.l.h^2}{(B-b)^2} - \frac{\frac{1}{2}b^2 h^2 l}{B-b}}{\frac{1}{2}\, h\, l\, (B+b)},$$

wenn ich $g = 1$ setze, also

$$x = \frac{\frac{1}{3}h(B^2+Bb+b^2) - b^2 h}{(B+b)\,(B-b)} = \frac{\frac{1}{3}h(B^2+Bb-2b^2)}{(B+b)(B-b)};$$

die Kraft, welche im Schwerpuncte E angebracht das Gleichgewicht in Beziehung auf den Drehungspunct C erhalten könnte, ist also durch $Q.x = \frac{1}{2}\, h.l.(B+b).\frac{1}{2}B$ gegeben, und $Q = \frac{3}{4} \frac{Bl.(B+b)^2}{B+2b}$, als die Stabilität des trapezischen Körpers.

§. 152. Wollte man Mauern von gleicher Stabilität gleich hoch, die eine trapezisch, die andre rechteckig bauen, so müßte, wenn nun der rechteckigen Mauer Breite $= z$ heißt, $z^2 = \frac{3}{4} B \frac{(B+b)^2}{B+2b}$ oder

$Z = \frac{1}{2}(B+b)\sqrt{\frac{3B}{B+2b}}$ sein, wie die Vergleichung der Formeln §. 149. 151. ergiebt. Der Inhalt der trapezischen Mauer verhielte sich also zu dem Inhalte der eben so starken und eben so hohen rechtwinklichten Mauer, wie z zu $\frac{1}{2}(B+b)$, das ist $= 1 : \sqrt{\frac{3B}{B+2b}}$, also wenn man die trapezische Mauer oben halb so dick als unten annimmt $= 1 : \sqrt{\frac{3}{2}}$.

§. 153. Aufgabe. Die Stabilität der mit Pfeilern unterstützten Mauer AE zu finden (Fig. 55.).

doch Fälle vor, wo man den Schwerpunct eines Systems von Linien verlangt. Man würde z. B. den Schwerpunct einer Verbindung gleich dicker Balken ganz so suchen, als ob sie grade schwere Linien wären.

§. 135. Lehrsatz. Der Schwerpunct einer graden Linie liegt in ihrer Mitte. Denn die nach beiden Seiten gleich entfernt liegenden Puncte haben gegen jenen gleiche Momente.

§. 136. Lehrsatz. Der Schwerpunct H einer Anzahl $= 2^n$ von Seiten eines regulären Polygons ABCDE wird gefunden, wenn man auf dem die Sehne AE halbirenden Halbmesser FC des um das Polygon gezeichneten Kreises, den Abstand vom Mittelpuncte,

$$FH = \frac{IF . AE}{AB + BC + CD + DE}$$ nimmt, wo FI der Abstand der Polygonseite vom Mittelpuncte ist.

Beweis. Halbirt man die Seiten, so liegt jeder Polygonseite Schwerpunct in ihrer Mitte, wie in I, K. Wegen der Gleichheit der Seiten ist es anzusehen, als ob K, I mit gleichen Gewichten beschwert wären, und der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Seiten CDE liegt in L, wenn KL = LI auf der graden Linie IK genommen ist. Eben so wird M als Schwerpunct der Seiten ABC gefunden, und da L, M von gleichen Gewichten beschwert sind, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct aller vier Seiten auf ML in H, wenn HM = HL ist.

Da nun DNE ∽ ILF und HLF ∽ GCE; so ist

$$FH : FL = GE : CE;$$

und $FL : FI = CE : CD + DE$;

weil $CE = 2 . NE$ und $CD + DE = 2 . DE$ ist.

Hieraus folgt $FH : FI = GE : CD + DE$,

oder $FH : FI = AE : AB + BC + CD + DE$.

Dieser Beweis läßt sich leicht auf die doppelte Anzahl Seiten und so ferner erweitern.

§. 137. Da dieser Beweis sich für die immerfort verdoppelte Anzahl Seiten führen läßt: so ist vorauszu-

sehen, daß auch des Kreisbogens ABCDE Schwerpunct O gefunden wird, wenn man auf dem seine Sehne halbirenden Halbmesser CF den Abstand FO vom Mittelpuncte $= \frac{FC \cdot AE}{\text{Bogen } ABCDE}$ nimmt. Es verhält sich nämlich der Abstand des Schwerpunctes vom Centro zum Abstande der Polygonseite vom Centro, wie die Sehne des Polygonbogens zur Summe aller Polygonseiten; folglich beim Kreisbogen, der Abstand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte zum Halbmesser, wie die Sehne des Bogens zur Länge des Bogens.

§. 138. Lehrsatz. Einer Dreiecksfläche ABO (Fig. 48.) Schwerpunct F liegt auf der von dem einen Winkel nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite gezogenen Linie so, daß $DF = \frac{1}{3}$ AD ist.

Beweis. Die Linie AD, welche BC halbirt, halbirt alle mit BC im Dreiecke parallel gezogene Linien; der Schwerpunct liegt also in AD, indem, wenn AD unterstützt wird, beide Hälften des Dreiecks einander im Gleichgewichte halten. Aus eben dem Grunde liegt der Schwerpunct in BE, welche AC halbirt. Er liegt also in F in dem Durchschnittspuncte beider.

Verlängert man nun AB bis BH = AB, und zieht HC, so ist HC mit BE parallel (Geom. §. 275.) zieht man ferner GD parallel mit HC, so ist $GB = \frac{1}{2}$ BH $= \frac{1}{2}$ AB, und es ist, da auch BF mit GD parallel, $FD : AD = BG : AG = \frac{1}{3} AG : AG$.

§. 139. Lehrsatz. Eines Kreisausschnittes ABCDEFA Schwerpunct wird gefunden, wenn man auf dem den Ausschnitt halbirenden Radius den Abstand vom Centro $= \frac{2}{3} \cdot \frac{AE \cdot FC}{\text{Bogen } ABCDE}$ nimmt (Fig. 47.).

Beweis. Für den Ausschnitt eines Polygons würde sich des Dreieckes DFE Schwerpunct in FI und um $\frac{2}{3}$ FI vom Mittelpuncte entfernt finden. Eben das würde für alle übrigen durch Radien und eine Polygon-

seite gebildeten Dreiecke gelten, und die Betrachtungen des 136. §. würden dazu führen, aus den Schwerpuncten der einzelnen Dreiecke den gemeinschaftlichen Schwerpunct aller in der Entfernung $= \frac{2}{3}$ FH vom Mittelpuncte zu finden, wenn H des Polygonbogens Schwerpunct war.

Eben die Schlüsse gelten für eine auf das doppelte vermehrte Seitenzahl; sie gelten also auch für den Kreisausschnitt, dessen Schwerpunct um $\frac{2}{3}$ FO $= \frac{2}{3} \cdot \frac{AE \cdot FC}{\text{Bogen } ABCDE}$ vom Mittelpuncte absteht, wenn O des Bogens Schwerpunct ist.

§. 140. Aufgabe. Den Schwerpunct jeder gradlinigten Figur zu finden.

Auflösung. Man zerlegt sie in Dreiecke und sucht eines jeden Inhalt und Schwerpunct. Man betrachtet dann den Schwerpunct jedes einzelnen Dreieckes als mit einem Gewichte, dem Inhalte des Dreiecks proportional, belastet, und sucht den Schwerpunct aller dieser parallel wirkenden Gewichte oder Kräfte, indem man zuerst für zwei den Schwerpunct bestimmt (§. 92.), sich da die Summe der Gewichte beider vereinigt denkt, und nun den Schwerpunct dieser Summe und des dritten sucht u. s. w.

§. 141. Aufgabe. Den Schwerpunct einer krummlinigt begrenzten Figur wenigstens nahe richtig zu finden.

Auflösung. Man theilt die krummlinigte Begrenzung, wie Fig. 49. in so kleine Stücke, daß diese fast als gradlinigt können angesehn werden, und verfährt nun mit den einzelnen Dreiecken oder Trapezen wie in der vorigen Aufgabe.

§. 142. Der Schwerpunct eines cylindrischen oder prismatischen Körpers wird leicht gefunden; denn da die Schwerpuncte aller, den Grundflächen parallelen Schnitte in der graden Linie liegen, welche die Schwerpuncte der Grundflächen verbindet: so liegt in ihr und zwar in ihrer Mitte des ganzen Körpers Schwerpunct.

§. 143. Lehrsatz. Wenn man in einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 50.) eine grade Linie von der Spitze A nach dem Schwerpuncte G der gegenüberstehenden Seitenfläche zieht: so liegt der Schwerpunct C der ganzen Pyramide in AG, und sein Abstand von der Spitze ist $AC = \frac{3}{4} AG$.

Beweis. Da alle mit BDE parallelen Schnitte der Pyramide ähnliche Dreiecke sind, so läßt sich leicht zeigen, daß die Schwerpuncte aller dieser Schnitte in AG liegen. Aus eben dem Grunde liegen die Schwerpuncte aller mit AED parallelen Schnitte in BH, wenn H der Seitenfläche AED Schwerpunct ist. BH und AG liegen in einer Ebne, weil H sich in der einen, G sich in der andern Seite des Dreiecks ABF befindet, wo zugleich $HF = \frac{1}{3} AF$ und $GF = \frac{1}{3} BF$ ist. Stellt (Fig. 51.) das Dreieck ABF das eben so bezeichnete der 50sten Figur dar, und man verlängert AB nach K, wo die mit BH parallel gezogne Linie FK sie trifft: so ist $BK = \frac{1}{2} AB$, und wenn man GI parallel zu BH zieht, $BI = \frac{2}{3} BK = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{4} AI$, folglich $CG = \frac{1}{4} AG$.

§. 144. Hieran läßt sich leicht der Beweis knüpfen, daß auch bei vielseitigen Pyramiden und eben so beim Kegel der Schwerpunct auf $\frac{1}{4}$ der Höhe in derjenigen Linie liegt, die vom Schwerpuncte der Grundfläche gegen die Spitze gezogen ist.

§. 145. Lehrsatz. Der Schwerpunct einer Halbkugel liegt auf dem gegen ihre Grundfläche senkrechten Radius in einer Entfernung vom Mittelpuncte, die $= \frac{3}{8}$ des Halbmessers ist.

Beweis. Es sei ADBC (Fig. 52.) die Halbkugel. Ueber dem größten Kreise AB, der ihr zur Grundfläche dient, denke man sich einen Cylinder ABFE, dessen Höhe dem Halbmesser der Halbkugel gleich, aus diesem aber einen Kegel ausgeschnitten, dessen Durchschnitt durch ECF vorgestellt wird.

In dem alsdann übrig bleibenden hohlen Theile des Cylinders haben alle mit AB parallelen Schnitte glei-

Wofern nun die Reibung gefunden wird, wenn man den Druck mit einer aus Versuchen bekannten Zahl $= f$ multiplicirt: so ist die Reibung hier $= 2 . f . Q . \mathrm{Cos} \frac{1}{2} \alpha$, und wenn die Kraft $= P$ nicht bloß die Last $= Q$, sondern auch die Reibung überwinden soll, so muß sie $P = Q . (1 + 2 f . \mathrm{Cos} \frac{1}{2} \alpha)$ sein.

Wäre die Last $= Q$ erst in D angebracht, so daß das Seil über drei Seiten des Polygons ginge: so würde der eben gefundene Ausdruck angeben, wie stark das Seil in BC gespannt sein müßte, wenn Last und Reibung überwunden werden sollten. Diese Spannung $= R$ würde, wenn in B keine Reibung wäre, durch eine Kraft $P = R$ bewirkt werden; aber da bei B eine Reibung $= 2 f . R . \mathrm{Cos} \frac{1}{2} \alpha$ entsteht, so muß

$$P = R . (1 + 2 f . \mathrm{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha),$$
$$= Q . (1 + 2 f . \mathrm{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha)^2, \text{ sein,}$$

und so erhellet, daß

$$P = Q . (1 + 2 f . \mathrm{Cos} \tfrac{1}{2} \alpha)^{n-1} \text{ wird,}$$

wenn das Seil um n Seiten des Polygons gelegt ist.

Nimmt man hier n für die Zahl aller Polygonseiten und setzt n sehr groß, so ist α wenig von $180°$ verschieden, und die Formel giebt einen desto näher für den Kreis passenden Werth, je mehr Seiten man im Polygon annimmt.

§. 169. Beispiel. Das Polygon sei ein 90-Eck, so ist $\alpha = 176°$, $\mathrm{Cos} \frac{1}{2} \alpha = 0{,}0349$; f sei $= \frac{1}{3}$, $n = 90$, $P = Q . (1{,}02327)^{89} = Q . 7{,}747$, wenn das Seil einmal um alle Seiten des Polygons geschlungen ist.

Ist das Polygon ein 360-Eck, so ist $\alpha = 179°$, also für $f = \frac{1}{3}$, $1 + 2 f . \mathrm{Cos} \frac{1}{2} \alpha = 1{,}005818$, aber da für einen ganzen Umlauf des Seiles $n = 360$ ist, $P = Q . (1{,}005818)^{359} = Q . 8{,}031$.

Wäre das Seil zweimal umgeschlungen, also um 720 Seiten, so würde $P = 64{,}77$ Q; wäre es viermal

umgeschlungen, P = 4222 . Q; wäre es zehnmal umgeschlungen P mehr als 1170000000 . Q.

Die zu Ueberwindung der Friction erforderliche Kraft ist also mehr als tausend Millionen mal so groß als die Last.

Anmerkung. Coulombs Versuche über die Reibung theilt Eytelwein im 1sten Bande seiner Statik ziemlich vollständig mit.

§. 170. Bemerkung. Dieser Widerstand wegen der Reibung würde schon statt finden, wenn auch das Seil vollkommen biegsam wäre und nicht einer Veränderung seiner Krümmung noch einen neuen Widerstand entgegensetzte. Wegen der unvollkommenen Biegsamkeit des Seiles ist aber noch eine andre Vergrößerung des Widerstandes zu berücksichtigen.

Wenn das Seil um den Cylinder AC (Fig. 62.) läuft, und die Kraft in P die Last Q wirklich heben soll: so muß der unterhalb C liegende, bisher grade Theil des Seiles sich nun oberhalb C hinauf beugen. Wegen der Steifheit des Seiles nimmt dieses nicht sogleich die Krümmung völlig an, die es annehmen sollte; sondern das Seil drängt sich bei B etwas nach außen, indem es weniger gekrümmt bleibt, als die Krümmung des Cylinders fordert; das Gewicht Q wird daher desto mehr von der Verticale CE zurückweichen, je größer die Steifheit des Seiles ist.

§. 171. Wenn, indem P das Seil fortzieht, dieses sich von der Walze entfernt, so hat es vermöge seiner Steifheit auch einiges Bestreben, die erlangte Krümmung zu behalten, und der Theil AP des Seiles drängt sich daher ein wenig nach p hinüber. Da indeß das gekrümmte Seil viel leichter seine natürliche, grade Richtung wieder annimmt, als das grade Seil bei B die Krümmung, so ist die Wirkung der Steifheit bei A minder bedeutend.

Wegen der Steifheit der Seile ist es also so anzusehen, als ob die Last Q nicht in der Entfernung = DC

rung derselben ihn wirklich umstürzen würde, so dient die Größe dieser Kraft als Maaß seiner Stabilität.

§. 149. Aufgabe. Für ein aus gleichartiger Materie bestehendes Parallelepipedum ABCD (Fig. 53.) die Stabilität zu bestimmen.

Auflösung. Des Körpers Länge sei $= l$, Breite CD $= b$, Höhe DB $= h$, so ist $l \cdot b\, h \cdot g$ sein Gewicht, wenn g das Gewicht des als Einheit angenommenen Körpermaaßes bezeichnet.

Die Höhe des Schwerpuncts ist EF $= \frac{1}{2}$ h. Steht dieser Körper frei auf dem horizontalen Boden CD, so hat eine nach EG horizontal wirkende Kraft $= Q$ das Bestreben den Körper um D zu drehen. Das Gewicht des Körpers, welches als in E vereinigt kann angesehn werden, hat in Beziehung auf diese Drehungsaxe das Moment $= l \cdot b \cdot h \cdot g \frac{1}{2} b$, die Kraft Q hat das Moment $= Q \cdot \frac{1}{2} h$, also ist $Q = l \cdot b^2 \cdot g$. des Körpers Stabilität.

§. 150. Wir nehmen hier die Kraft Q als nur in einem Puncte wirkend an, und da verhält sich offenbar die Stabilität wie die Länge des Körpers. Wirkte, etwa so wie beim Drucke der Erde gegen eine Mauer, wenn diese an einer Seite frei, an der andern mit einer Erdmasse belastet ist, auf jeden Punct der Länge eine Kraft, so würde diese Kraft nur dem Quadrate der Breite proportional sein dürfen.

§. 151. Aufgabe. Des Körpers (Fig. 54.) ABCD Querschnitt ist ein Trapez mit zwei horizontalen und zwei gleich gegen den Horizont geneigten Seiten; man sucht seine Stabilität.

Auflösung. Des Körpers Länge sei $= l$, obere Breite AB $= b$, untere Breite CD $= B$, Höhe $= h$, Gewicht $= h \cdot l \cdot g \cdot \frac{1}{2} (B + b)$.

Um die Lage des Schwerpunctes zu finden, müssen wir den Körper ECD betrachten, dessen Inhalt $= \frac{1}{2} B \cdot l \cdot \frac{Bh}{B-b}$; Entfernung des Schwerpunctes

mungen wegen mancher Zufälligkeiten sich doch nicht ganz auf theoretische Formeln bringen lassen, so bemerkt Eytelwein mit Recht, daß die obige Formel als die einfachste die brauchbarste sei.

Coulombs Versuche über die Steifheit der Seile stehen bei Eytelwein im 2ten Bande der Statik. S. 29. u. f.

Neunter Abschnitt.

Von der geneigten Ebne, dem Keil und der Schraube.

§. 175. Erklärung. Eine geneigte Ebne ist jede, die mit dem Horizonte einen spitzen Winkel macht.

§. 176. Aufgabe. Einer Ebne Neigung gegen den Horizont (Fig. 63.) BAC $= \alpha$ ist gegeben; man suche, mit welcher Gewalt eine unbekannte Kraft $= P$ wirken muß, um die Last $= Q$ zu erhalten, wenn die Richtung der Kraft durch den Schwerpunct D der zu haltenden Last geht, und unter dem Winkel EFC $= \beta$ gegen den Horizont geneigt ist.

Auflösung. Die Last $= Q$ drückt mit ihrem ganzen Gewichte $= Q$ vertical niederwärts; aber diese Kraft wird theils zum Drucke auf die Ebne, theils auf das Herabdrängen längst der Ebne verwandt. Aus diesem Grunde betrachten wir Q als aus zwei Seitenkräften entstehend, aus einer gegen AB senkrechten Kraft $= Q . \mathrm{Cos}\,\alpha$, welche bloß einen Druck auf die Ebne ausübt und von dieser ganz aufgehoben wird, und einer $= Q . \mathrm{Sin}\,\alpha$, mit welcher der Körper längst der Ebne herab zu gleiten strebt. Auf eben die Weise kann man die Kraft $= P$, die nach DE wirkt und mit AB den Winkel $\beta - \alpha$ macht, ansehen, als zerlegt in eine Kraft senkrecht auf AB, $= P . \mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)$, welche bloß den Druck auf

diese Ebne zu verstärken oder zu schwächen beiträgt, und in eine mit AB parallele $= P . \mathrm{Cos}(\beta - \alpha)$, welche angewandt wird, um das Herabgleiten zu hindern.

Soll also der Körper wirklich in Ruhe bleiben, so muß $P . \mathrm{Cos}(\beta - \alpha) = Q . \mathrm{Sin}\,\alpha$ sein, oder

$$P = \frac{Q . \mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}(\beta - \alpha)}.$$

Will man auf die Friction sehen, so entsteht aus dem Drucke auf die Ebne $= Q . \mathrm{Cos}\,\alpha - P . \mathrm{Sin}(\beta - \alpha)$ eine Friction, die ich durch $= f . (Q . \mathrm{Cos}\,\alpha - P . \mathrm{Sin}(\beta - \alpha))$ angeben will, indem ich $f : 1$ als das Verhältniß ansehe, welches die Friction zum Drucke hat (§. 165.). Soll also die Kraft P bloß das Herabgleiten hindern, so braucht nur $P . \mathrm{Cos}(\beta - \alpha) = Q . \mathrm{Sin}\,\alpha - f . Q . \mathrm{Cos}\,\alpha + f . P . \mathrm{Sin}(\beta - \alpha)$ zu sein, oder

$$P = \frac{Q . (\mathrm{Sin}\,\alpha - f . \mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}(\beta - \alpha) - f . \mathrm{Sin}(\beta - \alpha)},$$ weil

die Friction selbst schon als eine das Herabgleiten hindernde Kraft wirkt. Soll hingegen P so groß sein, daß sie grade Last und Reibung zu überwinden vermögte, oder daß die geringste Vermehrung von P ein Hinaufziehen der Last Q bewirken würde: so muß außer der Kraft $Q . \mathrm{Sin}\,\alpha$ auch noch die Friction überwunden werden, und $P . \mathrm{Cos}(\beta - \alpha) = Q . \mathrm{Sin}\,\alpha + Q . f . \mathrm{Cos}\,\alpha - P . f . \mathrm{Sin}(\beta - \alpha)$ sein, also

$$P = \frac{Q\,(\mathrm{Sin}\,\alpha + f . \mathrm{Cos}\,\alpha)}{\mathrm{Cos}(\beta - \alpha) + f . \mathrm{Sin}(\beta - \alpha)}.$$

§. 177. Wenn die Richtung DE der hinaufziehenden Kraft P mit AB parallel oder $\beta = \alpha$ ist, so wird, wenn man auf die Reibung nicht sieht $P = Q . \mathrm{Sin}\,\alpha$, weil $\mathrm{Cos}(\beta - \alpha)$ nun $= 1$ ist; oder $P = \frac{Q . BC}{AB}$, das ist: die zum Erhalten der Last erforderliche Kraft verhält sich zur Last, wie die Höhe BC der schiefen Ebne zu ihrer Länge AB. Zieht man die Reibung in Betrachtung, so ist hier $P = Q\,(\mathrm{Sin}\,\alpha - f . \mathrm{Cos}\,\alpha)$, die zum Erhalten

Siebenter Abschnitt.

Vom schweren Hebel und der Wage.

§. 155. Aufgabe. Das Gewicht eines Hebels ist gegeben, nebst den Kräften, welche in A und B senkrecht auf ihn wirken; man sucht die Stelle, wo er unterstützt werden muß, damit das Gleichgewicht bestehe (Fig. 56.).

Auflösung. Ist der Hebel eine überall gleich dicke Stange, so kann man sein Gewicht $= P$ als in seiner Mitte, in A vereinigt sich vorstellen. Wirket nun in B die Kraft $= Q$, in C die Kraft $= R$, parallel mit der Richtung der Schwere: so muß, wenn D den Unterstützungspunct vorstellt

$$R . CD = P . AD + Q . BD, \text{ oder}$$

$$R . CD = P . AC - P . CD + Q . BC - Q . CD,$$

oder $CD = \frac{P . AC + Q . BC}{P + Q + R}$ sein.

§. 156. Alle ähnlichen Fragen lassen sich aus den Lehren des 2ten, 3ten und 4ten Abschnittes mit gleicher Leichtigkeit beantworten, da man nur nöthig hat, am schweren Hebel oder an der schweren Ebne, auf welche Kräfte wirken, außer den übrigen Kräften noch das nach verticaler Richtung wirkende Gewicht des Hebels oder der Ebne, am Schwerpuncte angebracht, als eine neue Kraft neben den übrigen in Betrachtung zu ziehen.

§. 157. Erklärung. Die gleicharmige Wage ist ein Hebel, in welchem an gleichen Entfernungen vom Ruhepuncte Gewichte mit Hülfe der Wagschalen angebracht werden. Da sie zwar dazu dienen soll, gleiche Gewichte abzuwiegen, aber man doch vermittelst des

Ausschlages oder der Abweichung vom horizontalen Stande des Wagebalkens, bei welchem das Gleichgewicht eintritt, das etwa an einem oder dem andern Arme vorhandene Uebergewicht abzuschätzen wünscht: so ist (Fig. 57.) der Unterstützungspunct A ein wenig vom Schwerpuncte D des Wagebalkens BC entfernt, so daß A vertical über D steht bei horizontaler Stellung des Wagebalkens.

§. 158. Aufgabe. Wenn (Fig. 58.) das Gewicht des Wagebalkens $= P$ bekannt ist, sein Schwerpunct in seiner Mitte E liegt, der Drehungspunct in D; und es wird an A das Gewicht $= Q + q$, an B das Gewicht $= Q$ aufgehängt; den Winkel KDL $= \varphi$ zu bestimmen, um welchen die Lage der Wage gegen den Horizont sich verrücken wird.

Auflösung. Es sei DE $=$ De $= a$ senkrecht auf AB: so wird, wenn DeFG die Lage des Instruments beim Gleichgewichte bedeutet $P . ef + Q . GH = (Q + q) . FI$ sein. Da nun $ef = a . \sin\varphi$; $GH = b \cos\varphi + a \sin\varphi$, $FI = b . \cos\varphi - a \sin\varphi$, wenn GH, FI auf DE senkrecht sind, und $eG = eF = EB = b$ ist: so wird

$$P . a \sin\varphi + Q b \cos\varphi + Q . a \sin\varphi$$
$$= Q b \cos\varphi + q b \cos\varphi - Q . a \sin\varphi - q a \sin\varphi,$$

das ist $(P + 2Q + q) . a \sin\varphi = q . b \cos\varphi$, oder

$$\tang \varphi = \frac{q b}{a (P + 2Q + q)}.$$

§. 159. Die Tangente des Ausschlagswinkels wird also nicht ganz der Größe des Uebergewichtes proportional; aber da q gewöhnlich gegen $P + 2Q$ ziemlich geringe ist, so kann man sie als beinahe dem Uebergewichte proportional ansehen. Diese Tangente wird genau proportional der Länge des Wagebalkens umgekehrt proportional dem Abstande a des Drehungspunctes vom Schwerpuncte.

Man sagt daher, die Wage sei desto schneller oder gebe einen desto größern Ausschlag je kleiner a ist.

Anmerkung. Von der Einrichtung sehr genauer Wagen findet man Einiges in Gilberts Annalen Jahrg. 1808.

$= 90^\circ + \alpha - \gamma$. Es wird daher D mit einer Kraft $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} . \mathrm{Sin}\,(90^\circ + \alpha - \gamma)$ $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} . \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma)$ gegen die Ebne gedrückt, und mit einer Kraft $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} . \mathrm{Sin}\,(\alpha - \gamma)$ mit der Ebne parallel aufwärts getrieben. Dem ersteren Drucke widersteht die Ebne, der zweite muß $= 0$ sein, wenn der Körper ohne Einwirkung einer neuen Kraft ruhen soll; dann also müßte $\alpha = \gamma$ sein. Leidet der Körper in D eine Reibung, die sich zum Drucke wie $f : 1$ verhält, so ist $f . \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma) \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ der Reibung gleich, und der Körper würde ruhen, so lange $f . \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma) > \mathrm{Sin}\,(\alpha - \gamma)$ ist. Im entgegengesetzten Falle bedürfte es einer neuen mit AB parallel wirkenden Kraft $= \sqrt{(P^2 + Q^2)} . (\mathrm{Sin}\,(\alpha - \gamma) - f . \mathrm{Cos}\,(\alpha - \gamma))$, um das Gleichgewicht zu erhalten.

§. 182. Aufgabe. Auf die Ebne AB (Fig. 65.), welche unter dem Winkel $= \alpha$ gegen die Verticale geneigt ist, stützt sich eine gegebene Last $= P$, welche durch eine am Seile CP aufwärts wirkende Kraft gehalten wird; das Seil PC geht bei C über eine Rolle, deren Lage gegeben ist und trägt am andern Ende ein gegebnes Gewicht $= Q$, welches gleichfalls auf einer geneigten Ebne ruht; wie groß muß der Neigungswinkel der letztern Ebne sein, damit das Gleichgewicht bestehe, wenn die Winkel PCB und QCB gegeben sind.

Auflösung. Es sei PCB $= \beta$; QCB $= b$, ABF $= \alpha$ und der gesuchte Winkel FDE $= a$. Die Kraft, welche nach PC ziehen muß, um P zu erhalten, ist, wenn die Reibung nicht berücksichtigt wird, $= \frac{P . \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta)}$ (§. 176.); so groß ist also die Spannung des Seiles CP. Diese wird durch eine eben so große nach CQ wirkende Kraft hervorgebracht, da gleiche, nach der Tangente wirkende Kräfte an der kreisförmigen Rolle im Gleichgewichte sind (§. 97.), und die entgegenwirkende Kraft, nämlich die durch das Gewicht

in A gar nicht beschwerten Hebel in Ruhe zu erhalten, so werden die Entfernungen DX der Last Q proportional.

Anmerkung. Von vortheilhaft eingerichteten Schnellwagen giebt Arzberger Nachricht in Gilberts Annalen d. Physik. Jahrg. 1814. 46. Bd. S. 294.

Achter Abschnitt.

Von der Reibung und dem Widerstande durch die Steifheit der Seile.

§. 163. Erfahrung. Alle Körper leiden, wenn sie an der Oberfläche eines festen Körpers fortgezogen werden, einen Widerstand, welcher in der Rauhheit der Oberfläche seinen Grund hat. Dieser Widerstand heißt die Reibung, Friction.

§. 164. Aufgabe. Durch Versuche die Größe des Widerstandes zu bestimmen, welchen die Reibung der Bewegung entgegensetzt.

Auflösung. Man legt den Körper (Fig. 60.) auf eine horizontale Ebne, und sucht die mit der Ebne parallele Kraft, welche nur kaum hinreicht, um ihn in Bewegung zu setzen. Da die Schwere des Körpers von der horizontalen Ebne ganz getragen wird, so hat die nach horizontaler Richtung wirkende Kraft nichts als die Reibung zu überwinden, und dient daher zu Abmessung derselben.

Man bedient sich, um diese horizontale Kraft genau zu bestimmen, am bequemsten eines im Schwerpuncte C des Körpers befestigten Fadens, der über eine um den Mittelpunct bewegliche Rolle E geht, und bei P das erforderliche Gewicht trägt.

§. 165. Erfahrung. Die Reibung beim Fortgleiten eines Körpers über den andern ist bei verschiedenen Körpern sehr ungleich. Unter übrigens gleichen Umständen ist sie dem Drucke proportional, aber fast ganz unabhängig von der Größe der reibenden Fläche.

Nach Coulombs Versuchen beträgt sie bei Eichenholz auf Eichenholz reichlich $\frac{2}{5}$ der drückenden Last, bei Eisen auf Eisen beinahe $\frac{3}{10}$, bei Kupfer auf Eisen $\frac{1}{6}$ der Last, wenn die Körper trocken, ohne zwischen gestrichene fette Materien auf einander fortgleiten.

§. 166. Ist der Körper einmal in Bewegung, so widersteht die Reibung weniger, als wenn er erst aus der Ruhe soll gebracht werden.

§. 167. Bedeutend geringer als beim Fortschieben ist die Reibung beim Wälzen des Cylinders auf einer Ebne, wo sie sich jedoch auch wie die Belastung, aber zugleich, unter sonst gleichen Umständen umgekehrt wie die Halbmesser der Cylinder verhält.

§. 168. Aufgabe. Die Reibung zu berechnen, welche ein mit gegebner Kraft gespanntes Seil leidet, wenn es um einen Cylinder gewunden ist; — vorausgesetzt, daß man das Verhältniß der Reibung zum Drucke in Beziehung auf das am Cylinder fortgleitende Seil kenne.

Auflösung. Statt eines Cylinders wollen wir uns ein regelmäßig polygonisches Prisma denken, dessen Querschnitt ABCDEF ist (Fig. 61.). Wird um die zwei Seiten ABC desselben ein Seil gespannt: so würden, wenn keine Reibung da wäre, gleiche Kräfte $P = Q$ einander im Gleichgewichte halten, weil die Richtung ihres mittlern Druckes grade gegen den Mittelpunct K des widerstehenden Körpers geht und sie würden nach BK einen mittlern Druck $= 2 \cdot P \cdot \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}\alpha$ ausüben, wenn $ABC = \alpha$ ist. Denn wenn Bi die Größe der einen, Bh die Größe der andern Kraft vorstellt, so ist Bigh das Parallelogramm der Kräfte und die Diagonale $Bg = 2 \cdot Bi \cdot \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}\alpha$.

Wofern nun die Reibung gefunden wird, wenn man den Druck mit einer aus Versuchen bekannten Zahl = f multiplicirt: so ist die Reibung hier $= 2 \,.\, f \,.\, Q \,.\, \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha$, und wenn die Kraft = P nicht bloß die Last = Q, sondern auch die Reibung überwinden soll, so muß sie $P = Q \,.\, (1 + 2\, f \,.\, \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha)$ sein.

Wäre die Last = Q erst in D angebracht, so daß das Seil über drei Seiten des Polygons ginge: so würde der eben gefundene Ausdruck angeben, wie stark das Seil in BC gespannt sein müßte, wenn Last und Reibung überwunden werden sollten. Diese Spannung = R würde, wenn in B keine Reibung wäre, durch eine Kraft P = R bewirkt werden; aber da bei B eine Reibung $= 2\, f \,.\, R \,.\, \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha$ entsteht, so muß

$$P = R \,.\, (1 + 2\, f \,.\, \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha),$$
$$= Q \,.\, (1 + 2\, f \,.\, \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha)^2, \text{ sein,}$$

und so erhellet, daß

$$P = Q \,.\, (1 + 2\, f \,.\, \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha)^{n-1}$$ wird, wenn das Seil um n Seiten des Polygons gelegt ist.

Nimmt man hier n für die Zahl aller Polygonseiten und setzt n sehr groß, so ist α wenig von 180° verschieden, und die Formel giebt einen desto näher für den Kreis passenden Werth, je mehr Seiten man im Polygon annimmt.

§. 169. Beispiel. Das Polygon sei ein 90-Eck, so ist $\alpha = 176°$, $\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha = 0{,}0349$; f sei $= \frac{1}{3}$, $n = 90$, $P = Q \,.\, (1{,}02327)^{89} = Q \,.\, 7{,}747$, wenn das Seil einmal um alle Seiten des Polygons geschlungen ist.

Ist das Polygon ein 360-Eck, so ist $\alpha = 179°$, also für $f = \frac{1}{3}$, $1 + 2\, f \,.\, \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha = 1{,}005818$, aber da für einen ganzen Umlauf des Seiles n = 360 ist, $P = Q \,.\, (1{,}005818)^{359} = Q \,.\, 8{,}031$.

Wäre das Seil zweimal umgeschlungen, also um 720 Seiten, so würde P = 64,77 Q; wäre es viermal

umgeschlungen, $P = 4222 \cdot Q$; wäre es zehnmal umgeschlungen P mehr als $1170000000 \cdot Q$.

Die zu Ueberwindung der Friction erforderliche Kraft ist also mehr als tausend Millionen mal so groß als die Last.

Anmerkung. Coulombs Versuche über die Reibung theilt Eytelwein im 1sten Bande seiner Statik ziemlich vollständig mit.

§. 170. Bemerkung. Dieser Widerstand wegen der Reibung würde schon statt finden, wenn auch das Seil vollkommen biegsam wäre und nicht einer Veränderung seiner Krümmung noch einen neuen Widerstand entgegensetzte. Wegen der unvollkommenen Biegsamkeit des Seiles ist aber noch eine andre Vergrößerung des Widerstandes zu berücksichtigen.

Wenn das Seil um den Cylinder AC (Fig. 62.) läuft, und die Kraft in P die Last Q wirklich heben soll: so muß der unterhalb C liegende, bisher grade Theil des Seiles sich nun oberhalb C hinauf beugen. Wegen der Steifheit des Seiles nimmt dieses nicht sogleich die Krümmung völlig an, die es annehmen sollte; sondern das Seil drängt sich bei B etwas nach außen, indem es weniger gekrümmt bleibt, als die Krümmung des Cylinders fordert; das Gewicht Q wird daher desto mehr von der Verticale CE zurückweichen, je größer die Steifheit des Seiles ist.

§. 171. Wenn, indem P das Seil fortzieht, dieses sich von der Walze entfernt, so hat es vermöge seiner Steifheit auch einiges Bestreben, die erlangte Krümmung zu behalten, und der Theil AP des Seiles drängt sich daher ein wenig nach p hinüber. Da indeß das gekrümmte Seil viel leichter seine natürliche, grade Richtung wieder annimmt, als das grade Seil bei B die Krümmung, so ist die Wirkung der Steifheit bei A minder bedeutend.

Wegen der Steifheit der Seile ist es also so anzusehen, als ob die Last Q nicht in der Entfernung = DC

vom Drehungspuncte, sondern in der Entfernung = DB angebracht wäre; sie vergrößert also das Moment der Last und erfordert dadurch eine angemessene Vergrößerung der Kraft.

§. 172. Erfahrung. Die Kraft, mit welcher das Seil bei C der Beugung widersteht, ist, es mag belastet oder unbelastet sein, ohngefehr dem Querschnitte des Seiles oder dem Quadrate seines Durchmessers proportional, und zugleich bei gleicher Dicke dem Halbmesser AD des Cylinders umgekehrt proportional. Ist das Seil bei Q belastet, so muß man auch noch den Widerstand der Last proportional setzen.

Wenn durch Versuche gefunden ist, wie groß bei bestimmtem Durchmesser des Seiles = d, bei bestimmtem Halbmesser der Rolle = r, und bestimmter Belastung = q, der Widerstand wegen der Steifheit der Seile sei, zum Beispiel = k: so findet man ziemlich nahe unter andern Umständen für die Dicke des Seiles = D, Halbmesser der Rolle = R, Belastung = Q, den Widerstand

$$= k \cdot \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{Q}{q},$$ wofür man nach Eytelwein

(Statik 2ter Band §. 320.) als einen Mittelwerth $= \frac{1}{286} \frac{D^2 \cdot Q}{R}$ setzen kann, wenn D in Linien, R in Zollen pariser Maaßes ausgedrückt ist.

§. 173. Es müßte also, wenn man die Reibung weiter nicht berücksichtigt, die Kraft

$$P = Q + \frac{1}{286} \cdot \frac{D^2}{R} Q$$ sein, ehe die Last wirklich gehoben werden kann.

§. 174. Anmerkung. Nach den Versuchen scheint die Steifheit nicht genau der ersten Potenz des Halbmessers der Rolle, sondern eher der Potenz $r^{1,2}$ umgekehrt proportional zu sein; auch folgt die Vermehrung des Widerstandes nicht ganz dem Verhältnisse von D^2, wobei es ohnehin auch auf die verschiedene Art der Verfertigung der Seile ankömmt; aber da die hier vorkommenden Bestim-

= Bogen Cd : Bogen Ce. Dann liegen die Endpuncte f, g, aller dieser Senkrechten in der Schraubenlinie.

§. 192. Wenn man auf der Schraubenlinie einen willkürlichen Punct K nimmt, so ist also seine Höhe KL dem Bogen CL proportional. Ist man um mehr als einen ganzen Umfang des Cylinders auf der Schraubenlinie fortgegangen, so ist die Höhe eines solchen Punctes M, ausgedrückt durch $LM = \frac{(\text{ganzer Umfang} + CL) \cdot df}{Cd}$.

§. 193. Erklärung. Ein jeder Theil der Schraubenlinie, der genau durch einen ganzen Umfang des Cylinders läuft, heißt Ein Schraubengang zum Beispiel CKN oder KNM; die Entfernung KM = CN heißt die Höhe des Schraubenganges.

§. 194. Erklärung. Wenn man, dem Gange der Schraubenlinie folgend, eine Erhöhung auf dem Umfange des Cylinders ausarbeitet: so heißt dieser körperlich ausgearbeitete Schraubencylinder die Schraubenspindel. Schneidet man dagegen in eine der vorigen gleiche aber hohl ausgearbeitete Cylinderfläche, in welche jener Cylinder paßt, die Schraubenlinie ausgehöhlt aus, so ist dieses die Schraubenmutter, und jene paßt in diese, wenn der hier ausgeschnittene Schraubengang genau eben die Form hat, wie der dort aufliegende oder vorragende.

195. Bemerkung. Man gebraucht die Schraube, um Lasten zu heben oder sie unterstützt zu erhalten. Wenn man die in der festgehaltenen Schraubenmutter steckende Spindel nach einer Richtung, die mit dem Umfange des Cylinders übereinstimmend ist, dreht: so rückt jeder Punct C (Fig. 69.) in dem ausgeschnittenen Schraubengange der Mutter fort; und wenn beide vertical stehen, so wird eben dadurch die Spindel mit der auf ihr ruhenden Last gehoben.

Man kann hier jeden Punct des Schraubenganges der Spindel ansehen, als ob er sich stütze auf den ausgeschnit-

tenen Schraubengang der Mutter; es ist also so gut, als ob jeder Punct auf einer geneigten Ebne läge, deren Neigungswinkel durch die Höhe des Schraubenganges und den Umfang der Spindel bestimmt ist. Da das Steigen des Ganges für einen ganzen Umfang = a = der Höhe des Schraubenganges ist, und dieses Steigen gleichförmig in allen Puncten ist: so hat man, für den Halbmesser = r der Spindel, den Neigungswinkel = φ jedes Stückes des Schraubenganges gegen eine mit der Grundfläche parallele Ebne durch $\tan \varphi = \frac{a}{2.r.\pi}$ bestimmt (wo $\pi = 3,14159...$), denn für jedes noch so kleine Stück $= \frac{1}{n}$ des Umfanges steigt der Gang um $\frac{1}{n}$ a, also ist die Neigung der Berührungslinie = φ, durch $\tan\varphi = \frac{a}{2.r.\pi}$ ausgedrückt.

§. 196. Aufgabe. Auf der vertical stehenden Schraubenspindel (Fig. 69.) ruht die Last = Q, man sucht die Kraft = P, welche am Umfange der Spindel wirken muß, um der Last das Gleichgewicht zu halten, wenn man auf die Friction keine Rücksicht nimmt.

Auflösung. Es sei der Halbmesser der Spindel = r, die Höhe des Schraubenganges = a, so ist jedes kleine Stück des Schraubenganges der Mutter als eine geneigte Ebne anzusehen, welche mit dem Horizonte den Winkel = φ macht, dessen Tangente $\tan \varphi = \frac{a}{2.r.\pi}$ ist. Denken wir uns nun die Last auf alle kleinen Theile des Schraubenganges, deren Zahl n heißen mag, gleich vertheilt, so liegt auf jedem Theile des Schraubenganges die Last = $\frac{1}{n}$ Q, die durch eine horizontal wirkende Kraft $= \frac{1}{n} Q . \tan \varphi = \frac{1}{n} Q . \frac{a}{2.r.\pi}$ (nach §. 179.) erhalten werden muß. Die gesammte Kraft ist daher

der Last und $P = Q(\text{Sin}\,\alpha + f \,.\, \text{Cos}\,\alpha)$ die zu Ueberwindung der Last und Friction erforderliche Kraft.

§. 178. Wäre $P = 0$, so könnte der Körper in Ruhe bleiben, so lange $\text{Sin}\,\alpha < f \,.\, \text{Cos}\,\alpha$ ist; oder wenn man der Ebne genau die Neigung $= \alpha$ gäbe, die durch $f = \text{tang}\,\alpha$ bestimmt wird, so würde dann erst eben der Körper im Begriffe sein, herabzugleiten und noch durch die Reibung in Ruhe erhalten. Diesen Winkel, durch Erfahrung bestimmt, könnte man also gebrauchen, um f daraus herzuleiten.

§. 179. Ist die Kraft $= P$ horizontal wirkend, so ist $\beta = 0$, und $P = \frac{Q \,.\, (\text{Sin}\,\alpha - f \,.\, \text{Cos}\,\alpha)}{\text{Cos}\,\alpha + f \,.\, \text{Sin}\,\alpha}$ die zu Erhaltung der Last erforderliche Kraft. Sie wird $= Q \,.\, \text{tang}\,\alpha$, wenn keine Reibung statt fände; dann also ist $P = Q \,.\, \frac{BC}{AC}$, die Kraft zur Last, wie die Höhe BC zur horizontalen Länge AC.

§. 180. Aufgabe. Auf der schiefen Ebne (Fig. 64.) liege ein schwerer Körper DE, den eine nach der Richtung FH drückende Kraft $= P$, in Ruhe zu erhalten strebt; man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts, wenn die Richtung der Kraft P nicht durch des Körpers Schwerpunct geht, und dieser in dem einzigen Puncte D sich auf die Ebne stützt.

Auflösung. Es sei der Neigungswinkel der Ebne $ABC = \alpha$ und die Richtungslinie FH unter dem Winkel $= \beta$ gegen den Horizont geneigt. G sei des Körpers Schwerpunct, so daß dessen Gewicht $= Q$, als eine nach GI wirkende Kraft kann angesehen werden. Verlängert man die Richtungen beider Kräfte bis sie sich in K schneiden, so ist es so gut, als ob P in K nach KH und Q in K nach KI zu wirkte. Sie sind unter dem Winkel $IKH = 90° + \beta$ gegen einander geneigt, und man findet Richtung und Größe der aus ihnen entspringenden Mittelkraft, wenn man $KI : Kn = Q : P$

Q hervorgebrachte Spannung des Seiles CQ muß jener Kraft gleich $\frac{Q \cdot Cos\,a}{Cos\,(a-b)} = \frac{P \cdot Cos\,\alpha}{Cos\,(\alpha-\beta)}$ sein; also wenn a gesucht wird $\frac{Q \cdot Cos\,(\alpha-\beta)}{P \cdot Cos\,\alpha} = Cos\,b + Sin\,b \cdot tang\,a$, oder tang $a = \frac{Q \cdot Cos\,(\alpha-\beta)}{P \cdot Cos\,\alpha \cdot Sin\,b} - Cotang\,b$.

§. 183. Soll hier b ungeändert bleiben, so wächst a mit β zugleich, oder je tiefer man, bei unveränderter Lage der Ebne AB das Gewicht P auf dieser Ebne herabschiebt, desto mehr nähert DE sich der horizontalen Lage, wenn BCQ ungeändert bleiben und das Gleichgewicht bestehen soll.

Nimmt man die Lage von C als völlig bekannt an, so wird BC = h gegeben sein, wenn man PC = λ als gegeben ansieht, indem $Sin\,(\alpha-\beta) = \frac{h \cdot Sin\,\alpha}{\lambda}$.

Ist nun die ganze Länge des Seiles bestimmt = l, also CQ = $l-\lambda$, so wäre durch den Winkel = b und die Entfernung = $l-\lambda$ die Lage des Punctes Q völlig gegeben, und wir erhielten aus unsrer Gleichung den Winkel a ausgedrückt durch die gegebne Neigung = α der Ebne AB, durch die Höhe BC = h, die Länge l des ganzen Seiles und durch die beiden, als veränderlich anzusehenden Größen λ und b. Soll die Länge des Seiles unveränderlich sein, so wird, indem λ zunimmt, indem zum Beispiel das Gewicht P nach p hinabrückt, b abnehmen, weil zugleich das Gewicht Q nach q gerückt und $l-\lambda$ verkleinert wird. Die Abnahme von b hängt, wenn die Lage der Ebne DE gegeben ist, auf bestimmte Weise von der Zunahme des λ ab, und ist daher durch diese bestimmt. Indem beide Gewichte nach p und q verschoben werden, kann nicht mehr auf der unter dem Winkel = a geneigten Ebne das Gleichgewicht statt finden, sondern die stützende Ebne müßte in q anders geneigt sein, also einen Winkel mit der vorigen machen;

oder wenn man eine Fläche bilden wollte, worauf Q immer dem P in seinen verschiedenen Lagen bei unveränderlicher Länge des Seiles das Gleichgewicht halten sollte, so müßte dieses eine krumme Fläche sein.

§. 184. Bemerkung. Wenn eine Last = Q auf einer krummen Fläche ruht, so wird offenbar die Kraft, welche jene erhalten kann, ganz wie bei einer geneigten Ebne bestimmt; man setzt nämlich mit Recht für den Neigungswinkel der krummen Fläche in einem bestimmten Puncte den Neigungswinkel an, welcher einer in diesem Puncte berührenden Ebne zukömmt.

§. 185. Die vorigen Betrachtungen ließen sich also auch hier anwenden und es ist aus dem vorigen leicht zu übersehen, daß man für kleine Verrückungen beider Gewichte, nach und nach die den veränderten Stellungen derselben entsprechenden Neigungswinkel von DE berechnen, und folglich wenigstens eine aus graden Stücken zusammengesetzte Linie angeben könnte, auf welcher Q fortgehen müßte, um dem fortgeschobenen P das Gleichgewicht zu halten, wenn l, die Länge des Seiles, unveränderlich bleibt.

Anmerkung. Die hier vorausgesetzten Kenntnisse erlauben nicht, die eben angedeutete Untersuchung durchzuführen; ich will daher nur einige Hauptpuncte derselben angeben. Ist Q nach q hinaufgerückt, indem P nach p herabsinkt, so ist, wenn man um C die Kreisbogen qs und Pr zieht, sQ die Verkürzung des einen und pr die gleichzeitige Verlängerung des andern Seiles, also Qs = rp; und wenn diese Größen sehr klein sind, daß man prP und Qsq als bei r und s rechtwinklichte Dreiecke betrachten kann, $Pp = \frac{pr}{\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta)}$ und $Qq = \frac{pr}{\mathrm{Cos}\,(a - b)}$. Indem der Körper um Pp herabsinkt, ist er nach verticaler Richtung um $Pp \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{pr \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,(\alpha - \beta)}$ gesunken und indem der andre Körper um Qq hinaufrückt, ist er vertical um $\frac{pr \,.\, \mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Cos}\,(a - b)}$ gestiegen; unsre Gleichung

$\frac{Q \cdot \mathrm{Cos}\, a}{\mathrm{Cos}\,(a-b)} = \frac{P \cdot \mathrm{Cos}\, \alpha}{\mathrm{Cos}\,(\alpha-\beta)}$ (§. 182.) heißt also, Q muß sich zu P verhalten, umgekehrt wie die verticalen Höhen, um welche diese Gewichte gleichzeitig steigen und sinken, oder die Neigung der zweiten Ebne muß so gewählt werden, daß das gleichzeitige Steigen und Sinken sich umgekehrt wie die Gewichte verhalte. Um dieses zu erhalten müßte Q auf einer gehörig gekrümmten Fläche steigen, und die richtige Anordnung dieser krummen Fläche fließt aus dem Satze, daß der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Körper immer in derselben Horizontallinie bleiben muß. Denn ist irgend einmal die Höhe von P über dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte $= h$ und die Tiefe von Q unter demselben $= k$, so ist (§. 94.) $k \cdot Q = h \cdot P$; nimmt nun h um d zu, so muß, wie wir eben gesehen haben, k um $\frac{P \cdot d}{Q}$ zunehmen, und es bleibt noch $\left(k + \frac{P \cdot d}{Q}\right) Q = (h + d)\, P$. Der Schwerpunct bleibt immer in gleicher Höhe. Kennt man also P und Q und die Höhe des einen über dem gemeinschaftlichen Schwerpuncte, so ist auch die Tiefe des andern unter demselben bekannt und folglich die Horizontallinie bekannt, in welcher Q sich befindet. Da man nun zugleich die Länge CQ kennt, so läßt sich für jede Höhe von P die zugehörige Lage von Q und folglich die krumme Fläche bestimmen, auf welcher Q sich hinauf bewegen muß, damit immerfort das Gleichgewicht bestehe.

§. 186. Ganz ähnliche Betrachtungen finden statt, wenn das Gleichgewicht P auf eine krumme Fläche sich stützend durch ein Gegengewicht gehalten wird. In Fig. 66. sei BGC eine solche Fläche, deren Gestalt man kennt, zum Beispiel von kreisförmigem Durchschnitte, so ist für jede Lage des einen Gewichts, etwa in G die Neigung der Tangente GT bekannt, und es läßt sich also auch hier die Krümmung der Fläche iFh bestimmen, auf welcher das zweite Gewicht fortrücken muß, um immer mit dem auf BGC fortgeschobenen Gewichte im Gleichgewichte zu sein, wenn beide durch ein über die Rolle A gehendes Seil verbunden sind.

§. 187. Anmerkung. Die Anmerkung zu §. 185. zeigt, daß der gemeinschaftliche Schwerpunct beider Gewichte, die ich P und Q nennen will, immerfort in gleicher Höhe bleibt; befand sich also (Fig. 66.) Q in F als P in C war, und ist FC horizontal, so liegt für diesen Augenblick der gemeinschaftliche Schwerpunct in FC und bleibt folglich immer in dieser Linie. Um zu zeigen, wie man nun die Curve findet, auf welcher Q fortgehen muß, will ich setzen Q sei = P, dann zieht man, wenn P sich in G befindet, eine Horizontale eben so tief unter CF als G oberhalb von CF entfernt ist, nimmt Ag so, daß AG + Ag = AC + AF sei, und zieht mit dem Halbmesser Ag einen Kreisbogen um A; wo dieser jene Horizontale schneidet, in g, da liegt ein Punct der verlangten Curve. Eben so sind H, h gleichzeitige Stellungen der gleichen Gewichte, denn H ist so hoch über CF als h unter derselben und AH + Ah = AC + AF. Wäre Q = 2 P, so müßte man, wie die zweite in der Figur dargestellte Curve zeigt, allemal g′ halb so tief unter als G über CF, h′ halb so tief unter als H über CF annehmen und AG + Ag′ = AC + AF = AH + Ah′ nehmen, und so in ähnlichen Fällen.

Der Fall einer solchen Betrachtung kömmt vor, wenn ein Körper GM, etwa eine Zugbrücke, um den festen Punct M gedreht wird, dann ist es so gut, als ob ein immer gleiches Gewicht (nämlich das halbe Gewicht der Brücke, wenn ihr Schwerpunct in der Mitte liegt), auf dem Kreise CGB fortgezogen würde. Soll nun das Aufziehen der Brücke vermittelst eines Seiles GAH geschehen, so hält ein bestimmtes Gegengewicht der Brücke in allen Stellungen das Gleichgewicht, wenn es auf der Curve iFgh (oder einer nach Verschiedenheit der Größe des Gegengewichts ähnlich bestimmten Curve) fortgeschoben wird.

Eine gründlichere Auflösung, als ich hier geben konnte, giebt Ide System der reinen und angewandten Mathematik. Th. I. S. 357.

§. 188. Erklärung. Der Keil ist ein dreiseitiges Prisma, dessen man sich zum Spalten eines Körpers bedient, indem man es zwischen zwei getrennte Theile eines Körpers hineintreibt.

§. 189. Aufgabe. Das Verhältniß zu bestimmen, in welchem die auf dem Keil in D wirkende Kraft

zu dem Widerstande stehen muß, welchen seine Seitenflächen BC, AC nach senkrechter Richtung leiden (Fig. 67.).

Auflösung. Wenn in D die Kraft = P senkrecht auf AB wirkt, um Kräfte = Q, welche in F und E senkrecht auf des Keiles Seitenflächen angebracht sind, zu überwältigen, so ist es so gut, als ob die Kräfte = Q beide in G, wo ihre Richtungen sich einander und die Mittellinie des Keils schneiden, angebracht wären. Ist der Winkel des Keils an seiner Schärfe ACB = α, so ist die in F wirkende Kraft = Q, den Seitenkräften = Q . Sin $\frac{1}{2}\alpha$ nach CD, und = Q . Cos $\frac{1}{2}\alpha$ senkrecht auf CD gleichgeltend. In eben solche Seitenkräfte wird die in E wirkende Kraft = Q zerlegt, und da hier die eine Seitenkraft = Q . Cos $\frac{1}{2}\alpha$ der vorigen auf CD senkrechten gleich und entgegengesetzt ist, die andre aber = Q . Sin $\frac{1}{2}\alpha$ sich mit der vorhin nach eben der Richtung wirkenden verbindet, so muß P = 2 Q . Sin $\frac{1}{2}\alpha$ sein, oder

$$P : Q = 2 . \text{Sin} \tfrac{1}{2}\alpha : 1 = AB : BC,$$

das ist, die Kraft, welche gegen des Keiles Rücken wirkt zu dem auf die eine Seitenfläche senkrechtem Drucke, wie die Breite des Rückens zur Seitenlinie des Keils.

§. 190. Die Reibung ist beim Forttreiben des Keiles sehr stark, aber da überhaupt die Wirkungsart des dem Spalten widerstehenden Körpers schwierig zu bestimmen ist, und die ganze Untersuchung wenig Interesse darbietet, so halte ich es für unnöthig, umständlich zu untersuchen, wie hier die Kräfte gegen einander wirken.

§. 191. Erklärung. Es sei AB (Fig. 68.) ein grader Cylinder, an welchem der Umfang der Grundfläche von C an in willkürliche Theile Cd, de u. s. w. getheilt ist. Man errichte in d, e und allen folgenden Theilungspuncten gegen die Grundfläche senkrechte Linien, die also in der Oberfläche des Cylinders liegen, und nehme allemal die Höhen dieser Senkrechten dem zwischen C und ihnen abgeschnittenen Bogen auf dem Umfange der Grundfläche proportional, nämlich df : eg

= Bogen Cd : Bogen Ce. Dann liegen die Endpuncte f, g, aller dieser Senkrechten in der Schraubenlinie.

§. 192. Wenn man auf der Schraubenlinie einen willkürlichen Punct K nimmt, so ist also seine Höhe KL dem Bogen CL proportional. Ist man um mehr als einen ganzen Umfang des Cylinders auf der Schraubenlinie fortgegangen, so ist die Höhe eines solchen Punctes M, ausgedrückt durch $LM = \frac{(\text{ganzer Umfang} + CL) . df}{Cd}$.

§. 193. Erklärung. Ein jeder Theil der Schraubenlinie, der genau durch einen ganzen Umfang des Cylinders läuft, heißt Ein Schraubengang zum Beispiel CKN oder KNM; die Entfernung KM = CN heißt die Höhe des Schraubenganges.

§. 194. Erklärung. Wenn man, dem Gange der Schraubenlinie folgend, eine Erhöhung auf dem Umfange des Cylinders ausarbeitet: so heißt dieser körperlich ausgearbeitete Schraubencylinder die Schraubenspindel. Schneidet man dagegen in eine der vorigen gleiche aber hohl ausgearbeitete Cylinderfläche, in welche jener Cylinder paßt, die Schraubenlinie ausgehöhlt aus, so ist dieses die Schraubenmutter, und jene paßt in diese, wenn der hier ausgeschnittene Schraubengang genau eben die Form hat, wie der dort aufliegende oder vorragende.

195. Bemerkung. Man gebraucht die Schraube, um Lasten zu heben oder sie unterstützt zu erhalten. Wenn man die in der festgehaltenen Schraubenmutter steckende Spindel nach einer Richtung, die mit dem Umfange des Cylinders übereinstimmend ist, dreht: so rückt jeder Punct C (Fig. 69.) in dem ausgeschnittenen Schraubengange der Mutter fort; und wenn beide vertical stehen, so wird eben dadurch die Spindel mit der auf ihr ruhenden Last gehoben.

Man kann hier jeden Punct des Schraubenganges der Spindel ansehen, als ob er sich stütze auf den ausgeschnit-

tenen Schraubengang der Mutter; es ist also so gut, als ob jeder Punct auf einer geneigten Ebne läge, deren Neigungswinkel durch die Höhe des Schraubenganges und den Umfang der Spindel bestimmt ist. Da das Steigen des Ganges für einen ganzen Umfang = a = der Höhe des Schraubenganges ist, und dieses Steigen gleichförmig in allen Puncten ist: so hat man, für den Halbmesser = r der Spindel, den Neigungswinkel = φ jedes Stückes des Schraubenganges gegen eine mit der Grundfläche parallele Ebne durch $\tan \varphi = \frac{a}{2 . r . \pi}$ bestimmt (wo $\pi = 3,14159...$), denn für jedes noch so kleine Stück $= \frac{1}{n}$ des Umfanges steigt der Gang um $\frac{1}{n}$ a, also ist die Neigung der Berührungslinie = φ, durch $\tan \varphi = \frac{a}{2.r.\pi}$ ausgedrückt.

§. 196. Aufgabe. Auf der vertical stehenden Schraubenspindel (Fig. 69.) ruht die Last = Q, man sucht die Kraft = P, welche am Umfange der Spindel wirken muß, um der Last das Gleichgewicht zu halten, wenn man auf die Friction keine Rücksicht nimmt.

Auflösung. Es sei der Halbmesser der Spindel = r, die Höhe des Schraubenganges = a, so ist jedes kleine Stück des Schraubenganges der Mutter als eine geneigte Ebne anzusehen, welche mit dem Horizonte den Winkel = φ macht, dessen Tangente $\tan \varphi = \frac{a}{2.r.\pi}$ ist. Denken wir uns nun die Last auf alle kleinen Theile des Schraubenganges, deren Zahl n heißen mag, gleich vertheilt, so liegt auf jedem Theile des Schraubenganges die Last $= \frac{1}{n}$ Q, die durch eine horizontal wirkende Kraft $= \frac{1}{n} Q . \tan \varphi = \frac{1}{n} Q . \frac{a}{2 . r . \pi}$ (nach §. 179.) erhalten werden muß. Die gesammte Kraft ist daher

$= Q \cdot \frac{a}{2 \cdot r \cdot \pi} = P$, oder diese verhält sich zur Last $= Q$, wie die Höhe des Schraubenganges zum Umfange der Spindel.

§. 197. So würde es sich verhalten, wenn keine Reibung vorhanden wäre. Diese ist aber bei der Schraube sehr groß, und ohne Zweifel dadurch noch vergrößert, daß erstlich selten die Schraubenspindel mit völliger Genauigkeit in die Mutter paßt, wodurch dann Klemmungen entstehen, die nicht bloß vom Drucke der Last abhängen; und zweitens die Schraubengänge, als nicht vollkommen fest beim Drucke der Last ihre Form etwas ändern und so jene Klemmungen vermehren.

Zehnter Abschnitt.

Vom Rade an der Welle, der Rolle und dem Flaschenzuge.

§. 198. Erklärung. Eine kreisförmige Scheibe, so an einen Cylinder befestigt, daß des Cylinders Axe durch der Scheibe Mittelpunct geht, und auf ihre Ebne senkrecht steht, heißt ein Rad an der Welle oder Axe, indem der Cylinder hier die Welle oder Axe genannt wird. Eine Rolle ist dieselbe Vorrichtung im Kleinen.

§. 199. Aufgabe (Fig. 70.). Die Welle BC ruht in einer gehörig angebrachten Unterlage; man sucht das Verhältniß der am Umfange des Rades in D nach der Richtung der Tangente des Rades wirkenden Kraft $= P$, zu der am Umfange der Welle, gleichfalls nach der Richtung der Tangente ziehenden Last $= Q$.

Auflösung. Wenn man auf die Reibung nicht

sieht, so ist (§. 97.) $P : Q = CB : CD$, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.

Will man auf die Reibung Rücksicht nehmen, so muß man erwägen, daß die in einem ausgehöhlten Lager ef ruhende Welle sich gegen die Unterlage da stützt, wo die mittlere Richtung aller wirkenden Kräfte sie hindrängt, zum Beispiel in g. Hier ist also g der einzige unterstützte Punct, und die Kräfte, welche bei g nach der Tangente einander entgegen wirken, müssen einander aufheben. Es sei die Richtung der Kraft Q unter dem Winkel BIR $= \beta$, die Richtung der Kraft P unter dem Winkel DmR $= \alpha$ gegen den Horizont geneigt, die in g gezogne Tangente gp mache mit dem Horizonte den Winkel $= \phi$, der sich leicht bestimmen ließe. Das Gewicht des Rades und der Welle selbst wollen wir, um leichter zu rechnen, bei Seite setzen.

Wenn die Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so ist es für den Druck auf g eben so gut, als ob P nach gh, Q nach gi, ihren wahren Richtungen parallel, wirkten (§. 100.). Da nun $pgh = \alpha + \phi$, $pgi = \beta + \phi$; so würde sich P nach gh wirkend, zerlegen
in eine Kraft nach gp, $= P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha + \phi)$,
in eine Kraft nach gk, $= P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi)$, wo gk senkrecht auf gp, und eben so die nach gi wirkende Kraft Q
in eine nach gp, $= Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta + \phi)$,
in eine nach gk, $= Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$. Von dem Drucke nach gk, welcher $= P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$ ist, hängt die Reibung ab, die ich
$= f . P \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi) + f \,.\, Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$ setze. Soll also die Welle in dieser Lage ruhen, so muß dieser aus der Reibung entstehende Widerstand die nach gp wirkenden Kräfte aufheben, und

$$P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha + \phi) + Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta + \phi)$$
$$= f \,.\, P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha + \phi) + f \,.\, Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta + \phi)$$

sein, damit kein Fortschieben der Welle in der Unterlage statt finde.

Zugleich müssen die zur Drehung wirkenden oder sie hindernden Kräfte einander im Gleichgewichte halten; ihre Momente müssen also gleich sein. Da nun P am Umfange des Rades wirkt, dessen Halbmesser $CD = r$, Q aber und auch die Reibung bei g am Umfange der Welle wirken, deren Halbmesser $= \varrho = CB = CG$, so ist $r \,.\, P = \varrho \,.\, Q + \varrho \,.\, f\,(P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta+\varphi))$.

Hier ergiebt sich die Größe von P am leichtesten durch folgende Rechnung:

Aus der ersten Gleichung ist

$$(P \,.\, \mathrm{Cos}\,(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta+\varphi))^2 = f^2\,(P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta+\varphi))^2$$

addirt man hiezu die identische Gleichung

$$(P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta+\varphi))^2 = (P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta+\varphi))^2,$$

so ist

$$P^2 + Q^2 + 2P \,.\, Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha) = (1+f^2) \,.\, (P \,.\, \mathrm{Sin}(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}(\beta+\varphi))^2.$$

Aber aus der zweiten Gleichung war auch

$$(P \,.\, \mathrm{Sin}\,(\alpha+\varphi) + Q \,.\, \mathrm{Sin}\,(\beta+\varphi))^2 = \frac{(r \,.\, P - \varrho \,.\, Q)^2}{\varrho^2\, f^2},$$

also $$\frac{P^2 + Q^2 + 2P \,.\, Q \,.\, \mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha)}{1+f^2} = \frac{r^2\, P^2 + \varrho^2\, Q^2 - 2r \,.\, \varrho\, P \,.\, Q}{\varrho^2\, f^2},$$

oder

$$P^2(r^2 + (r^2-\varrho^2)f^2) - 2P\,Q(r \,.\, \varrho(1+f^2) + \varrho^2 f^2 \,.\, \mathrm{Cos}(\beta-\alpha)) = -\varrho^2 \,.\, Q^2;$$

oder $$P^2 - 2P \,.\, \frac{Q \,.\, (r\varrho\,(1+f^2) + \varrho^2\, f^2\, \mathrm{Cos}\,(\beta-\alpha))}{r^2 + r^2\, f^2 - \varrho^2\, f^2} = -\frac{\varrho^2\, Q^2}{r^2 + f^2\,(r^2-\varrho^2)},$$ woraus P leicht bestimmt wird.

Anmerkung. Wenn die Last sehr groß ist, und folglich starke und unbiegsame Seile gebraucht werden, so muß man auch auf die wegen der Steifheit der Seile erforderliche Kraft Rücksicht nehmen, so wie dann auch die Reibung des Seiles am Umfange der Welle zu beachten ist.

Daß dieses richtig sei ergiebt sich, wenn man für die einzelnen Ringe weiter rechnet; für den letzten ist der innere Halbmesser $= \frac{n-1}{n} \cdot r$, der äußere Halbmesser $= r$; Inhalt $= \frac{n^2 \cdot r^2 - (n-1)^2 r^2}{n^2} \pi$, das ist $= \frac{(2n-1) r^2}{n^2} \pi$; Druck $= \frac{(2n-1)}{n^2} T$; Reibung $= \frac{(2n-1) f \cdot T}{n^2}$; Moment der Reibung $= (r - \frac{1}{2n} \cdot r) \frac{(2n-1) f \cdot T}{n^2} = \frac{(2n-1)^2 \cdot r f T}{2 \cdot n^3}$, weil man sich die Reibung mitten zwischen den Grenzen des Ringes vereinigt denkt.

Diese Bestimmung der Reibung wird desto genauer, je größer man n oder die Anzahl der Theile nimmt. Setzte man nur $n = 10$, so wäre $2n - 1 = 19$ und

$$x = \frac{r \cdot f \cdot T}{2 \cdot 1000} (1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 + 225 + 289 + 361)$$

das gäbe $x = \frac{1330}{2000} \cdot r \cdot f \cdot T$ (*), welches der Wahrheit schon sehr nahe kömmt, und nun wird

$$P = \frac{x}{R - \frac{1}{2} \varrho \cdot f}.$$

§. 201. Diese Rechnung kann immer dienen, das Moment der Reibung zu finden, und giebt, obgleich die

(*) Die Analysis zeigt, daß die Summe jener von 1^2 bis $(2n-1)^2$ fortgesetzten Reihe allgemein $= \frac{(8n^3 - 2n)}{6}$ ist. Das gäbe das gesammte Moment der Reibung $= r \cdot f\,T \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6n^2}\right)$, welches desto näher $= \frac{2}{3} \cdot r \cdot f \cdot T$ ist, je größer n genommen wird; es erhellt daher, daß $\frac{2}{3}$ r . f . T der wahre Werth des Momentes der Reibung ist.

Voraussetzung, daß die Reibung jedes Ringes mitten zwischen seinen Begrenzungen vereinigt sei, nicht genau richtig ist. Resultate, welche der Wahrheit nahe genug kommen. Es ist aber oft vortheilhafter, solche Größen, wie die hier zu bestimmenden, in geometrischer Form darzustellen. Hiezu dient folgende Zeichnung.

Es sei (Fig. 73.) iC der Halbmesser der Welle. Hier läßt sich, wenn man diesen in eine willkürliche Anzahl $= n$ Theile eintheilt, durch die Länge einer in jedem Theilungspuncte errichteten Senkrechten, das Moment der dort statt findenden Friction verhältnißmäßig darstellen. Ist nämlich $ih = \frac{m}{n}.r$; $ig = \frac{m+1}{n}.r$: so ist der Ring, welcher zwischen den mit diesen Halbmessern beschriebenen Kreisen liegt $= \frac{r^2\pi}{n^2}((m+1)^2 - m^2)$ $= \frac{r^2\pi(2m+1)}{n^2}$. Dieser Ring verhält sich also zur ganzen Grundfläche wie $\frac{(2m+1)}{n^2} : 1$, und die Belastung dieses Ringes ist $= \frac{(2m+1)}{n^2}T$, Reibung $= \frac{(2m+1)fT}{n^2}$; Moment der Reibung sehr nahe

$$= \frac{(m+\frac{1}{2})}{n}.r.\frac{(2m+1)}{n^2}f.T = \frac{(m+\frac{1}{2})^2.2rfT}{n^3}.$$

Für jeden Ring ist also das Moment der Reibung dem Quadrate des Abstandes vom Centro proportional. Trägt man nun die Senkrechten hk, gl, CF und alle übrigen so auf, daß sie durch $hk : gl = ih^2 : ig^2$;
$hk : CF = ih^2 : iC^2$,
und so in allen übrigen Puncten ausgedrückt werden: so stellt die Fläche hglk das Moment der auf dem Ringe hgmnop (Fig. 72.) statt findenden Reibung dar; die Fläche CFrq (Fig. 73.) das Moment der Reibung auf dem äußersten Ringe, und folglich die ganze Fläche

ikFCi das Moment der Reibung auf der ganzen Grundfläche der Welle.

Wie diese verhältnißmäßige Darstellung zu verstehen sei, läßt sich am besten so übersehen. Eben jene Welle vom Halbmesser $= r$, welche wir bisher als vertical stehend annahmen, sei wie in Fig. 70. horizontal gelegt und übe in g die Reibung $= f \cdot T$ aus, so ist das Moment der Reibung $= r \cdot f \cdot T$, weil sie in der Entfernung $= r$ vom Drehungspuncte wirkt. Wenn nun $\frac{ih + ig}{2} = \left(\frac{m + \frac{1}{2}}{n}\right) r = it$ in Fig. 73. ist, so hat man das Moment der Reibung auf dem durch hg angedeuteten Ringe $= \frac{2 \cdot it^2 \cdot f \cdot T}{n \cdot r}$, also, wenn $st : CF = it^2 : r^2$, und $CF = 2r \cdot f \cdot T$, ist, wird $st = \frac{it^2 \cdot 2f \cdot T}{r}$, und die Fläche $hgkl = \frac{1}{n} r \cdot st = \frac{2 \cdot f \cdot T \cdot it^2}{n}$, das Moment der Reibung auf dem zu hg gehörigen Ringe $= \frac{\text{Fläche } hglk}{r}$. Daraus ergiebt sich also der gesammten Reibung Moment $= \frac{\text{Fläche } ikFC}{r}$, und dieses verhält sich zum Momente der Reibung am Umfange der horizontalliegenden Welle in Fig. 70., welches $= r \cdot f \cdot T = \frac{1}{2} CF$ ist, wie die Fläche ikFCi zur Fläche $\frac{1}{2}$ iGFC, wenn iGFC ein aus den Seiten $iC = r$ und $CF = 2r \cdot f \cdot T$ gebildetes Rechteck ist.

Anmerkung. Die Linie ikF (Fig. 73.) ist eine Parabel, welche die Fläche $ikFC = \frac{2}{3}$ iGFC abschneidet, wie die Analysis lehrt.

§. 202. Bemerkung. Die Bewegung unsrer zwei- und vierrädrigen Fuhrwerke hängt ganz von den Betrachtungen in §. 199. ab. In Fig. 74. stellt CH die Axe vor, um welche das Rad DF beweglich ist. Bleiben wir bei dem einfachsten Falle stehen, wo der

Wagen auf horizontalem Boden DK soll fortgezogen werden, und wo auch die fortziehende Kraft nach horizontaler Richtung BE wirkt: so sind die Hauptumstände der Bewegung folgende. Die Axe CH ist mit einer Last = Q beschwert; die vertical niederwärts nach BD ihren Druck ausübt; die horizontal wirkende Kraft = P würde die ganz vom horizontalen Boden getragene Last ohne Schwierigkeit fortziehen, wenn keine Reibung da wäre; sie würde bloß eine einfache der Last proportionale Reibung zu überwältigen haben, wenn das Rad an der Axe fest befestigt wäre; dann würde die zum Fortziehen erforderliche Kraft = f (Q + R) sein, wenn außer der gesammten Belastung der Axe noch das Gewicht = R des Rades in Rechnung gebracht wird. Man macht aber nun das Rad um die Axe beweglich, weil die Reibung des Rades am Boden viel leichter beim Wälzen des Rades als beim Fortschleifen überwunden wird.

Wegen der zwei auf die Axe wirkenden Kräfte = Q nach BD, und = P nach BE wird die Axe nach der Richtung BC der Mittelkraft, gegen die innere Höhlung oder die Nabe CG des Rades gedrängt, und indem das Rad wegen des Widerstandes bei D anfangen will sich fortzuwälzen, leidet es bei C eine Reibung an der Axe. Die nach BC wirkende Mittelkraft ist bei unsern Voraussetzungen $= \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ (nach §. 52.), die Reibung, welche einen immer gleichen Theil des Druckes beträgt, sei $= \varphi \cdot \sqrt{(P^2 + Q^2)}$, und ihr Moment wird, da die Drehung um den Mittelpunct des Rades geschieht $= r \cdot \varphi \cdot \sqrt{(P^2 + Q^2)}$, sein, wenn AC = r ist. Des Rades Halbmesser sei $= \varrho$, so wird eine Kraft

$= \frac{r}{\varrho} \varphi \cdot \sqrt{(P^2 + Q^2)}$; am Umfange des Rades in D

wirkend, der Drehung mit eben der Gewalt widerstehen, wie jene Reibung bei C, und wir können uns daher diese Kraft statt der Reibung bei C jetzt bei D angebracht denken, wo nun die Reibung am Boden, die = F. (Q + R) heißen mag, sich mit ihr vereiniget. F muß hier als

§. 212. **Bemerkung.** Man fordert zu einer guten Einrichtung des Räderwerkes, daß eine gleichförmige Drehung des einen Rades auch eine gleichförmige Bewegung des andern Rades hervorbringe, und daß eine gleibleibende Kraft in G auch mit unveränderlicher Gewalt das Rad CB umtreibe, während andre und andre Puncte der Zähne einander berühren. Die Figur der Zähne muß daher so bestimmt werden, daß der Punct B auf dem einen Umfange einen eben so großen Weg durchlaufe, als der Punct B auf dem Umfange des andern Kreises, und daß die zur Drehung von CB verwandte Kraft unveränderlich bleibe.

§. 213. **Aufgabe.** Für das Stirnrad die beste Figur der Zähne zu finden, wenn diese in einen Trilling eingreifen, dessen cylindrische Stäbe von sehr geringem Durchmesser sind.

Auflösung. Es sei (Fig. 79.) ZAX der Umfang des Rades, C sein Mittelpunct. G sei der Mittelpunct des Trillings, auf dessen Umfang OAW die Stäbe A, O; deren Querschnitte wir hier als Puncte ansehen, sich befinden.

Ist nun A der Punct, wo der Umriß des Zahnes in den Kreis ZAX einschneidet, und wo dieser von dem Kreise berührt wird, auf welchem die Trillingsstöcke eingesetzt sind: so erhält man den Umriß der Vorderseite des Zahnes nach folgender Regel:

Man nehme einen willkürlichen Bogen AB, und nehme zugleich auf dem Umfange des Kreises AOW, wo die Trillingsstöcke eingesetzt sind, einen eben so langen Bogen, AO = AB, so daß der Winkel am Mittelpuncte $AGO = \frac{AC}{AG} . ACB$. Zieht man nun CO, nimmt nach der andern Seite von A den Winkel ACd = BCO, und den Abstand vom Centro Co = CO, so ist o ein Punct in der verlangten Umfangslinie des Zahnes. — So wie dieser Punct bestimmt ist, kann man mehrere

iehende Kraft noch eben so groß sein müßte, als die nach er Richtung BE wirkende. Geht aber das Seil FGH ibermals um eine Rolle GH, die in derselben Hülse beweglich ist, an welcher die Last hängt: so hängt nun die Last an vier Seilen und wird folglich durch eine geringere Kraft getragen u. s. w.

§. 204. Erklärung. Eine solche Verbindung von Rollen, wie eben beschrieben ist, heißt ein Flaschenzug, weil man die durch eine gemeinschaftliche Hülse verbundenen Rollen eine Flasche oder Kloben genannt hat (Fig. 76.).

§. 205. Aufgabe. An der Hülse des Flaschenzuges (Fig. 76.) hängt eine Last = P; zu bestimmen, welche Kraft = R bei L wirken muß, um jener das Gleichgewicht zu halten.

Auflösung. Wenn wir die Reibung und den Widerstand wegen Steifheit der Seile bei Seite setzen: so läßt sich die durch die Kraft R hervorgebrachte Spannung der einzelnen Seile auf folgende Weise beurtheilen. Da R an dem Hebelarme NK wirkt, so würde eine in I nach der Tangente wirkende Kraft ihr gleich sein müssen, um ihr das Gleichgewicht zu halten, da NK = NI ist. Die Spannung des Seiles IH ist also = R. Würde das von H nach G und Q gehende Seil in Q festgehalten, so leidet der in Q festgehaltene Punct einen Druck = R, oder es ist so gut, als ob eine Kraft = R nach HI, und eine Kraft = R nach GQ die Rolle GH aufwärts drückte. Sind GQ, HI nicht parallel, sondern unter dem Winkel = η gegen einander geneigt, so bringen diese Kräfte R, und R auf die Axe O der Rolle einen Druck hervor, der (§. 63.) $= \sqrt{(R^2 + R^2 + 2R^2 \cdot \operatorname{Cos}\eta)}, = R\sqrt{(2 + 2\operatorname{Cos}\eta)}$. Da nun GOH $= 180^\circ - \eta$, und (Trigon. §. 65.)

$$GO : GH = R : R \cdot \sqrt{(2 - 2\operatorname{Cos} GOH)},$$
$$= R : R \cdot \sqrt{(2 + 2\operatorname{Cos}\eta)},$$ indem

$\frac{1}{2} GH = GO \cdot \operatorname{Sin} \frac{1}{2} GOH = \frac{1}{2} GO \cdot \sqrt{(2 - 2\operatorname{Cos} GOH)}$

ist: so ist dieser Druck $= \frac{R \cdot GH}{GO}$, welcher P grade entgegen wirkt.

Es läßt sich leicht übersehen, daß die Spannung des Seiles EB, wenn Q nicht festgehalten wird, sondern das Seil über FE läuft, immer noch $= R$ ist, und daß auch in DA die Spannung $= R$ statt findet. Die Axe C wird also von einem Drucke $= \frac{R \cdot AB}{AC}$ aufwärts getrieben, und wenn beide Axen C und O in derselben Hülse fest verbunden sind, so wirkt dieser und der vorhin gefundene Druck der Last P entgegen, so daß

$P = R \cdot \frac{GH}{GO} + R \cdot \frac{AB}{AC}$ wird, und R auf ähnliche Weise gegen P bestimmt würde, wenn auch mehrere Rollen auf gleiche Weise verbunden wären.

Sind die Seile parallel, so werden die Sehnen GH, AB Durchmesser und dann ist $\frac{GH}{GO} = \frac{AB}{AC} = 2$, also $R = \frac{1}{4} P$; oder die Last P wird denn auf alle Seile IH, FG, EB, DA gleich vertheilt, und R trägt nur den Theil, der durch die Anzahl der Seile bestimmt wird.

Um auf den Widerstand Rücksicht zu nehmen, den die Reibung an den Axen, die Reibung der Seile, und die Steifheit der Seile der Bewegung entgegensetzt, müßte man für jede Rolle einzeln rechnen. Soll HI mit der Kraft $= R$ gespannt werden, so müßte, wenn kein weiterer Widerstand da wäre, in L eine Kraft $= R$ wirken, diese Kräfte üben, wenn sie mit einander parallel wirken, auf die Axe N einen Druck $= 2R$ aus, und die Reibung an der Axe kann durch $= 2 f \cdot R$ ausgedrückt werden. Um dieser Reibung willen muß die in L wirkende Kraft um $\frac{1}{n} \cdot 2 f \cdot R$ vermehrt werden, wenn der Halbmesser der Axe $= \frac{1}{n} \cdot NK$ ist. Auf ähnliche Art könnte man auf die Reibung und Steifheit des Seiles

es Mal oga $= \frac{R.\varphi}{r}$ gefunden, und folglich der Ab-
nd Co aus der Gleichung

$$o^2 = r^2 + (R+r)^2 - 2 . r . (R+r) . \text{Cos} \frac{R.\varphi}{r}$$ und

r Winkel aCd $= \varphi -$ ACd ist bestimmt durch

$$\text{Sin aCd} = \frac{r . \text{Sin} \frac{R.\varphi}{r}}{\text{Co}}.$$

Nach diesen Gleichungen kann man jeden Punct der picycloide oder jeden Punct im Umfange des Zahns in r Zeichnung eintragen; denn wenn man $\varphi = 1^\circ$, $= 2^\circ$ u. s. w. annimmt, so ist damit ACo und Co, so die Lage des Punctes o völlig bestimmt.

§. 215. Wir haben noch zu beweisen, daß (Fig. 9.) AO auf die Epicycloide in O senkrecht ist, oder daß ien das für ao in Fig. 80. gilt. Wenn man sich vor-ellt, der Kreis werde ein wenig weiter von a nach α ge-älzt: so wird der Mittelpunct g nach γ und der Punct nach ω gerückt, und da im ersten Augenblicke der wäl-nde Kreis sich so um a dreht, als ob a der Mittelpunct r Drehung wäre, so ist der sehr kleine Bogen oω, wel-en o beschreibt, gegen oa senkrecht (*). Die Rich-ng des Bogens der Epicycloide ist also in jedem Puncte durch die von o nach dem andern Endpuncte h des Durchmessers ah gezogene Linie oh bestimmt, oder ho t in o eine Tangente der Epicycloide.

(*) Eigentlich rückt der Mittelpunct der Drehung von a nach α fort, und zugleich vergrößert sich der Halbmesser der Drehung und wird $= \alpha\omega$; man kann daher nicht den Bogen oω als einen um a beschriebenen Kreisbogen ansehen; aber der Bogen ist bei o senkrecht auf oa, und bei ω senkrecht auf ωα, er kommt daher nahe überein mit einem um den Mittelpunct k gezogenen Kreisbogen, wenn k der Durchschnittspunct der Linien oa, ωα ist, und aα sehr klein genommen würde.

Es läßt sich leicht übersehen, daß auch hier die bei M oder die eben so starke bei O wirkende Kraft = R sich zur Last P umgekehrt verhält, wie die Wege, die sie bei entstehender Bewegung durchlaufen müßten; oder daß auch hier das Product aus der Kraft in ihren Weg so groß ist, als das Product aus der Last in ihren Weg, wenn man sich eine Verrückung des Systems denkt.

Eilfter Abschnitt.

Vom Räderwerk und der besten Form der Radzähne.

§. 208. Erklärung. Wenn am Umfange des Rades Vorragungen aufgesetzt oder ausgeschnitten sind, welche in die Einschnitte oder Vertiefungen am Umfange eines andern Rades eingreifen und dieses dadurch herumtreiben: so heißen solche Räder gezähnte Räder, indem die in einander greifenden Vorragungen beider Räder Zähne heißen.

Man bringt manchmal mehrere Räder auf diese Art in Verbindung und erhält so das Räderwerk.

§. 209. Erklärung. Ein gezähntes Rad heißt ein Stirnrad, wenn sich die Zähne in der kreisförmigen Ebne des Rades selbst befinden, und über den Umfang hervortreten. Es heißt ein Kammrad, wenn die Zähne senkrecht gegen die Ebne des Rades am Umfange desselben angebracht sind. Beide Arten von Räder läßt man häufig in einen Trilling eingreifen, der aus parallelen, cylindrischen, im Kreise stehenden und zwischen zwei parallelen Kreisebnen befestigten, Stäben besteht.

§. 210. Aufgabe. Zu bestimmen, in welchem Verhältnisse Kraft und Last zu einander stehen müssen,

telpuncte der Getriebestöcke bewirkt, und für welche die immer gleiche, das Getriebe drehende Kraft, auch einen immer gleichen Druck, um die Stange fortzuschieben, ausübt.

§. 219. Aufgabe. Wenn die Trillingsstöcke sehr dünne sind, so daß man ihre Querschnitte als Puncte betrachten darf, die beste Figur der Zähne an der graden Stange BH zu bestimmen (Fig. 81.).

Auflösung. Soll EAM den Kreis vorstellen, auf dessen Umfange die Trillingsstöcke eingesetzt sind, und A ist der Punct, wo eines Zahnes Vorderseite in die Linie BA einschneidet: so nehme man AB gleich dem Kreisbogen AE und ziehe ED von E auf AB senkrecht, nehme Ad = BD und den senkrechten Abstand de = DE; dann ist e ein Punct im Umfange des Zahnes. Da man für E nach und nach andre Puncte annehmen kann, so erhält man nach dieser Regel so viele Puncte im Umrisse des Zahnes, als man verlangt.

Beweis. Wenn sich die Stange so fortschiebt, daß der Punct A nach B kömmt: so hat der Zahn AA' die Stellung BB' eingenommen und e ist nach E gerückt, weil BD = Ad, DE = de ist. Befand sich also in A ein Getriebestock an dem Zahne anliegend, so ist dieser nach E fortgeschoben, und der von ihm durchlaufene Bogen ist genau so lang, als die Entfernung AB, durch welche die Stange fortgeschoben ist. Eine gleichförmige Bewegung der Stange bewirkt also eine gleichförmige Bewegung des Getriebes.

Aber auch die Bedingung, daß eine unveränderliche, die Stange fortschiebende Kraft immer gleich auf die Drehung des Trillings einwirke, wird erfüllt. Es ist nämlich AE auf den Umriß des Zahnes in E senkrecht (aus ganz ähnlichen Gründen wie §. 215.), drängt also eine Kraft = P die Stange nach der Richtung AB vorwärts, so ist es eben so gut, als ob in E eine Kraft = P nach EF wirkte.

Nenne ich ECA = φ, so ist FEA = $180^\circ - \frac{1}{2}\varphi$; (Geom. 269.); und wenn ich P nach den Richtungen Eg,

so ist $\frac{CA}{CO \cdot \text{Sin } DOA} = \frac{1}{\text{Sin } OAC}$, also jene nach Oa wirkende Kraft $= \frac{P}{\text{Sin } OAC}$. Zerlegt man diese nach Oa wirkende Kraft in eine nach der Tangente OT des Trillings gerichtete und in eine nach der Verlängerung von OG wirkende, das heißt bloß auf den Mittelpunct G drückende: so ist die nach OT wirkende

$$= \frac{P}{\text{Sin } OAC} \cdot \text{Cos } TOa.$$ Es ist aber TOa $= 90 - GOA$ und folglich

$$\text{Cos } TOa = \text{Sin } GOA = \text{Sin } GAO = \text{Sin } OAC,$$

also $\frac{P}{\text{Sin } OAC} \cdot \text{Cos } TOa = P$, das heißt, die Kraft, welche zum Umtreiben des Trillings nach der Richtung seiner Tangente wirkt, genau so groß und bei allen Stellungen des Zahnes so groß, als die nach der Tangente des Rades wirkende Kraft.

Die angegebene Gestalt des Zahnes leistet also beiden Bedingungen Genüge.

§. 214. Die krumme Linie AoA', in welcher nach Anleitung des vorigen §. so viele Puncte, als man bedurfte, bestimmt werden können, heißt die Epicycloide. Man kann sich ihre Entstehung so vorstellen. OAW (Fig. 80.) sei ein beweglicher Kreis, welcher auf dem Umfange ZAX eines andern Kreises fortgewälzt wird, so beschreibt ein Punct A im Umfange des wälzenden Kreises die Epicycloide AoA'. Denn indem der wälzende Kreis in die Lage aow gelangt, ist der Punct A im Umfange desselben nach o gerückt, wenn der Bogen Aa = ao ist. Die vorausgesetzte Gleichheit der Bogen Aa, ao giebt den Winkel oga $= \frac{Ca}{ga} \cdot ACa$, und es wird aus den gegebnen Halbmessern $Ca = R$, $ga = r$ und dem willkürlich angenommenen Winkel $ACa = \varphi$,

es Mal oga $= \frac{R . \varphi}{r}$ gefunden, und folglich der Ab-
nd Co aus der Gleichung

$$)^2 = r^2 + (R+r)^2 - 2 . r . (R+r) . \mathrm{Cos} \frac{R . \varphi}{r}$$ und

r Winkel aCd $= \varphi -$ ACd ist bestimmt durch

$$\mathrm{Sin}\, aCd = \frac{r . \mathrm{Sin} \frac{R . \varphi}{r}}{Co}.$$

Nach diesen Gleichungen kann man jeden Punct der
picycloide oder jeden Punct im Umfange des Zahns in
r Zeichnung eintragen; denn wenn man $\varphi = 1°$,
$= 2°$ u. s. w. annimmt, so ist damit ACo und Co,
so die Lage des Punctes o völlig bestimmt.

§. 215. Wir haben noch zu beweisen, daß (Fig.
).) AO auf die Epicycloide in O senkrecht ist, oder daß
en das für ao in Fig. 80. gilt. Wenn man sich vor-
ellt, der Kreis werde ein wenig weiter von a nach α ge-
älzt: so wird der Mittelpunct g nach γ und der Punct
nach ω gerückt, und da im ersten Augenblicke der wäl-
nde Kreis sich so um a dreht, als ob a der Mittelpunct
r Drehung wäre, so ist der sehr kleine Bogen oω, wel-
en o beschreibt, gegen oa senkrecht (*). Die Rich-
ung des Bogens der Epicycloide ist also in jedem Puncte
durch die von o nach dem andern Endpuncte h des
urchmessers ah gezogene Linie oh bestimmt, oder ho
t in o eine Tangente der Epicycloide.

*) Eigentlich rückt der Mittelpunct der Drehung von a nach α fort, und zugleich vergrößert sich der Halbmesser der Drehung und wird $= \alpha\omega$; man kann daher nicht den Bogen oω als einen um a beschriebenen Kreisbogen ansehen; aber der Bogen ist bei o senkrecht auf oa, und bei ω senkrecht auf $\omega\alpha$, er kommt daher nahe überein mit einem um den Mittelpunct k gezogenen Kreisbogen, wenn k der Durchschnittspunct der Linien oa, $\omega\alpha$ ist, und aα sehr klein genommen würde.

§. 216. Bemerkung. Diese Betrachtung setzt die Trillingsstöcke als sehr dünne, oder eigentlich als ohne alle Dicke voraus. Verlangt man die richtige Form für Zähne, die in cylindrische Trillingsstöcke von beträchtlichem Durchmesser eingreifen sollen, so muß man eine Curve zeichnen, welche überall von der für den Mittelpunct der Stöcke passenden Epicycloide um die halbe Dicke der Stöcke entfernt ist.

Diesen Fall und mehrere andre betrachtet Eytelwein in der Statik fester Körper 10. Capitel.

§. 217. Bemerkung. Wenn das in den Trilling eingreifende Rad ein Kammrad ist, so liegen die Kreisflächen des Rades und Trillings nicht in einer Ebne, sondern die gegen die Ebne des Kammrades senkrechten Zähne oder Kämme greifen in die Stöcke des Getriebes, die gegen die Drehungsebne des letztern senkrecht oder schief sein können.

Da die Kreislinien, in welcher die Zähne des Rades und die Getriebestöcke stehen, sich in einer durch beide gehenden Kugelfläche befinden (Geom. §. 553.): so ist es einleuchtend, daß die Wälzung des einen Kreises über dem andern hier so gedacht werden muß, daß jeder Punct im Umfange des wälzenden Kreises immer in jener Kugeloberfläche bleibe. Die Figur der Zähne wird daher hier vermittelst der sphärischen Epicycloide bestimmt, welches diejenige auf der Kugelfläche gezeichnete Curve ist, die ein Punct des wälzenden Kreises beschreibt, wenn er überall gegen den ruhenden Kreis eine gleiche Neigung behält.

Ich muß diese Untersuchung hier übergehen und auf Eytelwein verweisen, der am angeführten Orte umständlich hiervon handelt.

§. 218. Bemerkung. Oft setzt man auch einen Trilling durch eine gezähnte grade Stange in Bewegung, so daß die Stöcke des Trillings die Zähne der graden Stange, oder diese jene fortschieben. Auch hier würde man diejenige Gestalt der Zähne als die beste ansehen, welche ein gleiches Fortschieben der Stange und der Mit-

:lpuncte der Getriebestöcke bewirkt, und für welche die im-
ıer gleiche, das Getriebe drehende Kraft, auch einen immer
leichen Druck, um die Stange fortzuschieben, ausübt.

§. 219. Aufgabe. Wenn die Trillingsstöcke sehr ünne sind, so daß man ihre Querschnitte als Puncte etrachten darf, die beste Figur der Zähne an der graden Stange BH zu bestimmen (Fig. 81.).

Auflösung. Soll EAM den Kreis vorstellen, uf dessen Umfange die Trillingsstöcke eingesetzt sind, und ı ist der Punct, wo eines Zahnes Vorderseite in die inie BA einschneidet: so nehme man AB gleich dem kreisbogen AE und ziehe ED von E auf AB senkrecht, ehme Ad = BD und den senkrechten Abstand de = DE; aun ist e ein Punct im Umfange des Zahnes. Da man ür E nach und nach andre Puncte annehmen kann, so :hält man nach dieser Regel so viele Puncte im Umrisse es Zahnes, als man verlangt.

Beweis. Wenn sich die Stange so fortschiebt, aß der Punct A nach B kömmt: so hat der Zahn AA' ie Stellung BB' eingenommen und e ist nach E gerückt, veil BD = Ad, DE = de ist. Befand sich also in A n Getriebestock an dem Zahne anliegend, so ist dieser ach E fortgeschoben, und der von ihm durchlaufene Bogen ist genau so lang, als die Entfernung AB, durch velche die Stange fortgeschoben ist. Eine gleichförmige Bewegung der Stange bewirkt also eine gleichförmige Bewegung des Getriebes.

Aber auch die Bedingung, daß eine unveränderliche, ie Stange fortschiebende Kraft immer gleich auf die Drehung des Trillings einwirke, wird erfüllt. Es ist ıämlich AE auf den Umriß des Zahnes in E senkrecht aus ganz ähnlichen Gründen wie §. 215.), drängt also ine Kraft = P die Stange nach der Richtung AB vor- värts, so ist es eben so gut, als ob in E eine Kraft = P nach EF wirkte.

Nenne ich ECA = φ, so ist FEA = $180^\circ - \frac{1}{2}\varphi$; Geom. 269.); und wenn ich P nach den Richtungen Eg,

senkrecht auf des Zahnes Oberfläche und ED senkrecht auf die Stange zerlegt annehme, so ist der auf den Zahn senkrechte, nach Eg gerichtete Druck

$= \frac{P}{\mathrm{Cos}\, FEg} = \frac{P}{\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}\, \phi}$. Denkt man sich nun eine nach der Tangente EG des Getriebes wirkende Kraft $= Q$, so läßt sich auch diese nach Eg senkrecht auf des Zahnes Oberfläche und nach EC gegen des Getriebes Mittelpunct drückend zerlegen, und die nach gE wirkende Kraft ist $= \frac{Q}{\mathrm{Cos}\, GEg} = \frac{Q}{\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}\, \phi}$. Eine Kraft $= Q$ $= P$ nach der Richtung der Tangente des Getriebes bewirkt also eben den Druck senkrecht auf die Oberfläche des Zahns, wie eine Kraft $= P$ nach der Richtung der Stange wirkend; oder damit auf die Oberfläche des Zahnes ein gleicher Druck entstehe, müssen die nach GE und nach EF wirkenden Kräfte gleich sein. Und hieraus erhellt, daß die angegebne Form des Zahns auch der zweiten Bedingung Genüge thut.

§. 220. Die hier bestimmte Curve, nach welcher die Vorderseite des Zahnes gebildet werden muß, ist die Cycloide oder Radlinie. Nach der angegebnen Zeichnung ist, wenn ich (Fig. 81.) $AC = r$ nenne, $AB = AE = r.\phi$, oder wenn ϕ in Graden gegeben ist $= r. \frac{\pi.\phi}{360^\circ}$; AD dagegen ist $= r.\mathrm{Sin}\phi$, also $BD = Ad = r.\phi - r.\mathrm{Sin}\phi$ und $ED = ed = r - r.\mathrm{Cos}\,\phi = r.\mathrm{Sin\,vers}\,\phi$. Für verschiedene Werthe von ϕ kann man also Ad nebst dem zugehörigen ed bestimmen, und so die ganze Cycloide zeichnen.

Nenne ich $Ad = y$, $de = x$, so ist auch $r.\mathrm{Cos}\,\phi = r - x$ oder $\frac{r-x}{r}$ der Cosinus des Bogens ϕ, das ist umgekehrt ϕ der Bogen dessen Cosinus $= \frac{r-x}{r}$, oder $\phi = \mathrm{Arc}.\mathrm{Cos}\frac{r-x}{r}$ oder

$\varphi = \text{Arc} . \text{Sin} \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$; denn der Bogen dessen

Cosinus $= \frac{r - x}{r}$, hat den Sinus $= \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}$.

Es ist also

$$y = r . \left(\text{Arc} . \text{Sin} \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r} - \frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r} \right),$$

die Gleichung für die Cycloide, welche y bestimmt, wenn man x nach Willkür annimmt.

§. 221. Die Cycloide wird durch den Punct A im Umfange des Kreises AEM beschrieben, wenn dieser sich über AH so fortwälzt, daß der fortgewälzte Bogen dem Wege auf AH gleich ist. Wenn nämlich der Kreis nach IKL gelangt ist, so ist der Punct A nach K hin gerückt (Fig. 81.) und der Bogen IK = AI. Heißt hier IC'K $= \varphi$, so ist NI $= r . \text{Sin}\, \varphi$, also AN $= r . \varphi - r . \text{Sin}\, \varphi$, und KN $= r . \text{Sin verſ}\, \varphi = r\,(1 - \text{Coſ}\, \varphi)$ (vergl. Trig. §. 14. 20.).

Wenn der Kreis IKL sich ein wenig weiter wälzt, so ist der erste Anfang seiner Bewegung so, als ob er sich um I drehte; daher ist der Bogen Kk der Cycloide senkrecht auf IK, so wie der Bogen bei E senkrecht auf EA. Dieser Mittelpunct der Drehung rückt von I nach i fort, während K nach k gelangt, und KI, ki sind senkrecht auf die Tangenten der Cycloide in K und k. Wenn diese Linien verlängert sich in T schneiden, so wird (wofern K, k sehr nahe an einander liegen) ein um T mit dem Halbmesser KT gezogener Kreisbogen nahe mit dem Bogen Kk der Cycloide zusammen fallen. Es ist aber KIN $= \frac{1}{2}\varphi$, wenn KC'I $= \varphi$ (Geom. §. 269.); heißt also Ii $= r . \psi$ oder ic'k $-$ iC'K $= \psi$: so ist kiN $= \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi$, und ITi $= \frac{1}{2}\psi$, also

IT $= \frac{\text{Ii} . \text{Sin} \frac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\text{Sin} \frac{1}{2}\psi}$, oder, weil bei sehr kleinen

Werthen von ψ, Sin $\frac{1}{2}\psi$ als $= \frac{1}{2}\psi$ und Coſ $\frac{1}{2}\psi$ als $= 1$ kann angesehen werden,

$$IT = Ii \cdot \frac{\text{Sin} \frac{1}{2} \phi}{\text{Sin} \frac{1}{2} \psi} + Ii \cdot \text{Cos} \frac{1}{2} \phi,$$

$$IT = \frac{r \cdot \psi \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \psi} + r \cdot \psi \cdot \text{Cos} \frac{1}{2} \phi,$$

$$IT = 2r \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} \phi + r \cdot \psi \cdot \text{Cos} \frac{1}{2} \phi,$$

welches für ein sehr kleines ψ nicht merklich von $IT = 2r \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} \phi = KI$ verschieden ist. Also ist $KT = 2KI$ der Krümmungshalbmesser der Cycloide in K, das ist der Halbmesser eines mit der Cycloide dort übereinstimmenden Kreises.

§. 222. Auch hier müßte man auf die Dicke der Getriebe Rücksicht nehmen, und die Curve auf ähnliche Weise wie §. 216. verbessern.

§. 223. Andre hier vorkommende, noch sehr mannigfaltige Betrachtungen übergehe ich, z. B. wie die Zähne müßten eingerichtet sein, wenn des Getriebes Zähne gradlinigt, nach Radien des Kreises EAM abgeschnitten wären; wie man die Reibung an den Zähnen, wie man ihre vortheilhafteste Höhe u. dergl. bestimmt. Alles dies findet man bei Eytelwein.

§. 224. Bemerkung. Man gebraucht oft, um eine vertical stehende Stange VW (Fig. 82.) vermittelst der horizontalen Hebezapfen AB zu heben, ein Rad auf dessen Umfange die Daumen Ah aufgesetzt sind. Dieses ist z. B. der Fall bei den Stampfern, die alsdann durch ihr eignes Gewicht herabfallen. Hier muß die Gestalt der Hebedaumen so bestimmt werden, erstlich daß die Hebung AH des Zapfens in jedem Augenblicke so viel betrage, als der Bogen AM, damit bei gleichförmiger Drehung des Rades auch das Heben gleichförmig geschehe, und zweitens so daß die immer gleiche Kraft, welche die Daumenwelle EGM dreht, mit immer gleicher Kraft das unveränderliche Gewicht des Stampfers hinaufdränge.

§. 225. Aufgabe. Die beste Form der Hebedau-

nien zu finden, damit die angegebenen Bedingungen erfüllt werden.

Auflösung. Es sei BC (Fig. 82.) der Stampfer, welcher durch die Hebelatte BA, welche immer horizontal bleibt, erhoben werden soll. In BA sei die Hebelatte in der Stellung, wo ihre untere Seite gegen den Mittelpunct G der Welle gerichtet ist. Die Figur des Daumens wird nun so gefunden. Man nimmt auf auf der durch A gezogenen Tangente AH des Kreises AMM, in welchem der Punct A um den Mittelpunct G fortrückt, die Entfernung AH gleich dem Bogen AM, zieht den Halbmesser MG, und verlängert ihn, bis die aus H auf ihn gezogene Senkrechte HN ihn trifft. Man nimmt nun, Gn = GN und darauf in n senkrecht nh = NH: so ist h ein Punct im Umfange des Daumens. Andre Puncte h′ im Umfange des Daumens werden eben so aus AH′ = AM′, Gn′ = GN′ und h′n′ = H′N′ gefunden.

Beweis. Hier ist offenbar, während das Rad sich von A bis M gedreht hat, der Punct A der Hebelatte bis H gehoben, weil Ah dann in die Lage MH gekommen ist. Offenbar ist hier AH = dem Bogen AM, also die Hebung dem von A durchlaufenen Bogen gleich, und eine gleichförmige Drehung der Welle hebt den Stampfer gleichförmig. Um die hiebei wirkenden Kräfte zu vergleichen, sei die in der Entfernung = AG vom Mittelpuncte der Welle angebrachte, die Drehung bewirkende Kraft = P: so übt diese in H eine Gewalt senkrecht auf den Radius GH aus, die $= \frac{P \cdot AG}{GH}$ ist. Diese wirkt der in H vertical herabwärts drückenden Kraft = Q schief entgegen, und Q bringt senkrecht auf HG einen Druck $= Q \cdot \text{Sin}\, AHG = \frac{Q \cdot AG}{HG}$ hervor. Dieser ist so groß, wie die aus der Drehungskraft = P gefundene in H senkrecht auf GH wirkende Kraft, wenn

Q = P. Also ist zur Drehung der Welle eine immer gleiche Kraft erforderlich, weil das vertical herabdrükkende Gewicht = Q immer unveränderlich bleibt. Die angegebne Gestalt der Daumen ist also die zweckmäßigste.

§. 226. Die eben gefundene krumme Linie heißt die aus Abwickelung des Kreises entstandene, oder die Evolvente des Kreises. Stellt man sich nämlich vor, um den Kreis ADE (Fig. 82.) sei von A gegen DE zu ein Faden gewickelt, der irgendwo, zum Beispiel bei E, befestiget sei; so wird, wenn man ihn in A faßt, und während der Abwickelung immer grade ausgedehnt erhält, sein Ende A die Curve Ahh' durchlaufen. Der abgewickelte Bogen des Kreises, zum Beispiel Al wird gleichsam grade ausgedehnt in die bei l berührende Tangente h'l, also lh' = Al. Aber grade eben so war unsre Curve bestimmt, daß die in A berührende Tangente AH = AM war, oder allgemein auf der am einen Endpuncte A des Bogens AM gezogenen Tangente die Entfernung AH der Länge des Bogens gleich aufgetragen ward, und es ist folglich jeder Punct der Evolvente Ahh' eben so bestimmt, wie jeder Punct im Umfang des Daumens.

Da lh gleichsam als Radius dient, um mit denselben ein kleines Stück der Curve bei h zu beschreiben: so ist die Tangente lh' des Kreises auf die Curve in h' senkrecht, und wie daraus erhellt, AH bei H auf des Daumens Umriß senkrecht, und folglich IH eine Berührungslinie des Daumens, so daß die Hebelatte in allen ihren Stellungen den Daumen tangirt.

§. 227. Eine Gleichung für unsre Curve ist leicht zu finden. Es sei AGM = φ, AG = r, also der Bogen = r . φ, wenn man φ in Theilen des Halbmessers ausdrückte oder = $\frac{r \cdot \varphi \cdot \pi}{180^\circ}$, wenn φ in Graden gegeben ist. Eben so groß ist AH. Der Winkel AGH ist

also derjenige, dessen Tangente $= \frac{AH}{r} = \frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ}$, oder derjenige Winkel, den man mit Angulus tang $\frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ}$ oder Arc. tang $\frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ}$ bezeichnen würde. Nenne ich diesen Winkel oder Bogen $= \psi$, so ist $HGM = \varphi - \psi$; $HG = \frac{r}{\text{Cos}\,\psi}$ und $GN = Gn = HG \cdot \text{Cos}(\varphi - \psi)$ $= \frac{r}{\text{Cos}\,\psi} \text{Cos}(\varphi - \psi)$ u. $NH = nh = HG \cdot \text{Sin}(\varphi - \psi)$ $= \frac{r}{\text{Cos}\,\psi} \text{Sin}(\varphi - \psi)$.

Für jeden angenommenen Werth von φ ist also ψ und dann Gn, nh leicht zu bestimmen. Ist zum Beispiel $\varphi = 20^\circ$, so ist $\frac{\varphi}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{9} \cdot \pi = 0{,}34684$, und es ist 0,34684 die Tang. von $19^\circ\, 7\frac{2}{3}' = \psi = $ Arc. tang 0,3468, also

$\varphi - \psi = 52\frac{1}{3}'$; $Gn = \frac{r \cdot \text{Cos}\,0^\circ\, 52\frac{1}{3}'}{\text{Cos}\,19^\circ\, 7\frac{2}{3}'} = r \cdot 1{,}0583$, und $nh = \frac{r \cdot \text{Sin}\,0^\circ\, 52\frac{1}{3}'}{\text{Cos}\,19^\circ\, 7\frac{2}{3}'} = 0{,}0161 \cdot r$.

§. 228. Anmerkung. Bei der Anordnung von Zähnen und Getriebe, bei der Anordnung der Daumen an ihrer Welle u. s. w. sind noch mancherlei Umstände zu bestimmen, die ich hier nicht erwähnen kann, worüber man aber in Eytelweins oft angeführtem Werke vollständige und gründliche Belehrung findet.

§. 229. Wenn der Zahn eines Stirnrades (Fig. 83.) in G durch die Gänge einer Schraube fortgeschoben wird, so heißt diese Schraube hier eine Schraube ohne Ende, weil sie beim Umdrehen durch das Andrängen desselben Schraubenganges an jeden unterdessen neu vorgeschobenen Zahn die Bewegung immerfort unterhält.

Der Schraubengang HI faßt bei I den Zahn G, und weil beim Umdrehen der näher gegen A liegende Punct H des Schraubenganges hinaufrückt, so wird der Zahn G gegen A zu gedrängt, und so lange fortgeschoben, bis er nach K gekommen ist, wo die Schraube ihn verläßt, zugleich aber mit dem Puncte I einen neuen Zahn ergreift.

§. 230. Aufgabe. Das Verhältniß zwischen der an der Axe des Rades herabhängenden Last $= Q$ und der am Umfange der Schraube nach der Tangente des Schraubencylinders senkrecht auf die Axe wirkenden Kraft $= P$ zu finden.

Auflösung. Es sei der Schraube Halbmesser $= \varrho$, Weite der Schraubengänge $= \alpha$, so übt die Kraft P zum Fortschieben des Zahnes eine mit der Axe der Schraube parallele Kraft $= \frac{P \cdot 2\pi\varrho}{\alpha}$ aus (§. 196.). Die an der Axe vom Halbmesser $= r$ hängende Kraft drückt aber den Zahn, der sich in der Entfernung $= R$ von der Axe befindet, mit der Kraft $= \frac{r \cdot Q}{R}$, und das Gleichgewicht fordert daher, daß $\frac{r \cdot Q}{R} = \frac{2\pi \cdot \varrho \cdot P}{\alpha}$, oder $P = \frac{r \cdot \alpha \cdot Q}{R \cdot 2\pi\varrho}$ sei.

Zwölfter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte biegsamer Seile.

§. 231. **Aufgabe.** Die Länge ACB des in bestimmten Puncten A, B (Fig. 84.) befestigten Seiles ist gegeben; man sucht den Ort, wo das an einem Ringe C befestigte, frei auf dem Seile herabgleitende Gewicht Q ruhen wird.

Auflösung. Man zieht durch einen der beiden Endpuncte B, wo das Seil festgehalten wird, die Verticallinie BE und schneidet auf derselben den Punct E so ab, daß AE der ganzen Länge des Seiles gleich, AE = AC + CB wird. Halbirt man dann BE in F, und zieht FC horizontal: so ist C die Lage, die der Ring einnehmen wird, und ACB die durch das Gewicht bewirkte Lage des Seiles.

Beweis. Die an C wirkenden Kräfte nach CQ, CA, CB sind im Gleichgewichte, wenn sie sich wie die Sinus der Winkel ACB, BCQ, ACQ verhalten. Der Ring wird offenbar da ruhen, wo die Spannung des Seiles nach beiden Seiten gleich, also wo
Sin BCQ = Sin ACQ gleich ist. Das geschieht, wenn FCE = BCF und FC senkrecht auf CQ ist, also an der durch die Construction der Auflösung bezeichneten Stelle.

§. 232. **Anmerkung.** Dieser Ort ist zugleich die niedrigste Stelle, welche der Ring, am Seile fortgeschoben, erreichen kann. Wer mit den Eigenschaften der Ellipse bekannt ist, könnte dies sehr leicht beweisen; denn alle Stellungen, in welche der auf dem Seile fortrückende Ring C gelangen kann, liegen auf dem Umfange einer Ellipse, deren Brennpuncte A und B sind. Nun hat die Ellipse die Eigenschaft, daß eine durch einen Punct des Umfangs gezogne Linie eine Tangente der Ellipse ist,

wenn sie gleiche Winkel mit beiden nach den Brennpunkten A, B gezogenen graden Linien macht. In dem richtig bestimmten Orte C des Ringes ist HF eine solche Linie, da ACH = BCF, und folglich die horizontale Linie HF eine Tangente des ganzen Weges, den der fortgleitende Ring durchläuft, also ist offenbar seine tiefste Lage in C.

§. 233. Lehrsatz. Wenn an den Knoten C, D, E des bei A und B (Fig. 85.) befestigten Seiles die vertical niederwärts ziehenden Gewichte P, Q, R wirken: so verhält sich die Spannung der äußersten Theile des Seiles AC, BE, umgekehrt wie die Sinus der Winkel, die sie mit der Verticallinie machen.

Beweis. Im Puncte C wirken drei Kräfte, die sich im Gleichgewichte erhalten, das Gewicht = P nach CP, die Spannung des Seiles CD nach CD, die Spannung des Seiles AC nach CA. Etwas Aehnliches findet in D und E statt. Nenne ich die Spannung des Seiles AC, $= T'$; des Seiles CD Spannung $= T''$, des Seiles DE $= T'''$; des Seiles EB Spannung $= T''''$: so muß (§. 65.), wenn CAG $= \varphi'$, DCP $= \varphi''$, EDQ $= \varphi'''$, BER $= \varphi''''$ oder EBF $= 180^\circ - \varphi''''$ heißt, $T' : T'' = \text{Sin}\,\varphi'' : \text{Sin}\,\varphi'$;

$T'' : T''' = \text{Sin}\,\varphi''' : \text{Sin}\,\varphi''$;

$T''' : T'''' = \text{Sin}\,\varphi'''' : \text{Sin}\,\varphi'''$, sein; es ist also $T' : T'''' = \text{Sin}\,\varphi'''' : \text{Sin}\,\varphi'$.

§. 234. Eben dies Gesetz gilt, wie die angeführten Proportionen zeigen, auch für die übrigen Theile des zwischen jeden zwei Knoten grade gespannten Seiles; denn es ist auch die Spannung des Theiles AC zur Spannung von DE, wie Sin DER, zu Sin CAG. Eben das würde statt finden, es mögten der mit Gewichten beschwerten Knoten so viel man wollte sein.

§. 235. Lehrsatz. Wenn das Seil ACDEB in A, B befestigt, und in den Knoten C, D, E (Fig. 85.) mit angehängten vertical herabziehenden Gewichten P, Q, R beschwert ist, so ist die Summe der angehängten Gewichte P + Q + R gleich der Summe der beiden Pro-

ducte, welche man für jedes Ende aus der Spannung am einen Ende in den Cosinus des Winkels, welchen hier das Seil mit der Verticale macht, findet, oder $P + Q + R = T' . \operatorname{Cos} GAC + T'''' . \operatorname{Cos} EBF$, $= T' . \operatorname{Cos} \varphi' - T'''' \operatorname{Cos} \varphi''''$, wenn ich die Bezeichnungen aus §. 233. beibehalte.

Beweis. Offenbar ist (§. 65.)
$T' : P = \operatorname{Sin} DCP : \operatorname{Sin} ACD$, oder weil
$ACD = 360^\circ - \varphi'' - (180^\circ - \varphi') = 180^\circ - (\varphi'' - \varphi')$
$T' : P = \operatorname{Sin} \varphi'' : \operatorname{Sin} (\varphi'' - \varphi')$.

Eben so $T'' : Q = \operatorname{Sin} \varphi''' : \operatorname{Sin} (\varphi''' - \varphi'')$,
$T''' : R = \operatorname{Sin} \varphi'''' : \operatorname{Sin} (\varphi'''' - \varphi''')$.

Hieraus folgt

$$P = T' . \operatorname{Cos} \varphi' - \frac{T' . \operatorname{Sin} \varphi' . \operatorname{Cos} \varphi''}{\operatorname{Sin} \varphi''};$$

$$Q = T'' . \operatorname{Cos} \varphi'' - \frac{T'' . \operatorname{Sin} \varphi'' . \operatorname{Cos} \varphi'''}{\operatorname{Sin} \varphi'''};$$

$$R = T''' . \operatorname{Cos} \varphi''' - \frac{T''' . \operatorname{Sin} \varphi''' . \operatorname{Cos} \varphi''''}{\operatorname{Sin} \varphi''''}.$$

Da nun nach §. 233. 234. nothwendig auch
$T' . \operatorname{Sin} \varphi' = T'' . \operatorname{Sin} \varphi'' = T''' . \operatorname{Sin} \varphi''' = T'''' . \operatorname{Sin} \varphi''''$,
so folgt aus jenen Gleichungen

$$P = T' . \operatorname{Cos} \varphi' - T'' . \operatorname{Cos} \varphi'';$$
$$Q = T'' . \operatorname{Cos} \varphi'' - T''' . \operatorname{Cos} \varphi''';$$
$$R = T''' . \operatorname{Cos} \varphi''' - T'''' . \operatorname{Cos} \varphi'''';$$

also $P + Q + R = T' . \operatorname{Cos} \varphi' - T'''' . \operatorname{Cos} \varphi''''$.

§. 236. Auch dieser Satz gilt bei jeder Anzahl von Gewichten. Er gilt auch für jeden Theil des Seiles, da

$$P = T' . \operatorname{Cos} \varphi' - T'' . \operatorname{Cos} \varphi'';$$
$$P + Q = T' . \operatorname{Cos} \varphi' - T''' . \operatorname{Cos} \varphi''',$$

und so in allen Fällen ist.

§. 237. Aus den Bestimmungen der beiden Lehrsätze §. 233. 235. folgt allgemein

$$P = T' . \operatorname{Cos} \varphi' - T'' . \operatorname{Cos} \varphi'', \text{ und}$$
$$T' . \operatorname{Sin} \varphi' = T'' . \operatorname{Sin} \varphi'';$$

von einander abweichen, und eine Regel wie diese muß dem genügen, der nicht durch vollständigere analytische Kenntnisse in den Stand gesetzt wird, genauere Regeln verstehen und anwenden zu können.

Wenn man durch A eine horizontale Linie AV zieht, so läßt sich auch bestimmen, über welchem Puncte derselben und in welcher Höhe sich die Endpuncte der einzelnen Stücke befinden. Nimmt man nämlich die aus der vorigen Rechnung bekannten Werthe von φ, und bezeichnet sie für das erste Stück mit φ', für das zweite mit φ'' und so weiter, so ist, da $CB = a$,

für das 1. Stück $Bm = a . \sin\varphi'$; $Cm = a . \cos\varphi'$;
für das 2. Stück $Bn = a (\sin\varphi' + \sin\varphi'')$,
$Dn = a (\cos\varphi' + \cos\varphi'')$;
für das 3. Stück $Bo = a (\sin\varphi' + \sin\varphi'' + \sin\varphi''')$,
$Eo = a (\cos\varphi' + \cos\varphi'' + \cos\varphi''')$.

§. 243. Aehnliche Betrachtungen könnten selbst dienen, um die Gestalt einer frei hängenden Kette zu bestimmen, deren Glieder von ungleichem Gewichte, bei gleicher Länge sind. Nähme (Fig. 88.) von B an das Gewicht jedes gleich langen Gliedes in arithmetischem Verhältnisse zu, so daß

$BC = g . a$; $CD = (g+1) a$; $DE = (g+2) a$;

wöge; dann würde für $C = n . g . a$,

beim 1. Stücke $\tan\varphi' = \tan BCm = n$;

beim 2. Stücke $\tan\varphi'' = \tan CDn = \frac{n . g}{2g+1}$;

beim 3. Stücke $\tan\varphi''' = \tan DEo = \frac{n . g}{3g+3}$;

beim (m+1)ten St. $\tan\varphi = \frac{n . g}{m.g+1+2+3+4+\ldots+m}$,

oder $\tan\varphi = \frac{n . g}{m . g + \frac{1}{2}(m+1) . m}$, sein.

man also die hier statt findende Spannung $= C$ als bekannt annimmt, so wird für jeden andern Punct D des Seiles die dortige Spannung $T = \frac{C}{\sin \varphi}$ und über das $= \frac{T \cdot \sin (90^\circ - \varphi)}{\sin 90^\circ}$ oder $V = T \cdot \cos \varphi$, wenn V ie Summe der Gewichte ist, welche das Seil zwischen B und D belasten. $T \cdot \sin \varphi$ ist die der Spannung entsprechende horizontale Kraft, die also überall leich $= C$ ist; $T \cdot \cos \varphi$ die der Spannung entsprechende verticale Kraft $= V$ gleich der Summe der Belastungen vom horizontalen Puncte an bis zu dem Puncte), dessen Spannung man bestimmt.

§. 239. Erklärung. Wenn ein überall gleich arkes und folglich überall gleich schweres Seil in zwei uncten befestigt und frei aufgehängt wird: so nimmt eine bestimmte Krümmung an und bildet eine krumme inie, welche die Kettenlinie heißt.

§. 240. Aufgabe. Die Haupteigenschaften der Kettenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Da unsre vorigen Betrachtungen immer gelten, es mag die Anzahl der mit Gewichten beschwerten Knoten und der zwischenliegenden graden Theile es Seiles größer oder kleiner sein: so können wir sie uch da anwenden, wo jedes Stückchen des Seiles bloß it seinem eigenen Gewichte drückt. Hier könnten wir ns das Seil als in eine sehr große Anzahl kleiner, gleicher Stücke getheilt denken, die jeder fast als grade anzusehen wären, und jeder belastet mit einem, seiner Länge proportionalen Gewichte.

Heißt also hier (Fig. 87.) der unterste Punct der Kettenlinie C oder ist sie in C horizontal, und in einem andern Puncte G unter dem Winkel $= \alpha$ gegen die Verticallinie geneigt, die von C bis G sich erstreckende Länge es Seiles aber $= CG = s$, so ist das Gewicht dieses Theiles der Länge proportional $= g \cdot s = V$, folglich

oder der Druck, den die Wand nach horizontaler Richtung leidet, $= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \text{tang } \alpha$, die nach der Richtung der Stange wirkende Kraft $= \frac{\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P}{\text{Cos } \alpha}$.

Die letztere Kraft drückt in B nach der Richtung Bi und wird in eine horizontale Kraft $= \text{tang } \alpha \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right)$ und eine verticale Kraft $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P$ zerlegt. Mit der letztern verbindet sich der schon Anfangs gefundene verticale Druck auf B, welcher $= \frac{1}{2} Q + \frac{(a-b)}{a} P$ war. Der gesammte verticale Druck auf den Boden in B ist also $= Q + P$, die zu Erhaltung der Stange in B nöthige horizontale Kraft ist $= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \text{tang } \alpha$ gleich dem Drucke, welchen in A die Wand leidet.

§. 245. Wenn zwei Dachsparren unter gleichem Winkel gegen den Horizont geneigt, in A sich gegen einander stützen (Fig. 90.) und in B, E gehörig gehalten werden: so hebt der in A entstehende horizontale Druck sich auf, wenn beide Sparren bloß mit ihrem eignen, gleich großen Gewichte beschwert sind; der horizontale Druck jedes Sparren aber ist in B und in E durch $\frac{1}{2} Q \,.\, \text{tang } \alpha = \frac{1}{2} Q \,.\, \text{Cotang ABE}$ ausgedrückt, und dieses ist es, was man den Sparrenschub nennt. Der Sparrenschub nimmt also sehr beträchtlich ab, wenn man die Neigung der Sparren gegen den Horizont oder den Winkel ABE vergrößert, und deshalb giebt man denjenigen Dächern einen scharfen Winkel an der Spitze, die keine quer durchgehende Balken, um den Sparrenschub aufzuhalten, haben, z. B. Kirchendächern.

§. 246. Auch die Vertheilung der Last bei Hängewerken läßt sich hieraus ohngefehr übersehen. Wäre

Dreizehnter Abschnitt.

...ndungen der Statik auf einige bei ...auen vorkommende Holz-Verbindungen.

. **Aufgabe.** Eine Stange AB ist irgendwo ...iem vertical niederwärts wirkenden Gewichte = P ...; sie ruht bei B (Fig. 89.) auf dem horizontalen ... und lehnt sich bei A an die verticale Wand AC, ...welche sie unter dem Winkel BAC = α geneigt ist; ...ruck zu bestimmen, welchen in A die Wand nach ...ntaler Richtung und in B der Boden nach vertica... ...chtung leidet, nebst der Kraft, welche in B hori... ... wirken muß, um das Ausgleiten der Stange zu ...n.

...**uflösung.** Die Länge der Stange sei = a und ...ynes Gewicht = Q stelle man sich in ihrer Mitte ...hwerpuncte vereinigt, in D aber die Last = P hän... ...vor. Wenn hier die Entfernung BD = b, so ...diese beiden Gewichte in A einen verticalen Druck

$Q + \frac{bP}{a}$, und in B einen verticalen Druck

$Q + \frac{(a-b)P}{a}$, aus. Dem verticalen Drucke in

...kt nach horizontaler Richtung die Wand, nach der ...ung BA die in A unterstützenden Kräfte entgegen; ...man sich daher die Kraft Ae = $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{b}{a}$ P, nach ...Richtungen Ad, Af zerlegt, so ist im Parallelo...n der Kräfte Ae : Ad = 1 : tang α, und ... Af = Cos α : 1; also die nach Ad wirkende Kraft

nun den Bruch, mit welchem der Druck multiplicirt werden muß, um die Stärke der Reibung anzugeben mit f, und nenne den noch unbekannten horizontalen Druck, welchen die Wand in A leidet $= R$, so ist $f . R$ die bei A entstehende Reibung, und die nach Ae wirkende Kraft ist nur $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R$, also die Kraft nach Ad ist $= \tan\varphi . \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right)$, welche eben jene R sein soll, also $= R$ gesetzt, giebt

$$R (1 + f . \tan\varphi) = \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tan\varphi$$

$$R = \frac{\left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tan\varphi}{1 + f . \tan\varphi}.$$

Die Kraft nach Af wird $= \frac{1}{\cos\varphi} . \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right)$, und diese bringt in B den verticalen Druck $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R$ hervor, welcher in Verbindung mit $\frac{1}{2} Q + \frac{a - b}{a} P$, den gesammten Verticaldruck in B, $= Q + P - f . R$ giebt und folglich die Reibung in B,

$$= f (P + Q) - f^2 R;$$

der horizontale Schub in B hingegen wird

$$= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right) \tan\varphi.$$

Da nun die Friction bei B dem horizontalen Schube das Gleichgewicht halten soll, so ist $f (P + Q) - f^2 R$

$$= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right) \tan\varphi,$$

oder $f (P + Q) - \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tan\varphi$

$$= f . R (f - \tan\varphi),$$

oder aus dem gefundenen Werthe von R

91.) der Balken BC, in seinem Schwerpuncte
stützt, bei A am Ende von AD aufgehängt, und
e sich der tragende Balken AD in A an eine verticale
nd, so wäre in §. 244. b = a und folglich der
ontale Druck bei A und der horizontale Schub
D = ($\frac{1}{2}$ Q + P). tang α. Da beim Hängewerke
der verbundenen Balken AD, AE nur die
te des Balkens BC trägt, so ist der horizontale
ub bei D und bei E, = $\frac{1}{2}$ (Q + P) tang α
(Q + P) Cotang ADC und die Pfeiler DF, EG
n zugleich den verticalen Druck = Q + $\frac{1}{2}$ P, wenn
s Gewicht von AD und P das Gewicht des ganzen
hängten Balkens ist.

Ganz so verhält es sich nun bei Brücken und ähn-
t Hängewerken nicht, sondern da liegt der Balken
ich bei D und E auf, und wird von den Pfeilern
ittelbar unterstützt. Der Balken BC wird also in
Puncten unterstützt, und es tritt hier der Fall ein,
nan wegen der Biegsamkeit des Balkens fragen kann,
die Last ihren Druck in diesem Falle vertheilt. Eine
ge, auf deren Beantwortung wir uns hier nicht ein-
n können, die aber Eytelwein näher erörtert
atik 2 Thl. §. 371. 372.).

§. 247. Aufgabe. Eine in D mit dem Gewichte
belastete Stange (Fig. 89.) lehnt sich gegen die ver-
e Wand AC und steht frei auf dem horizontalen Bo-
BC; man verlangt den Winkel zu bestimmen, unter
dem sie geneigt stehen darf, um noch durch die Rei-
g bei A und bei B am Ausgleiten gehindert zu werden.

Auflösung. Der gesuchte Winkel CAB sei = φ,
Länge der Stange = a, ihr Gewicht, welches wir
als in ihrer Mitte, im Schwerpuncte vereinigt vor-
n, = Q, BD sei = b. Eben so wie in §. 244.
er verticale Druck in A = $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{b}{a}$ P; der verti-
Druck in B, = $\frac{1}{2}$ Q + $\frac{a-b}{a}$. P. Bezeichne ich

nun den Bruch, mit welchem der Druck multiplicirt werden muß, um die Stärke der Reibung anzugeben mit f, und nenne den noch unbekannten horizontalen Druck, welchen die Wand in A leidet $= R$, so ist $f . R$ die bei A entstehende Reibung, und die nach Ae wirkende Kraft ist nur $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R$, also die Kraft nach Ad ist $= \tang \varphi . \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right)$, welche eben jene R sein soll, also $= R$ gesetzt, giebt

$$R (1 + f . \tang \varphi) = \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tang \varphi$$

$$R = \frac{\left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tang \varphi}{1 + f . \tang \varphi}.$$

Die Kraft nach Af wird $= \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi} . \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right)$, und diese bringt in B den verticalen Druck $= \frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R$ hervor, welcher in Verbindung mit $\frac{1}{2} Q + \frac{a - b}{a} P$, den gesammten Verticaldruck in B, $= Q + P - f . R$ giebt und folglich die Reibung in B,

$$= f (P + Q) - f^2 R;$$

der horizontale Schub in B hingegen wird

$$= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right) \tang \varphi.$$

Da nun die Friction bei B dem horizontalen Schube das Gleichgewicht halten soll, so ist $f (P + Q) - f^2 R$

$$= \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P - f . R\right) \tang \varphi,$$

oder $f (P + Q) - \left(\frac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \tang \varphi$

$$= f . R (f - \tang \varphi),$$

oder aus dem gefundenen Werthe von R

$$f(P + Q) - \left(\tfrac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \text{tang}\, \phi$$

$$= f.(f - \text{tang}\, \phi) \frac{\left(\tfrac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) \text{tang}\, \phi}{1 + f.\, \text{tang}\, \phi},$$

das ist, wenn man die Gleichung richtig ordnet

$$f(P + Q) = \text{tang}\, \phi \left((1 + f^2)\left(\tfrac{1}{2} Q + \frac{b}{a} P\right) - f^2(P + Q)\right),$$

also $\text{tang}\, \phi = \dfrac{af\,(P + Q)}{(1 + f^2)(\tfrac{1}{2} aQ + bP) - af^2(P + Q)}$.

Wenn die Stange unter dem so bestimmten Winkel gegen die Verticallinie geneigt ist, so reicht die Reibung grade noch hin, um sie vor dem Ausgleiten zu sichern.

§. 248. Ist kein Gewicht an die Stange angehängt, sondern drückt bloß ihre eigne Schwere, so ist $P = 0$, und

$$\text{tang}\, \phi = \frac{2f}{1 - f^2}.$$

Auch wenn das Gewicht an der Mitte der Stange aufgehängt wäre, würde man

$\text{tang}\, \phi = \dfrac{2f}{1 - f^2}$, finden; ist es aber ganz am obern Ende bei A aufgehängt, also $b = a$, so hat man

$\text{tang}\, \phi = \dfrac{f.(P + Q)}{\tfrac{1}{2} Q + P - \tfrac{1}{2} Q f^2}$, wogegen

$\text{tang}\, \phi = \dfrac{f.(P + Q)}{\tfrac{1}{2} Q(1 - f^2) - f^2 P}$ wird, wenn $b = 0$ oder das Gewicht ganz unten bei B angebracht ist.

§. 249. Hätte die Stange selbst keine Schwere, oder wäre wenigstens Q unbedeutend gegen P: so ergäbe sich für eine oben bei A angebrachte Last $\text{tang}\, \phi = f$ für eine ganz unten bei B angebrachte Last $\text{tang}\, \phi = -\frac{1}{f}$,

und für eine in dem Puncte D angebrachte Last

$$\tang\varphi = \frac{af}{b(1+f^2) - af^2}.$$

Der letztere Ausdruck giebt $\tang\varphi = \infty$, wenn $b = \frac{af^2}{1+f^2}$. Schon für diesen Werth von b könnte also die Stange in jeder Lage vermöge der Reibung ruhen, und der negative Werth, denn man für kleinere Werthe von b erhält, zeigt, daß ein Bestreben zum Ausgleiten gar nicht mehr statt finde, sondern durch die Reibung mehr geleistet werde, als zu Verhinderung des Ausgleitens erfordert würde.

Die allgemeine Gleichung

$$\tang\varphi = \frac{af(P+Q)}{(1+f^2)(\frac{1}{2}aQ + bP) - af^2(P+Q)}$$

zeigt, daß allemal $\varphi = 90°$ oder jede Stellung der Stange möglich wird, wenn

$$P = \frac{\frac{1}{2}aQ(1-f^2)}{(a-b)f^2 - b}$$ ist, oder für $b = \frac{1}{n}a$,

wenn $P = \frac{\frac{1}{2}Q(1-f^2)}{\frac{n-1}{n}.f^2 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{2}n.Q.(1-f^2)}{f^2 n - (1+f^2)}$.

Für $f = \frac{1}{3}$ könnte also die Stange in jeder Stellung ruhen, wenn die Belastung

$= \frac{\frac{1}{2}.n.\frac{8}{9}.Q}{\frac{n}{9} - \frac{10}{9}} = \frac{4.n.Q}{n-10}$ ist; also für $BD = \frac{1}{20}AB$, oder $n = 20$, wenn $P = 8.Q$ ist.

§. 250. Aufgabe. Der aufrecht stehende Balken AB (Fig. 92.) wird durch eine horizontale an seinem oberen Ende wirkende Kraft = P nach AP hin gedrückt. Eine in der Ebne PAB liegende Strebe DC hindert das Umstürzen, man sucht den Druck, den CD und BC leiden.

Auflösung. Es sei $AB = a$, $DC = b$, $CDB = \alpha$, also $BC = b \sin\alpha$, so ist der mit AP

rallele Druck, den C leidet $= \frac{P \cdot a}{b \cdot Sin\,\alpha}$. Diesem wird ch der Richtung DC und BC widerstanden, und wir üssen ihn daher nach diesen Richtungen zerlegen. Eine raft nach CE, die $= \frac{P \cdot a}{b \cdot Sin\,\alpha}$ ist, bringt nach CA, D zerlegt, einen Druck $= \frac{P \cdot a}{b \cdot Sin\,\alpha} \cdot tang\,\alpha = \frac{P \cdot a}{b \cdot Cos\,\alpha}$ ch CA hervor, mit dieser Gewalt wird daher B aufwärts gezogen; und einen Druck $= \frac{P \cdot a}{b \cdot Sin\,\alpha \cdot Cos\,\alpha}$ $= \frac{2 \cdot P \cdot a}{b \cdot Sin\,2\alpha}$ nach der Richtung der Strebe, welcher ie schief gegen D drückt. Sucht man hieraus den horizontalen und verticalen Druck, den D leidet, so ist der verticale Druck $= \frac{P \cdot a}{b \cdot Cos\,\alpha}$ eben so groß, als der entgegengesetzte den B leidet, der horizontale Druck aber $= \frac{P \cdot a}{b \cdot Sin\,\alpha}$, eben so groß als er in C war, und wenn man mit ihm den horizontalen Druck vereiniget, den B leidet, indem AB sich um C drehen will, so ist, weil dieser $= -\frac{P \cdot (a - b\ Sin\,\alpha)}{b \cdot Sin\,\alpha}$, die Summe beider $= P$.

§. 251. Aufgabe. Der horizontale, auf AB ruhende Balken AE, der in E mit einem Gewichte $= P$ belastet ist, wird von dem Winkelbande DC unterstützt; man sucht den Druck, welchen die einzelnen Puncte dieser Holzverbindung leiden (Fig. 93.).

Auflösung. Da man AE als einen um den Endpunct beweglichen Hebel ansehen kann, so leidet D den verticalen Druck $= \frac{P \cdot AE}{AD}$ niederwärts und A den ver-

ticalen Druck $= \frac{P . DE}{AD}$ aufwärts. Dieser vertic Druck in D vertheilt sich auf das Winkelband nach Richtung DC, und auf AD nach der Richtung I Der Druck nach DE wird $= \frac{P . DE}{AD}$. tang ACD, Druck nach DC $= \frac{2P . DE}{AD . Cos ACD}$.

Nimmt man die Länge des Bandes CD als gegel an $= b$, so ist AD $= b$. Sin ACD, also der Dr nach der Richtung der Strebe $= \frac{2P . DE}{b . Sin\ 2 . AC}$ welcher am kleinsten wird für ACD $= 45$ Grad, i dem dann Sin 2 . ACD $= 1$, seinen größten Wei erhält.

Der horizontale Druck nach DE ist eben so gr als derjenige horizontale Druck, den der Punct C v dem gedrückten Winkelbande leidet; der verticale Dru den A aufwärts litt zusammen genommen mit dem ver calen Drucke, den das Winkelband bei C ausübt ist = also wird B bloß vertical mit der ganzen Last = P ni derwärts gedrückt; die Verbindungspuncte A, C und aber leiden die verschiedenen Pressungen, die wir eb bestimmt haben; das Winkelband nämlich übt bei C ein Druck aus, und strebt zugleich bei D horizontal sich na DE fortzuschieben; bei A ist ein Bestreben, den Balk AE bei A aufwärts loszureißen u. s. w.

§. 252. Aufgabe. Zwei Dachsparren AB, B (Fig. 94.) sind bei B auf einander gesetzt, der obere leh sich in A an die verticale Wand AD, der untere ru bei C auf dem horizontalen Boden CD, und seinem ho rizontalen Schube wirkt bei C die erforderliche Kraft ent gegen; man sucht eine Bestimmung für die Neigungs winkel beider Sparren, damit es bei B keiner fremd Kraft, um sie zu erhalten, bedürfe.

Auflösung. Des unteren Sparren Länge se

BC = a, seine Neigung BCD = α; des oberen Sparren Länge BA = b; seine Neigung gegen den Horizont ABE = β, das Gewicht des unteren Sparren = a . g, des oberen = b . γ.

Aus §. 244. ist bekannt, daß der obere Sparren in B den horizontalen Schub = $\frac{1}{2}$ b . γ . Cotang β und den verticalen Druck = bγ hervorbringt. Diese beiden nach Bc und nach Ba wirkenden Kräfte bringen eine Mittelkraft hervor, deren Neigung gegen den Horizont sich leicht bestimmen ließe. Aber der unter dem Winkel = α geneigte untere Sparren, übt in B einen horizontalen Druck = $\frac{1}{2}$ a . g . Cotang α aus; und es muß, wenn das Ausgleiten bei C gehindert wird, aus den drei Kräften = bγ nach Ba;

= $\frac{1}{2}$ bγ . Cotang β nach Bc,

= — $\frac{1}{2}$ ag . Cotang α nach Bc, eine nach der Richtung des Sparren BC selbst wirkende Mittelkraft entstehen, indem sonst kein Widerstand die Bewegung aufhält, und folglich das Gleichgewicht nur besteht, wenn der Mittelkraft Richtung auf BC fällt. Da die gesammte Kraft nach Ba, = bγ, die gesammte Kraft nach Bc,

= $\frac{1}{2}$ bγ . Cotang β — $\frac{1}{2}$ ag . Cotang α

ist, so findet man der aus ihnen entstehenden Mittelkraft Neigung gegen den Horizont = cBd durch

$$\text{tang cBd} = \frac{2b\gamma}{b\gamma . \text{Cotang}\,\beta - ag . \text{Cotang}\,\alpha}$$

bestimmt, und es muß folglich

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2 . b . \gamma}{b . \gamma . \text{Cotang}\,\beta - ag . \text{Cotang}\,\alpha},$$

das ist b . γ . tang α . Cotang β = ag + 2bγ, sein.

Der Winkel β wird also durch α so bestimmt, daß

$$\text{Cotang}\,\beta = \left(2 + \frac{a . g}{b . \gamma}\right) \text{Cotang}\,\alpha,$$

oder $\text{tang}\,\alpha = \left(2 + \frac{a . g}{b . \gamma}\right) \text{tang}\,\beta$ ist.

§. 253. Aufgabe. In dem eben betrachteten

Falle den Sparrenschub bei C und den verticalen Druck zu finden, den C leidet.

Auflösung. Aus der horizontalen Kraft $= \frac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta - \frac{1}{2} ag . \text{Cotang}\,\alpha$ und der verticalen Kraft $= b\gamma$, ergiebt sich die nach BC wirkende Mittelkraft (§. 63.)

$$= \sqrt{(b^2\gamma^2 + \tfrac{1}{4}(b\gamma . \text{Cotang}\,\beta - ag . \text{Cotang}\,\alpha)^2)},$$

oder wenn man für Cotang β den wegen des Gleichgewichts erforderlichen Werth setzt (§. 252.),

$$= \sqrt{(b^2\gamma^2 + \tfrac{1}{4}\,\text{Cotang}^2\alpha . (2b\gamma + ag - ag)^2)},$$

$$= b\gamma . \sqrt{(1 + \text{Cotang}^2\alpha)} = b\gamma\,\text{Cosec}\,\alpha = \frac{b\gamma}{\text{Sin}\,\alpha};$$

diese bei C nach der Richtung BC drückende Kraft giebt eine horizontale Kraft $= b\gamma . \text{Cotang}\,\alpha$; mit ihr verbindet sich der vom Sparren BC für sich allein entstehende Sparrenschub $= \frac{1}{2} ag . \text{Cotang}\,\alpha$; die Summe beider ist der Druck, den C nach horizontaler Richtung leidet $= \text{Cotang}\,\alpha\,(b\gamma + \frac{1}{2} ag)$, welches

$$= \tfrac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta \text{ ist.}$$

Der Sparrenschub beider vereinten Sparren ist also in C grade so stark, als der Sparrenschub des oberen Sparren in B war.

Der verticale Druck wird wegen der nach BC wirkenden Kraft $= b\gamma$, und sie wird vermehrt durch das ganze Gewicht des unteren Sparren $= g . a$, der gesammte verticale Druck ist also $= ag + b\gamma$.

§. 254. Man könnte die Betrachtungen des vorigen §. auch auf folgende Art anstellen. Da der Sparren AB durch die Wand AD und die Unterstützung des Punctes B ganz ruhend erhalten wird: so ist offenbar, daß sein Gewicht in A den horizontalen Druck $= \frac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$ hervorbringt, in B aber den horizontalen Druck $= \frac{1}{2} b\gamma . \text{Cotang}\,\beta$ und den verticalen $= b\gamma$. Das Gewicht des Sparren BC bringt in B einen verticalen Druck $= \frac{1}{2} . ag$ und in C einen verticalen Druck $= \frac{1}{2} ag$ hervor. In B wirken also die bei-

den Kräfte, eine $= \frac{1}{2} b\gamma \cdot \text{Cotang}\,\beta$, horizontal, eine $= b\gamma + \frac{1}{2} ag$, vertical. Sie geben eine Mittelkraft, deren Richtung gegen den Horizont $= \varphi$ durch die Gleichung $\text{tang}\,\varphi = \frac{b\gamma + \frac{1}{2} ag}{\frac{1}{2} b\gamma \cdot \text{Cotang}\,\beta}$ gegeben ist, und diese Richtung muß in BC fallen, damit der Sparren selbst sie ganz aufhebe. Es muß also $\varphi = \alpha$,

$\text{Cotang}\,\beta \cdot \text{tang}\,\alpha = 2 + \frac{ag}{b\gamma}$, sein.

Die nach der Richtung des Sparren entstehende Mittelkraft aber ist

$$= \sqrt{\left(\frac{b^2 \gamma^2 \text{Cotang}^2 \beta}{4} + (b\gamma + \tfrac{1}{2} ag)^2\right)}, \text{ oder}$$

da $\frac{b\gamma + \frac{1}{2} ag}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{1}{2} b\gamma \cdot \text{Cotang}\,\beta$, ist jene Kraft

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\text{tang}^2 \alpha} + 1\right)} \cdot (b\gamma + \tfrac{1}{2} ag) = \frac{b\gamma + \frac{1}{2} ag}{\text{Sin}\,\alpha}.$$

Diese giebt den Sparrenschub in $C = (b\gamma + \frac{1}{2} ag)\,\text{Cotang}\,\alpha$, welches $= \frac{1}{2} b\gamma \cdot \text{Cotang}\,\beta$ ist, und den verticalen Druck in $C = b\gamma + \frac{1}{2} ag$, wozu noch die vorhin schon auf C verlegte verticale Kraft $= \frac{1}{2} ag$ kömmt.

§. 253*. Es läßt sich leicht übersehen, daß man den Punct C wieder durch einen geneigt stehenden Sparren unterstützen könnte, dessen Neigungswinkel $= \alpha'$, wenn $c \cdot G$ sein Gewicht bedeutete durch

$\text{tang}\,\alpha' = \frac{b \cdot \gamma + a \cdot g + \frac{1}{2} c \cdot G}{\frac{1}{2} b \cdot \gamma \cdot \text{Cotang}\,\beta}$ gegeben wäre, und auch an seinem unteren Ende würde der Sparrenschub $= \frac{1}{2} b\gamma \cdot \text{Cotang}\,\beta$, der verticale Druck aber dem Gewichte aller Sparren gleich gefunden $= b \cdot \gamma + a \cdot g + c \cdot G$.

Anmerkung. Es läßt sich wohl übersehen, daß bloß bei A und bei C ein gleicher horizontaler Druck entstehen kann, weil in den Verbindungspuncten der Sparren bei B der entgegengesetzte horizontale Druck sich aufhebt. Das gesammte Gewicht der Sparren aber lastet auf C.

§. 254*. Aus §. 233. erhellt, daß bei Seilen, die

Eine Kraft endlich, die nach der Längenrichtung des prismatischen Körpers diesen zusammen zu drücken strebt, kann ihn zerdrücken, und dient dann als Maaß seiner rückwirkenden Festigkeit.

§. 258. Lehrsatz. Die absolute Festigkeit prismatischer Körper von gleicher Art ist der Größe ihres Querschnitts proportional.

Denn die absolute Festigkeit steht offenbar im Verhältniß der Anzahl der zu zerreißenden Theilchen, Fasern, Fibern und dergleichen.

§. 259. Zahlreiche Versuche haben uns mit der absoluten Festigkeit der verschiedenen Körper bekannt gemacht. Unter den Hölzern gehören Eichenholz und Buchenholz zu den festesten; unter den Metallen hat Eisen und vorzüglich Stahl den Vorzug.

§. 260. Wenn ein prismatischer Körper von erheblicher Länge so aufgehängt ist, daß seine Längenrichtung vertical ist: so haben seine höheren Querschnitte mehr Last zu tragen, als seine niedriger liegenden, indem jene außer dem etwa unten angehängten Gewichte auch noch die unteren Theile des Körpers tragen müssen. Man könnte daher fragen, nach welchem Gesetze die Querschnitte des Körpers zunehmen müßten, damit jeder höher liegende Querschnitt dem vergrößerten Gewichte eben so gut widerstehe, als jeder niedrigere dem geringern Gewichte. Aber diese eben nicht schwere Untersuchung ist von keiner großen Brauchbarkeit.

§. 261. Erklärung. Wir nennen Körper biegsam, wenn sie sich vor dem Zerbrechen krümmen, spröde dagegen und unbiegsam, wenn ihr Zerbrechen ohne vorherige Beugung erfolgt.

§. 262. Lehrsatz. Ein parallelepipedischer Balken (Fig. 95.) ABCD ist bei D in einem auf die Länge BD senkrechten Querschnitte befestiget; die Kraft $= Q$ wirkt senkrecht auf die Längenrichtung BD und Breitenrichtung BA, parallel mit der Höhenrichtung AC. Unter diesen Umständen ist die relative Festigkeit des Bal-

kens, wenn man den Balken selbst als ohne Schwere betrachtet, seiner Breite AB und dem Quadrate seiner Höhe AC direct, der Länge BD aber, das ist der Entfernung der Kraft Q von dem unterstützten Querschnitte umgekehrt proportional.

Beweis. Nennt man die absolute Festigkeit des Balkens = P, oder ist eine Kraft = P nach der Richtung DB wirkend nöthig, um ihn zu zerreißen: so ist P dem Querschnitte, das heißt der Breite und Höhe oder dem Producte AB, AC proportional. Stellen wir uns diese Kraft in dem Schwerpuncte G der Brechungsfläche, als dem durch die Kraft Q bewirkten Brechen entgegen wirkend vor, so ist, da H hier als Unterstützungspunct anzusehen ist (§. 97.) $P \cdot \frac{1}{2} DE = Q \cdot BD$, weil $GH = \frac{1}{2} DE$ des Schwerpuncts Lage bestimmt, also

$$Q = \frac{\frac{1}{2} P \cdot DE}{BD} = \frac{\frac{1}{2} P \cdot CA}{BD}.$$

P kann durch K . AB . AC ausgedrückt werden, wenn K die absolute Festigkeit für den als Einheit angenommenen Querschnitt ist, und folglich ist

$$Q = \frac{1}{2} K \cdot \frac{AB \cdot AC^2}{BD}.$$

§. 263. Wäre der Balken (Fig. 96.) in der Mitte bei A unterstützt, und an beiden Enden mit gleichen Gewichten Q, Q so beschwert, daß er bräche: so würde, wenn l = BC des Balkens ganze Länge, b seine Breite, h seine Höhe bedeutet, $Q = \frac{\frac{1}{2} K \cdot bh^2}{\frac{1}{2} l}$; also ist die Summe der an beiden Enden erforderlichen Gewichte $= \frac{2K \cdot b \cdot h^2}{l}$, viermal so groß, als das Gewicht sein würde, welches zum Zerbrechen hinreicht, wenn der Balken am einen Ende fest eingemauert und am andern mit dem das Zerbrechen bewirkenden Gewichte beschwert ist.

Da die Unterlage hier den Druck $= 2 . Q = \frac{2K . bh^2}{l}$ leidet: so ist einleuchtend, daß umgekehrt ein in B und C unterstützter Balken, in der Mitte mit einem Gewichte $= \frac{2K . bh^2}{l}$ belastet werden könnte, ehe er zu brechen anfängt.

§. 264. Bemerkung. Wir haben den Balken als vollkommen spröde betrachtet, so daß er zerbreche ohne vorherige Biegung; aber dieses findet fast nie ganz statt. Alle Körper leiden eine Biegung ehe sie brechen, und beim Holze vorzüglich dehnen die Fasern sich merklich aus, ehe sie zerreißen.

Ist also FA (Fig. 97.) ein bei F fest eingemauerter, bei A belasteter Balken: so nimmt dieser, obgleich er grade war, eine Krümmung an, indem die Fasern in BG sich ausdehnen, in FC zusammen gedrückt werden. Da die Krümmung dieses Ausdehnen einiger und Zusammendrücken andrer Fasern nothwendig zur Folge hat, so giebt es eine gewisse Linie AH, in welcher weder das eine noch das andere statt findet. Für diejenigen Fasern aber, die gedehnt oder zusammen gepreßt sind, ist die Kraft, mit welcher sie einer größern Dehnung oder einer größern Zusammenpressung widerstehen, der schon erlangten Ausdehnung oder Zusammendrückung proportional.

§. 265. Lehrsatz. Auch bei biegsamen parallelepipedischen Balken ist die zum Brechen erforderliche Kraft dem Quadrate der Höhe direct, der Breite direct, und der Länge umgekehrt proportional, wenn der Balken am einen Ende eingemauert, und am andern die zum Brechen erforderliche Kraft angebracht ist.

Beweis. GA (Fig. 97.) sei die Gestalt, welche der Balken im Augenblicke des Brechens angenommen hat; MN sei in L, mn in l senkrecht auf diejenige Linie, welche weder Dehnung noch Zusammenpressung leidet; op sei mit mn parallel. Dann ist die Fiber Mm und

oM ausgedehnt, und widersteht dem Zerreißen mit einer Kraft, die der oM proportional ist, die ich daher = p . oM setzen will.

Jede näher an AH liegende Fiber wird weniger ausgedehnt und leistet daher einen geringern Widerstand, in eben dem Verhältnisse, wie die im Dreiecke oLM parallel mit oM an jener Stelle gezogene Linie kürzer ist. Hieraus läßt sich übersehen, daß der gesammte Widerstand, den alle zwischen L und M liegenden Fibern leisten, dem Dreiecke oLM proportional ist, weil die Fiber Mmμν mit einer Kraft widersteht, die dem Producte aus ihrem Querschnitte in ihre Dehnung oM proportional ist, und die Summe dieser Producte dem Dreiecke LoM proportional ist.

Eben so ist die Summe der Kräfte, welche unterhalb L vermöge der Zusammenpressung widerstehen; dem Dreiecke NLp proportional, weil jede Fiber in Verhältniß der ihr aufgezwungenen Verkürzung widersteht.

Dieser Dreiecke Fläche ist dem Quadrate der Höhe proportional; denn wenn der Balken sich nur bis an rq erstreckte, so wäre Lrq : LoM = $Lq^2 : LM^2$, also ist die Kraft, mit welcher alle Fibern des Balkens dem Zerreißen widerstehen, dem Quadrate der Höhe proportional. Daß sie auch der Breite proportional ist, erhellt von selbst, da in allen mit GFA parallelen Längenschnitten eben die Kräfte sich dem Zerreißen widersetzen. Endlich verhält sich das Moment der Kraft Q, wie die von A senkrecht auf GK gezogne Linie, welche als mit der Länge einerlei kann angesehen werden, da die Krümmung des Balkens nie sehr erheblich ist.

Anmerkung. Dieser Beweis läßt wenigstens den Hauptgegenstand übersehen, nämlich daß die Stärke des Balkens der Breite und dem Quadrate der Höhe proportional ist. Nähere Untersuchungen über diesen Gegenstand und Versuche über die Festigkeit der Körper giebt Eytelwein im 2ten Bande.

§. 266. Lehrsatz. Aufgabe. Mit Hülfe des trigonometrischen Satzes, daß

$\text{Sin } 3A = 3 \,.\, \text{Sin } A \,.\, \text{Cos}^2 A - \text{Sin}^3 A$ ist, die cubische Gleichung $x^3 - fx + g = 0$, aufzulösen, wenn f, g gegebene Größen sind.

Auflösung. Für einen bestimmten Halbmesser $= r$, wird der Sinus des Winkels 3A durch eine Linie $= a$ dargestellt, und $\frac{a}{r} = \text{Sin } 3A$ ist die Zahl, welche wir in den Tafeln unter dem Namen Sinus finden (Trig. §. 5. 17.).

Für eben den Halbmesser stelle eine Linie $= z$ den Sinus des Winkels A dar, oder es sei $\text{Sin } A = \frac{z}{r}$; $\text{Cos } A = \sqrt{(1 - \text{Sin}^2 A)} = \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)}$, so wird sich die trigonometrische Formel (Trigon. §. 46.) für Sin 3A in folgender Form darstellen,

$$\frac{a}{r} = \frac{3z}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) - \frac{z^3}{r^3}, \text{ das ist}$$

$$a r^2 = 3r^2 z - 4z^3; \text{ oder}$$

$$z^3 - \tfrac{3}{4} r^2 z + \tfrac{1}{4} a r^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat mit der aufzulösenden $x^3 - fx + g = 0$ ganz einerlei Form, und da jene für jeden Werth von r und a gilt, so ist es mir erlaubt

$\tfrac{3}{4} r^2 =$ dem gegebenen f,

und $\tfrac{1}{4} a r^2 =$ dem gegebenen g, anzunehmen,

also $r^2 = \tfrac{4}{3} f$; $a = \frac{3g}{f}$.

In der Gleichung $z^3 - \tfrac{3}{4} r^2 z + \tfrac{1}{4} a \,.\, r^2 = 0$ ist $z = r \,.\, \text{Sin } A$, wenn $a = r \,.\, \text{Sin } 3A$ ist. Berechne ich also aus den gegebenen f und g, $\frac{a}{r} = \frac{3g \,.\, \sqrt{3}}{2f \,.\, \sqrt{f}}$ und nenne den Winkel $= 3A$, welcher zum Sinus $\frac{3g \,.\, \sqrt{3}}{2f \,.\, \sqrt{f}}$ gehört, so ist $x = r \,.\, \text{Sin } A = \frac{2 \,.\, \sqrt{f}}{\sqrt{3}} \,.\, \text{Sin } A$ der gesuchte Werth für x.

Beispiel. Die zu lösende Gleichung sei
$x^3 - 5x + 2 = 0$, so ist $r^2 = \frac{20}{3}$;
$a = \frac{6}{5}$; $\frac{a}{r} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{5}} = 0{,}464758$, welches
$= \mathrm{Sin}\, 3A$ sein soll. Diese Zahl gehört aber als Sinus
$27^0 . 41' . 40''$, also ist
$3A = 27^0\ 41'\ 40''$;
$A = 9^0\ 13'\ 53\frac{1}{3}$;
und $x = r . \mathrm{Sin}\, A = 2 . \sqrt{\frac{5}{3}} . \mathrm{Sin}\ 9^0\ 13'\ 53\frac{1}{3}''$
$= 2{,}581989 . \mathrm{Sin}\ 9^0\ 13'\ 53\frac{1}{3}''$
$= 2{,}581989 . 1{,}604236.$
$= 0{,}414213.$
welches die richtige Wurzel ist.

Anmerkung. Eigentlich gehört die Zahl $= 0{,}464758$, als Sinus eben so gut zum Winkel $360^0 + 27^0\ 41'\ 40''$, und auch zum Winkel $720^0 + 27^0\ 41'\ 40''$; man könnte also für $3A$ auch diese Werthe setzen und fände dann $A = 129^0\ 13'\ 53\frac{1}{3}''$, oder auch
$A = 249^0\ 13'\ 53\frac{1}{3}''$.
Dem ersteren Werthe gehört der Sinus $= 0{,}774597$, also $x = r . 0{,}774597 = 2{,}581989 . 0{,}774597$
$= 2{,}000000.$
und $x = + 2$, ist eine zweite richtige Wurzel.
Dem zweiten Werthe für A gehört der Sinus
$= - 0{,}9350206$; also $x = - 2{,}581989 . 0{,}93502$;
$x = - 2{,}414214$,
als die dritte Wurzel.
Es ist nämlich $x^3 - 5x + 2 = (x-2)(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$, und der gegebenen Gleichung entsprechen daher die drei Werthe $x = 2$; $x = -1 + \sqrt{2}$; $x = -1 - \sqrt{2}$.

§. 267. Aufgabe. ABCDG (Fig. 98.) ist der Querschnitt eines Cylinders, welche Breite AB und Höhe BC muß man dem daraus zu schneidenden rechtwinklichten Balken geben, damit dieser der stärkste sei, der sich aus diesem Cylinder schneiden läßt.

Auflösung. Wenn des Cylinders Halbmesser EB = R ist, so ist des aus ihm zu schneidenden stärksten

Balken wird, wenn alle Querschnitte gleich sind, da, wo er eingemauert ist, brechen, theils weil das Moment der am Ende des Balkens angebrachten Kraft hier am grössesten ist, theils weil das Gewicht des Balkens selbst das Brechen befördert. Gäbe man nun dem Balken, bei überall gleicher Breite, gegen dK zu eine immer grössere Höhe, so daß der verticale Längenschnitt etwa wie EdnF würde, so könnte die schwächste Stelle wo anders liegen, odder man könnte auch die gegen dK hin wachsende Dicke oder Höhe so bestimmen, daß in allen Puncten dem Brechen mit gleicher Gewalt Widerstand geleistet würde. Wenn das letztere der Fall ist, so sagt man, der Balken sei ein überall gleich widerstehender Balken.

§. 270. Bemerkung. Die Bestimmung der rückwirkenden Festigkeit oder der Last, welche ein aufrecht stehender prismatischer Körper, ein Pfeiler oder eine Säule tragen kann, ohne zusammen zu brechen, beruht auf der Untersuchung der Gestalt, welche ein elastischer Körper von prismatischer Form annimmt, wenn er durch Kräfte genöthiget wird, von seiner natürlichen, graden Stellung abzuweichen.

Eine verticale Säule wird, ehe sie bricht, eine Krümmung annehmen, die zuerst daher entsteht, daß entweder der Druck am Gipfel nicht über den ganzen Querschnitt gleichförmig vertheilt ist, oder daß irgendwo in der Masse der Säule schwächere Theile eine stärkere Zusammenpressung erlauben. Ist nun die Säule ein wenig gebogen, so widersteht sie, als ein elastischer Körper, dem fernern Beugen und Brechen, und wie sie widersteht, hängt von der Gestalt ab, die der elastische Körper annehmen kann. Die Gesetze dieser Krümmung ließen sich vielleicht auch hier entwickeln, aber ich besorge, wenigstens nicht ohne große Weitläuftigkeit, dieses ausführen zu können, und verweise daher auf vollständigere Werke, insbesondere auf Eytelwein.

Hier mag es genügen zu bemerken, daß die rückwirkende Festigkeit gleichartiger, parallelepipedischer Körper sich verhält, direct wie der Cubus der Dicke, direct wie die Breite, und umgekehrt wie das Quadrat der Länge, wenn man nämlich die Höhe der Säule ihre Länge nennt, unter Dicke aber diejenige Abmessung des Querschnitts versteht, nach welcher die Biegung erfolgt, und unter Breite die hierauf senkrechte Abmessung des Querschnittes.

Balken wird, wenn alle Querschnitte gleich sind, da, wo er eingemauert ist, brechen, theils weil das Moment der am Ende des Balkens angebrachten Kraft hier am größesten ist, theils weil das Gewicht des Balkens selbst das Brechen befördert. Gäbe man nun dem Balken, bei überall gleicher Breite, gegen dK zu eine immer größere Höhe, so daß der verticale Längenschnitt etwa wie EdnF würde, so könnte die schwächste Stelle wo anders liegen, oder man könnte auch die gegen dK hin wachsende Dicke oder Höhe so bestimmen, daß in allen Puncten dem Brechen mit gleicher Gewalt Widerstand geleistet würde. Wenn das letztere der Fall ist, so sagt man, der Balken sei ein überall gleich widerstehender Balken.

§. 270. Bemerkung. Die Bestimmung der rückwirkenden Festigkeit oder der Last, welche ein aufrecht stehender prismatischer Körper, ein Pfeiler oder eine Säule tragen kann, ohne zusammen zu brechen, beruht auf der Untersuchung der Gestalt, welche ein elastischer Körper von prismatischer Form annimmt, wenn er durch Kräfte genöthiget wird, von seiner natürlichen, graden Stellung abzuweichen.

Eine verticale Säule wird, ehe sie bricht, eine Krümmung annehmen, die zuerst daher entsteht, daß entweder der Druck am Gipfel nicht über den ganzen Querschnitt gleichförmig vertheilt ist, oder daß irgendwo in der Masse der Säule schwächere Theile eine stärkere Zusammenpressung erlauben. Ist nun die Säule ein wenig gebogen, so widersteht sie, als ein elastischer Körper, dem fernern Beugen und Brechen, und wie sie widersteht, hängt von der Gestalt ab, die der elastische Körper annehmen kann. Die Gesetze dieser Krümmung ließen sich vielleicht auch hier entwickeln, aber ich besorge, wenigstens nicht ohne große Weitläuftigkeit, dieses ausführen zu können, und verweise daher auf vollständigere Werke, insbesondere auf Eytelwein.

durch die ganze Masse gleichförmig; jedes Stück der Wand, dessen Größe der Grundfläche des Kolbens gleicht, leidet genau denselben Druck, welchen die gesammte auf FE wirkende Kraft ausübt, jedes halb so große Stück der Wand leidet den halben, jedes doppelt so große Stück den doppelten Druck u. s. w. Auch jedes Theilchen des flüssigen Körpers selbst, welches im Innern desselben liegt, wird von allen Seiten her auf diese Weise gedrückt.

§. 4. Bemerkung. Obgleich alle flüssige Körper, an welchen wir Erfahrungen anstellen können, der Einwirkung der Schwere unterworfen sind: so tritt doch diese gleichmäßige Fortpflanzung und Vertheilung des Druckes so klar hervor, daß wir deutlich erkennen, wie es sich ohne Zuthun der Schwere verhalten würde. Wenn in dem Gefäße (Fig. 100.) Wasser enthalten ist, auf das mit Hülfe des Kolbens eine große Kraft drückt: so findet man, daß eine der Grundfläche lm des Kolbens gleiche Oeffnung hi mit einer Gewalt muß verschlossen gehalten werden, welche der auf den Kolben wirkenden gleich ist, oder daß ein bei hi entgegen drückender Kolben, vermöge der auf lm wirkenden Kraft, mit einer Gewalt fortgetrieben wird, die sich zu der auf lm drückenden Kraft verhält, wie die Größe der Fläche hi zur Fläche lm.

§. 5. Erklärung. Es giebt flüssige Körper, welche durch einen Druck von außen, sich in einen engeren Raum zusammen pressen lassen, und der Zusammendrükkung mit immer größerer Gewalt widerstehen, je mehr sie schon zusammen gedrückt sind. Diese heißen nicht bloß zusammendrückbare, compressible, flüssige, sondern auch elastische, oder expansible, weil sie sich wieder ausdehnen, wenn der Druck nachläßt, durch welchen sie in den so engen Raum gepreßt waren. Andre Fluida erlauben keine Zusammendrückung und sind bei vermindertem Drucke auch keiner irgend merklichen Ausdehnung fähig. Diese heißen unelastisch.

Die Gesetze des Gleichgewichts flüssi Körper.

Erster Abschnitt.

Vom Gleichgewichte flüssiger Körper, der Schwere nicht unterworfen sind.

§. 1. Erklärung. Flüssige Körper h einen so schwachen Zusammenhang ihrer Theile, diese durch sehr geringe Kräfte getrennt oder in eine dre Lage gebracht werden können.

§. 2. Erfahrung. Wenn ein flüssiger Kör der der Schwere nicht unterworfen ist, bei dem Dr einer auf ihn wirkenden Kraft im Gleichgewichte ble so verbreitet sich jener Druck durch die ganze M gleichförmig, und jedes Theilchen leidet einen glei Druck.

§. 3. Erläuterung. Da ein Druck, den uns auf einen flüssigen Körper wirkend denken, die stalt dieses Körpers zu ändern strebt, so stellen wir den Körper am besten, als in ein Gefäß eingeschlo vor. Es sei ABCD (Fig. 100.) dieses Gefäß, in de Mündung BEFC sich ein genau schließender Kolben finde, den eine Kraft nach der Richtung HG gegen flüssigen Körper drängt, welcher den ganzen inn Raum des Gefäßes bis an lm ausfüllt. Bleibt nun diesem Drucke alles in Ruhe, so verbreitet sich der Dr

durch die ganze Masse gleichförmig; jedes Stück der Wand, dessen Größe der Grundfläche des Kolbens gleicht, leidet genau denselben Druck, welchen die gesammte auf FE wirkende Kraft ausübt, jedes halb so große Stück der Wand leidet den halben, jedes doppelt so große Stück den doppelten Druck u. s. w. Auch jedes Theilchen des flüssigen Körpers selbst, welches im Innern desselben liegt, wird von allen Seiten her auf diese Weise gedrückt.

§. 4. Bemerkung. Obgleich alle flüssige Körper, an welchen wir Erfahrungen anstellen können, der Einwirkung der Schwere unterworfen sind: so tritt doch diese gleichmäßige Fortpflanzung und Vertheilung des Druckes so klar hervor, daß wir deutlich erkennen, wie es sich ohne Zuthun der Schwere verhalten würde. Wenn in dem Gefäße (Fig. 100.) Wasser enthalten ist, auf das mit Hülfe des Kolbens eine große Kraft drückt: so findet man, daß eine der Grundfläche lm des Kolbens gleiche Oeffnung hi mit einer Gewalt muß verschlossen gehalten werden, welche der auf den Kolben wirkenden gleich ist, oder daß ein bei hi entgegen drückender Kolben, vermöge der auf lm wirkenden Kraft, mit einer Gewalt fortgetrieben wird, die sich zu der auf lm drückenden Kraft verhält, wie die Größe der Fläche hi zur Fläche lm.

§. 5. Erklärung. Es giebt flüssige Körper, welche durch einen Druck von außen, sich in einen engeren Raum zusammen pressen lassen, und der Zusammendrükkung mit immer größerer Gewalt widerstehen, je mehr sie schon zusammen gedrückt sind. Diese heißen nicht bloß zusammendrückbare, compressible, flüssige, sondern auch elastische, oder expansible, weil sie sich wieder ausdehnen, wenn der Druck nachläßt, durch welchen sie in den so engen Raum gepreßt waren. Andre Fluida erlauben keine Zusammendrückung und sind bei vermindertem Drucke auch keiner irgend merklichen Ausdehnung fähig. Diese heißen unelastisch.

Fortschieben des Kolbens erfordern, wenn der Druck auf alle Theilchen unverändert bleiben sollte.

§. 10. Der Druck, den jedes Theilchen der Wand leidet, ist auf dieses Stück der Wand senkrecht; denn der Gegendruck, welcher von außen her erforderlich ist, um das Gleichgewicht zu erhalten, muß senkrecht auf die Oberfläche, den angegebnen Bestimmungen gemäß sein. Eben so leidet auch jedes innerhalb liegende Theilchen, das wir uns entweder als ein abgesondertes Stück des flüssigen Körpers selbst, oder als einen fremden Körper vorstellen können, in jedem Puncte seiner Oberfläche einen senkrechten Druck, der den vorigen Bestimmungen gemäß, nämlich dem Drucke auf lm und der Größe jenes Theiles der Oberfläche proportional ist.

§. 11. Aufgabe. Wenn man sich den flüssigen Körper als nicht schwer denkt, Formeln für den Druck, den jedes Stück der Wand, vermöge eines bekannten äußern Druckes, leidet, anzugeben.

Auflösung. Wir können die auf den Kolben drükkende Kraft als ein Gewicht $= P$ ansehen. Da dieses auf die Fläche lm, die $= f^2$ heißen mag, vertheilt ist, und jeder andre Theil hi $= g^2$ der Oberfläche, einen seiner Größe proportionalen Druck leidet, so ist $f^2 : g^2 = P : \frac{g^2}{f^2} P$, und $\frac{g^2 P}{f^2}$ ist der Druck auf hi.

Wenn man sich ein aus demselben flüssigen Körper bestehendes Prisma denkt, dessen Grundfläche $= f^2$ ist, und dessen Höhe $= h$ so groß genommen wird, daß bei Einwirkung der Schwere das Gewicht desselben $= P$, also $f^2 . h = P$ wäre, wenn wir das Gewicht des Cubicfußes oder allgemein der bei der Körpermessung zum Grunde liegenden Einheit, $= 1$ setzen: so wäre $\frac{P}{f^2} = h$, und der Druck, den jeder Theil $= g^2$ der Oberfläche leidet $= g^2 . h$. Der Druck würde also in jedem Puncte durch das Gewicht eines gleich hohen Prisma's eben jenes

hellt daraus, weil überall, wo wir eine Oeffnung im Gefäße machen, ein Gegendruck, der Größe der Oeffnung proportional, nöthig ist, um das Ausfließen des Wassers zu hindern. Dieser Druck, den jedes Theilchen leidet, vermindert sich sogleich, wenn der Druck auf lm abnimmt, und würde in einem nicht schweren Fluido ganz verschwinden, wenn die drückende Kraft ganz zu wirken aufhörte. Im letztern Falle würde der in ABEFCD enthaltene tropfbare Körper ganz ruhig bleiben, und keinen Druck mehr auf die Wände ausüben, gegen welche er sich vorher mit Gewalt andrängte, als die Kraft bei lm einen Druck auf ihn ausübte. In diesem letztern Falle bedürfte es nicht einmal eines Gefäßes, sondern der gar nicht schwere Körper würde ohne gegenseitigen Druck seiner Theile in der Gestalt und Lage verharren, die er einmal hatte.

§. 9. Es scheint im ersten Augenblicke auffallend, daß eine Kraft = P, welche auf lm vermittelst des Kolbens wirkt, einen so vervielfachten Druck gegen die Wände ausübt; denn wenn der ganze innere Raum der Wand des Gefäßes = 1000 . lm ist, so leidet jeder Raum der Wand, der = lm ist, den Druck = P, und dieser Druck wird folglich auf dem ganzen Raume der Wand tausendfach vorkommen. Aber etwas Aehnliches ereignet sich ja auch in andern Fällen. Wenn ein Hebel am längern Arme mit einem Pfunde beschwert ist, und mit dem $\frac{1}{100}$ so langen, kurzen Arme sich gegen einen festen Körper stützt, so leidet dieser Körper einen Druck = 100 Pfund und die Unterlage einen Druck = 101 Pfunde, obgleich jenes eine Pfund die einzige thätige Kraft ist. Diese anscheinende Vervielfältigung der Kraft findet dort, und findet hier, nur im Zustande des Gleichgewichts statt; denn bei entstehender Bewegung wird das eine Ende des Hebels zwar mit großer Gewalt, aber langsam bewegt, und eben so würde auch hier das geringste Ausweichen der Wände ein sehr erhebliches

Fortschieben des Kolbens erfordern, wenn der Druck auf alle Theilchen unverändert bleiben sollte.

§. 10. Der Druck, den jedes Theilchen der Wand leidet, ist auf dieses Stück der Wand senkrecht; denn der Gegendruck, welcher von außen her erforderlich ist, um das Gleichgewicht zu erhalten, muß senkrecht auf die Oberfläche, den angegebnen Bestimmungen gemäß sein. Eben so leidet auch jedes innerhalb liegende Theilchen, das wir uns entweder als ein abgesondertes Stück des flüssigen Körpers selbst, oder als einen fremden Körper vorstellen können, in jedem Puncte seiner Oberfläche einen senkrechten Druck, der den vorigen Bestimmungen gemäß, nämlich dem Drucke auf lm und der Größe jenes Theiles der Oberfläche proportional ist.

§. 11. Aufgabe. Wenn man sich den flüssigen Körper als nicht schwer denkt, Formeln für den Druck, den jedes Stück der Wand, vermöge eines bekannten äußern Druckes, leidet, anzugeben.

Auflösung. Wir können die auf den Kolben drükkende Kraft als ein Gewicht $= P$ ansehen. Da dieses auf die Fläche lm, die $= f^2$ heißen mag, vertheilt ist, und jeder andre Theil hi $= g^2$ der Oberfläche, einen seiner Größe proportionalen Druck leidet, so ist $f^2 : g^2 = P : \frac{g^2}{f^2} P$, und $\frac{g^2 P}{f^2}$ ist der Druck auf hi.

Wenn man sich ein aus demselben flüssigen Körper bestehendes Prisma denkt, dessen Grundfläche $= f^2$ ist, und dessen Höhe $= h$ so groß genommen wird, daß bei Einwirkung der Schwere das Gewicht desselben $= P$, also $f^2 . h = P$ wäre, wenn wir das Gewicht des Cubicfußes oder allgemein der bei der Körpermessung zum Grunde liegenden Einheit, $= 1$ setzen: so wäre $\frac{P}{f^2} = h$, und der Druck, den jeder Theil $= g^2$ der Oberfläche leidet $= g^2 . h$. Der Druck würde also in jedem Puncte durch das Gewicht eines gleich hohen Prisma's eben jenes

Körpers ausgedrückt, wenn man sich dieses immer über derjenigen Oberfläche errichtet denkt, für welche der Druck soll bestimmt werden.

Anmerkung. Es kann wohl nicht auffallend sein, daß wir uns hier des Gewichts einer flüssigen Masse bedienen, um den Druck abzumessen, obgleich wir von der Schwere abstrahiren wollten. Unstreitig ist es uns erlaubt, die Wirkungen, welche ohne die Schwere statt finden, abgesondert zu betrachten, und das ist ja nur der Zweck unsrer jetzigen Betrachtungen. Jene Gewichte dienen nur als bequeme Abmessungen des Druckes.

§. 12. Diese Ueberlegungen erklären es, warum man den Druck, welchen irgend ein Theil des flüssigen Körpers oder ein Theil der Wand des Gefäßes leidet, durch die Höhe einer Wassersäule anzugeben pflegt, indem man da, wenn das Gewicht eines Cubicfußes Wasser = 1 gesetzt wird, nicht noch besonders der Größe der Oberfläche zu erwähnen braucht, die den Druck leidet.

§. 13. Lehrsatz. Obgleich jeder Theil der Wand und jedes Theilchen des Flüssigen selbst den eben bestimmten Druck leidet, so ist doch die Gewalt, mit welcher das ganze Gefäß nebst dem darin enthaltenen Fluido fortgetrieben wird, nur eben so groß, als wenn die nach HG wirkende Kraft = P auf einen festen Körper wirkte (Fig. 101.).

Beweis. Da alle Wände des Gefäßes mit überall gleichen, auf die einzelnen Puncte senkrechten Kräften gedrückt werden: so wirkt dieser Druck an einer Stelle dem an der andern entgegen, und die auf die Wände drückenden Kräfte heben einander auf. Es sei die nach der Richtung HG senkrecht gegen des Kolbens Grundfläche lm drückende Kraft gleich dem Gewichte einer über dieser Grundfläche stehenden Wassersäule von der Höhe = h, so ist der senkrechte Druck auf irgend einen Theil no der Oberfläche des Gefäßes = h . no. Dieser Druck läßt sich, wenn man irgend eine willkürliche Linie zieht, zum Beispiel DE, zerlegen nach einer Richtung mit die-

§. 15. Der Körper Z wird von allen Seiten her mit einer gewissen Kraft gedrückt; wenn er nicht fest genug wäre, um diesen Druck auszuhalten, so würde er zerdrückt werden.

§. 16. Bemerkung. Wenn der in ABCD (Fig. 100.) enthaltene flüssige Körper der Zusammendrückung fähig ist: so widersteht der Druck des Flüssigen erst dann völlig der zusammendrückenden Kraft, wenn der Körper zu einer gewissen Dichtigkeit gelangt ist. War der Druck für die bestehende Verdichtung des Flüssigen zu groß, so wird der Kolben EF weiter hinein getrieben, und das Fluidum dadurch bis zu dem Grade verdichtet, daß es nun der weitern Verdichtung mit einer dem äußeren Drucke gleichen Gewalt widersteht; war die Verdichtung zu groß für den auf EF wirkenden Druck, so dehnt das Fluidum sich, indem es den Kolben zurück treibt, in einen größern Raum aus, bis der bei verminderter Dichtigkeit abnehmende Druck mit dem äußeren Drucke im Gleichgewichte ist. Hieraus erhellt, daß die Dichtigkeit und der ausgeübte Druck bei diesen Körpern in einer bestimmten Verbindung stehen.

§. 17. Erfahrung. Bei allen elastischen Flüssigen, die wir kennen, ist der Druck, den sie ausüben, der Dichtigkeit proportional, oder umgekehrt, wenn ein gewisser auf lm wirkender Druck, $= h \cdot lm$, den elastisch flüssigen Körper in den Raum $= A$ zusammen preßt, so wird der doppelte Druck $= 2 \cdot h \cdot lm$, ihn in den Raum $= \frac{1}{2} A$, der dreifache Druck ihn in den Raum $= \frac{1}{3} A$ zusammen drängen (vergleiche in der Folge §. 54.).

§. 18. Diese Regel findet bei den Verdichtungen und Verdünnungen der Luft, welche wir mit Genauigkeit beobachten können, statt. Es ist zwar wahrscheinlich, daß es auch für die Luft eine Grenze der größesten Verdichtung geben mag, wo sie durch größere Kräfte nicht mehr in einen engern Raum gebracht werden kann, und daß es eine Grenze der größesten Verdünnung geben

mag, wo sie selbst bei ganz verschwindendem Drucke sich nicht weiter ausdehnt; aber diese Grenzen scheinen bei unsern Versuchen lange nicht erreicht zu werden, und wir reden daher von jener Regel als von einer allgemein gültigen.

§. 19. Aufgabe. Es ist der Druck gegeben, mit welchem ein elastisch flüssiger Körper zusammen gedrückt wird; die Dichtigkeit zu bestimmen, bei welcher das Gleichgewicht eintreten kann.

Auflösung. Wenn man weiß, daß der flüssige Körper die Dichtigkeit = b annimmt, wenn jedes Theilchen mit einer Kraft gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe = a gedrückt wird: so wird für den Druck = h . Im auf den Kolben von der Grundfläche = Im, das Gleichgewicht bestehen, wenn die Dichtigkeit

$$= \frac{b \cdot h}{a} \text{ ist.}$$

h bedeutet hier die Höhe einer Wassersäule, deren Gewicht den Druck abmißt, so wie a es in dem anderen Falle that.

§. 20. Anmerkung. Daß die Dichtigkeit der Luft nicht bloß vom Drucke, sondern auch von der Wärme abhängt, werden wir nachher näher betrachten: hier beziehen wir alles auf sonst gleiche Umstände, also auf einen bestimmten Wärmegrad.

§. 21. Bemerkung. Die Gesetze, nach welchen die Luft mit Hülfe der Luftpumpe verdünnt und verdichtet wird, hängen fast gar nicht von der Schwere der Luft ab, und deshalb werde ich sie hier abhandeln. Allerdings ist die Luft schwer; aber der Uebergang der Luft aus einem luftvollen Gefäße in ein luftleeres, hängt fast gänzlich von ihrer Elasticität und auf keine merkliche Weise von ihrem Gewichte ab.

Das Wesentlichste bei der Luftpumpe ist, daß der Raum AB (Fig. 103.) mit einem Cylinder DE, aus welchem man die Luft wegschaffen kann, verbunden ist. Will man die Luft in AB verdünnen, so muß bei f ein

Hahn sein, der der äußern Luft den Zugang verschließt, und die zwischen D und dem Kolben GH enthaltene Luft muß durch eine Oeffnung bei f einen Ausgang ins Freie finden. Gewöhnlich ist der Hahn f so gebohrt, daß er bei einer Stellung einen freien Durchgang der Luft von dem Raume DH in die freie Luft gestattet, und daß er bei einer zweiten Stellung, wenn man ihn um einen Quadranten dreht, einen freien Durchgang der Luft von DH nach AB giebt; während der eine Durchgang geöffnet ist, ist der andre verschlossen.

Will man die Luft in AB verdünnen, so dreht man den Hahn f so, daß die Luft DH mit der äußeren Luft in Verbindung, der Durchgang nach AB aber gesperrt ist; man bringt nun den Kolben ganz nahe an DI, und öffnet, wenn das geschehen ist, den Durchgang von AB nach dem Cylinder. Wird nun der Kolben nach E zu zurückgezogen, so strömt die Luft, vermöge ihrer Elasticität aus AB durch den Hahn f in den Cylinder über, und in diesem ganzen Raume ist eine verdünnte Luft, die mit der äußeren Luft in keiner Verbindung steht. Man dreht jetzt den Hahn f so, daß AB ganz verschlossen ist, und die Luft in DE mit der äußeren in Verbindung steht; die Luft in AB bleibt also verdünnt, während der Kolben an DI geschoben, und alle Luft aus dem Cylinder ausgetrieben wird. Jetzt öffnet man wieder den Durchgang von AB nach dem Cylinder, damit beim Rückgange des Kolbens nach E zu die verdünnte Luft in AB sich in den Cylinder verbreite und folglich sich noch mehr verdünne. Und so setzt man die Arbeit fort, indem man immer beim Vorwärtsgehen des Kolbens gegen DI zu, die Verbindung mit der freien Luft öffnet, und dagegen die Verbindung mit AB öffnet, wenn man den Kolben nach E hin zurückzieht.

Soll die Luft in AB verdichtet werden, so verfährt man umgekehrt. Man öffnet die Verbindung mit der

freien Luft, während der Kolben nach E zurückgeht; dann schließt man den freien Ausgang der Luft bei f und läßt ihr nur den Weg nach AB offen, damit sie, wenn man den Kolben gegen DI zu schiebt, genöthigt werde, sich in das Gefäß AB zu drängen und sich folglich da zu verdichten. Beim Zurückgehen des Kolbens nach E ist AB geschlossen, und neue Luft tritt von außen in den Cylinder, die man abermals, indem man den Kolben gegen DI treibt, zwingt, in das Gefäß AB zu gehen, indem man bloß die dorthin führende Oeffnung des Hahnes f offen läßt.

§. 22. Aufgabe. Die Größe des inneren Raumes (Fig. 103.) AB, in welchem die Luft verdünnt werden soll, ist gegeben, nebst der Größe des cylindrischen Raumes, welcher beim völligen Rückgange des Kolbens sich mit Luft aus dem Gefäße füllt; zu bestimmen, bis zu welchem Grade die Verdünnung der Luft getrieben ist, nachdem man auf die gehörige Art den Kolben n mal zurückgetrieben hat.

Auflösung. Es sei der innere Raum des Gefäßes AB bis an den Hahn f durch $= a$, der innere Raum des Cylinders, welcher sich beim Rückgange des Kolbens mit Luft aus dem Gefäße füllt, durch $= b$ ausgedrückt, so wird beim ersten Zurückgehen des Kolbens die Luft, welche den Raum $= a$ einnahm, als sie im Zustande der ursprünglichen Dichtigkeit war, jetzt in den Raum $= a + b$ ausgedehnt. Setze ich also ihre ursprüngliche Dichtigkeit $= D$, so ist nach einmaligem Zurückziehen des Kolbens die Dichtigkeit $= \frac{a}{a+b} . D$.

Die im Cylinder enthaltene Luft wird jetzt heraus getrieben, und die noch im Raume $= a$ enthaltene Luft dehnt sich beim zweiten Zurückgehen des Kolbens wieder in den Raum $= a + b$ aus; ihre Dichtigkeit nach dem zweiten Kolbenzuge verhält sich also zu der nach dem ersten Kol-

benzuge, wie a zu $a+b$, und die Dichtigkeit ist folglich nach dem zweiten Kolbenzuge $= \frac{a^2}{(a+b)^2} D$. Aus ähnlichen Gründen ist sie nach dem dritten Kolbenzuge

$$= \frac{a^3}{(a+b)^3} D;$$

nach dem n^{ten} Kolbenzuge $= \frac{a^n}{(a+b)^n} D$.

§. 23. So würde es sein, wenn im strengsten Sinne alle zwischen f und dem Kolben befindliche Luft bei dem Fortschieben des Kolbens gegen DI herausgetrieben würde. Ganz vollkommen geschieht das nie; sondern es ist fast unvermeidlich, daß nicht ein kleiner Raum bei f, der sogenannte schädliche Raum, mit Luft von der natürlichen Dichtigkeit $= D$ gefüllt bleibe, und die Verdünnung schwäche. Heißt die Größe dieses Raumes $= c$: so ist es beim ersten Kolbenzuge die Luft des Raumes $= a + c$, die sich in den Raum $= a + b + c$ ausdehnt und nach dem ersten Kolbenzuge ist die Dichtigkeit $= \frac{a+c}{a+c+b} D$; beim zweiten Kolbenzuge dehnt sich die Luft in dem Raume $= c$, deren Dichtigkeit $= D$ und die Luft im Raume $= a$, deren Dichtigkeit $= \frac{a+c}{a+c+b} . D$ war, in den Raum $= a + c + b$ aus. Die ganze Luftmasse war also, als der Kolben an DI anlag,

$$= c . D + a . \frac{a+c}{a+c+b} . D,$$ und diese wird beim zweiten Kolbenzuge in den Raum $= a+b+c$ ausgedehnt. Heißt also jetzt ihre Dichtigkeit $= d'$, so ist

$$(a+b+c) . d' = c . D + a . \frac{a+c}{a+c+b} . D,$$

und $d' = \frac{c}{a+b+c} D + \frac{a(a+c) . D}{(a+b+c)^2}$.

Wenn der Kolben zum zweitenmale an DI geschoben ist, so ist im Raume $= a$ Luft von der Dichtigkeit

$= d'$, die in diesem Raume enthaltne Luftmasse $= a.d'$; die im schädlichen Raume $= c$ enthaltne Luftmasse hat die Dichtigkeit $= D$, ihre ganze Masse ist $= c.D$, also die gesammte Luftmasse

$$= c.D + a.d' = c.D + \frac{a.c.D}{a+b+c} + \frac{a^2(a+c)D}{(a+b+c)^2},$$

indem diese sich in den Raum $= a+b+c$ ausdehnt, nimmt sie die Dichtigkeit $= d''$ an und $d''.(a+b+c)$ ist jener Luftmasse gleich, also

$$d'' = \frac{c.D}{a+b+c} + \frac{a.c.D}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2(a+c)D}{(a+b+c)^3};$$

Wenn abermals der Kolben nach DI geschoben ist, so ist die vorhandene Luftmasse $= a.d'' + c.D$, und diese erlangt beim vierten Kolbenzuge die Dichtigkeit $= d'''$ und es ist $d'''.(a+b+c) = a.d'' + c.D$,

$$\text{also } d''' = \frac{c.D}{a+b+c} + \frac{a.c.D}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2c.D}{(a+b+c)^3} + \frac{a^3(a+c)D}{(a+b+c)^4},$$

$$\text{oder } d''' = c.D\left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{a}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2}{(a+b+c)^3} + \frac{a^3}{(a+b+c)^4}\right) + \frac{a^4 D}{(a+b+c)^4}$$

und nach n Kolbenzügen die Dichtigkeit $= \delta =$

$$c.D\left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{a}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2}{(a+b+c)^3} + + + + \frac{a^{n-1}}{(a+b+c)^n}\right) + \frac{a^n D}{(a+b+c)^n},$$

Wegen des schädlichen Raumes läßt sich also die Verdünnung nicht bis zu jedem willkürlichen Grade treiben; denn die Summe der im ersten Gliede dargestellten geometrischen Reihe ist, je größer n wird, desto näher (Arithmetik §. 211.)

$= \frac{1}{(b+c)}$, also bleibt, wenn auch das letzte Glied ganz

unbedeutend wird doch $\delta = \frac{c}{b+c}$. D und dieses ist die Grenze der Verdünnung.

§. 24. Warum dies die Grenze der Verdünnung ist, läßt sich auch so übersehen. Wenn bloß die im schädlichen Raume enthaltene Luft, deren Masse $= c.D$ ist, sich in den Raum $= b + c$ vertheilt, so bleibt noch ihre Dichtigkeit $= \frac{c}{b+c}$. D. Wäre also die Luft in AB schon so weit verdünnt, so würde beim Zurückgehen des Kolbens gar keine Luft mehr durch den Hahn in den Cylinder strömen, und also das Spielen des Kolbens ohne allen Erfolg fortgesetzt.

§. 25. **Aufgabe.** Die Größe des innern Raumes AB, in welchem die Luft verdichtet werden soll = a, und der Raum, welcher im Cylinder bei jedem Kolbenzuge frei wird, = b, ist bekannt; man verlangt den nach n maligem Kolbenschube zu Stande gebrachten Grad der Verdichtung zu bestimmen.

Auflösung. Wenn der Kolben beim Anfange der Operation ganz nach E zurückgezogen ist, so wird beim ersten Kolbenschube gegen DI zu alle in $a + b$ befindliche Luft von der natürlichen Dichtigkeit = D in den Raum = a zusammengedrängt, wo sie folglich die Dichtigkeit $d' = \frac{(a+b)}{a}$ D erlangt.

Hier bleibt die Luftmasse $= a.d' = (a + b)$ D verschlossen während des Rückgangs des Kolbens; aber beim zweiten Kolbenschube wird die in den Cylinder eingelassene Luftmasse $= b.D$ mit jener zusammen in den Raum = a gedrängt, die Dichtigkeit wird also $= d'' = \frac{(a+2b)}{a}$ D.

nach dem dritten Kolbenschube $= d''' = \left(\frac{a+3b}{a}\right)$ D.

nach dem nten Kolbenschube $= \delta = \left(\frac{a+nb}{a}\right)$ D.

§. 26. Auch hier hat der schädliche Raum etwas Einfluß; aber dieser ist weniger erheblich, weshalb ich dabei nicht verweilen will.

Anmerkung. Ueber die mannigfaltigen Einrichtungen und Verbesserungen der Luftpumpe viel zu sagen, ist hier der Ort nicht. Die physicalischen Wörterbücher von Gehler und Fischer geben Nachrichten davon, auch findet man manche neuere Verbesserung in Gilberts Annalen der Physik beschrieben.

Zweiter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte tropfbar flüssiger Körper, auf welche die Schwere wirkt.

§. 27. Bemerkung. Wenn in einer engen, verticalen Röhre (Fig. 104.) Wasser enthalten ist, dessen einzelne Theilchen durch die Schwere niederwärts getrieben werden, so drückt offenbar das oberste Theilchen a mit seinem ganzen Gewichte auf das zunächst unter ihm liegende, und nun leidet nicht bloß das Theilchen b einen Druck, gleich dem Gewichte des a, sondern da der Druck nach allen Richtungen eben so groß ist, so leidet auch die Wand bei b auf jedem ihrer Theile einen diesem Gewichte gemäßen Druck. Mit diesem Drucke verbindet sich das Gewicht des Theilchens b, und folglich wird jeder Punct des Theilchens c einen Druck leiden, der gleich ist dem Gewichte einer über der gedrückten Fläche als Basis stehenden Wassersäule von der Höhe der kleinen Säule ab, und eben so ließe sich für alle folgenden Theilchen fortschließen (§. 11.).

Wäre die eben betrachtete Röhre bei f mit einem weiteren, gleichfalls mit Wasser gefüllten Gefäße AB verbunden: so würde offenbar bei f das Gewicht der ganzen

verticalen Wassersäule eben so drücken, wie in §. 3. die auf den Kolben wirkende Kraft, und das Wasser in der obersten Schichte AC des Gefäßes wird also, schon ohne Rücksicht auf seine eigne Schwere, mit einer Gewalt, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe af gedrückt, und diesen Druck leidet auch jedes Theilchen der Wand neben dieser Schichte.

§. 28. Lehrsatz. Wenn ein tropfbarer Körper, auf welchen die Schwere wirkt, im Gleichgewichte ist: so ist seine freie, nicht durch ein Gefäß zurückgehaltene Oberfläche eine horizontale Ebne.

Beweis. Wenn man sich den flüssigen Körper in dünne verticale Säulen zerlegt denkt, wie ac (Fig. 105.): so übt eine solche Säule ac in c einen Druck aus, der dem Gewichte der Säule ac gleich ist. Mit dieser Gewalt wird aber nicht bloß ihr unterer Querschnitt c gedrückt, sondern auch die neben c liegenden Theilchen leiden einen eben so großen Druck, jede bestimmte Fläche nämlich einen Druck gleich dem Gewichte einer über ihr errichteten Säule des Flüssigen von der Höhe ac. Uebte also nicht die benachbarte Säule bd einen eben so großen Gegendruck aus, so würde bei c und d das Gleichgewicht nicht bestehen; die Säule bd muß daher eben so hoch sein, oder a und b, und so alle Puncte der Oberfläche AB, müssen in einer horizontalen Ebne liegen.

§. 29. Aufgabe. Das grade prismatische Gefäß ABCD (Fig. 106.), dessen Boden CD horizontal steht, ist bis an AB mit Wasser gefüllt, man sucht den Druck, welchen der Boden des Gefäßes leidet.

Auflösung. Auf jeden Punct e des Bodens drückt das ganze Gewicht der über demselben stehenden Wassersäule. Jeder Theil der Bodenfläche leidet also einen Druck gleich dem Gewichte einer über diesem Theile der Fläche errichteten Wassersäule von der Höhe = AC. Heißt also die Größe der Bodenfläche = f^2, und die Höhe AC = h, so ist h . f^2 der gesammte Druck, den der Boden leidet, wenn man das Gewicht einer Wasser-

lasse, die der als Körpermaaß dienenden Einheit gleich t, = 1 setzt.

§. 30. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, wel- hen der horizontale Boden AB (Fig. 107.) irgend eines befäßes leidet, wenn es bis CD mit Wasser gefüllt ist.

Auflösung. Der Druck, welchen der Boden lei- et, ist so groß, als das Gewicht der ganzen prismati- hen Wassersäule ABFE, deren Grundfläche der Boden t, und deren Höhe gleich ist dem senkrechten Abstande er beiden horizontalen Flächen AB, CD von einander.

Beweis. Denn wenn auch ein Theil des Gefäßes wie CDGH enger ist, so wirkt doch das Gewicht des demselben enthaltenen Wassers auf das darunter be- ndliche eben so wie in Fig. 100. der Kolben, und bringt der ganzen, wenn gleich viel größern Schicht GHki hon ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht derselben nen Druck hervor, der durch die Höhe DH der Wasser- iule CDHG ausgedrückt wird. Obgleich also die Fläche k viel größer als die Fläche GH ist, so leidet doch jene en ganzen Druck einer Wassersäule von der Höhe il; nd da diese Schlüsse sich für jede folgende Schicht fort- ühren lassen, so erhellt, daß der horizontale Boden alle- ial den angegebenen Druck leidet.

§. 31. Nach den von §. 8 bis 13. mitgetheilten Er- äuterungen darf ich wohl nicht fürchten, daß dieser, onst dem Anfänger paradox scheinende Satz noch einige Dunkelheit haben könne. Wer indeß noch immer sich icht darin finden könnte, der erwäge, daß der Druck uf den Boden theils von der unmittelbar darauf ruhen- en Last, theils aber von der Mittheilung des (Fig. 108.) uf ab ausgeübten Gegendruckes herrührt; denn indem as Wasser sich gegen ab drängt, was nothwendig ge- chieht, wegen des Druckes, den das in ef befindliche Wasser ausübt, so leiden ja die an ab liegenden Wasser- heilchen einen Druck, der sich rückwärts fortpflanzt, nd in Verbindung mit dem Gewichte von ad den Druck uf den Boden hervorbringt.

Wenn zwischen den beiden horizontalen Flächen ab, cd, Stahlfedern eingeklemmt sind, die sich vertical auszudehnen streben: so sieht jeder sogleich, daß cd nicht bloß vermöge des Gewichtes der Stahlfedern einen Druck leidet, sondern außerdem noch den gesammten Druck aushält, den die Spannung der Federn sowohl gegen ab als gegen cd hervorbringt. Und etwas ziemlich Aehnliches findet hier statt.

§. 32. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen irgend ein Punct m der Wand des Gefäßes leidet, wenn dieses bis an CD (Fig. 107.) mit Wasser gefüllt ist.

Auflösung. Wenn man sich um den Punct m eine sehr kleine Fläche $= g^2$ begrenzt denkt: so leidet sie einen senkrechten Druck, welcher gleich ist dem Gewichte einer Wassersäule von der Grundfläche $= g^2$ und von der Höhe Km $= h$, gleich der verticalen Tiefe des Punctes m unter der Oberfläche CD des Wassers.

Beweis. Jede horizontale Wasserschichte nn wird von allen höher liegenden so gedrückt, als wenn das ganze Wasserprisma, das diese horizontale Schichte zur Basis hat und sich bis an des Wassers Oberfläche erstreckt, mit Wasser gefüllt, auf ihr lastete; dieser Druck pflanzt sich nach allen Richtungen fort, und ist folglich auf jeden gleichen Theil der Wand in eben der Höhe, in welcher jene Wasserschicht sich befindet, eben so groß, und folglich bestimmt die Tiefe des Punctes m unter der Oberfläche CD die Höhe der Wassersäule, welche den Druck auf m angiebt.

§. 33. Lehrsatz. Wenn eine gekrümmte Röhre (Fig. 109.) ABC mit Wasser gefüllt ist: so liegen die Oberflächen des Wassers DE, FG in den beiden Schenkeln der Röhre beim Gleichgewichte in einerlei Horizontal-Ebne.

Beweis. Denkt man sich irgendwo, etwa bei m eine Wand, die beide Schenkel trennte: so leidet der Punct m von dem Wasser in Dm einen Druck, welchen

seiner Tiefe mn unter der Oberfläche DE proportional ist. Befände sich die Oberfläche FG nicht so hoch, so würde m von dem Wasser in Gm weniger gedrückt, und es könnte daher, wenn keine Wand bei m die Bewegung hindert, die Ruhe nicht bestehen, sondern das Wasser würde bei m sich nach der Seite hin bewegen, wohin der stärkere Druck es treibt. Das Gleichgewicht besteht also nur bei gleicher Höhe der Oberfläche DE, FG.

§. 34. Auf den Schlüssen des 30. und 32. §. beruht das ehemals sehr berühmte Experiment mit dem hydrostatischen Hebel, wo sehr große Gewichte durch eine unbedeutende Wassermasse gehoben werden. Man verbindet nämlich (Fig. 110.) eine enge aber hohe, verticale Röhre AB mit einem weiten Gefäße, das überall an den Seiten und zugleich oben mit dem horizontalen Deckel CD fest verschlossen ist. Füllt man nun das untere Gefäß und die damit verbundene Röhre ganz bis an A mit Wasser, so leidet CD den ganzen Druck aufwärts, den das Gewicht einer über CD stehenden bis an A reichenden Wassersäule ausüben würde.

Ist z. B. AB 6 Fuß hoch und 2 Zoll weit, so enthält sie nur etwa 226 Cubiczoll oder ohngefehr 9 Pfund Wasser; die Fläche CD aber leidet, wenn sie 3 Fuß im Durchmesser hat, einen Druck von 2960 Pfunden. Bringt man statt des festen Bodens CD ein wasserdicht übergespanntes Leder an, so leidet jeder Raum von 2 Zoll Durchmesser eben den Druck, welchen die ganze Wassermasse AB unmittelbar ausüben könnte u. s. w.

§. 35. Hieraus erklärt sich der große Nachtheil, den es hervorbringt, wenn am Boden einer Schleuse dem Wasser sich unterwärts ein Zugang öffnet. Denn steht außerhalb der Schleusenthüren das Wasser 20 Fuß hoch, und ist innerhalb die Höhe vielleicht nur 4 Fuß, so wird jeder Quadratfuß des Schleusenbodens mit einer Wasserhöhe von 16 Fußen, das ist mit dem Gewichte von 16 Cubicfußen Wasser oder mehr als 1100 Pfund gedrückt.

§. 36. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen die ganze verticale Wand AB (Fig. 111.) des bis an AC mit Wasser gefüllten Gefäßes ABC leidet.

Auflösung. Wenn die horizontale Breite der Wand = b, ihre Höhe von B bis an die Oberfläche des Wassers = h heißt, so ist der Druck, welchen die ganze Wand leidet = $\frac{1}{2}$ b h².

Beweis. Man stelle sich die ganze Wand in n gleiche, horizontale Streifen zerlegt vor: so ist die Höhe jedes horizontalen Streifens = $\frac{1}{n}$ h, und der Druck auf den obersten größer als o und kleiner als b . $\frac{1}{n}$ h . $\frac{1}{n}$ h, denn das letztere wäre der Druck, welchen er litte, wenn der ganze Streifen Ae sich in der Tiefe = $\frac{1}{n}$ h unter der Oberfläche befände. Aus denselben Gründen läßt sich übersehen, daß so wie wir fanden,

für den ersten Streifen, der Druck > 0; $< \frac{b . h^2}{n . n}$;

auch für den zweiten ist, der Druck $> \frac{b . h^2}{n . n}$; $< \frac{2b . h^2}{n . n}$;

für den dritten, der Druck $> \frac{2b . h^2}{n . n}$; $< \frac{3b . h^2}{n^2}$;

für den vierten, der Druck $> \frac{3b . h^2}{n^2}$; $< \frac{4b . h^2}{n^2}$;

für den n^ten, d. Dr. $> \frac{(n-1) b . h^2}{n^2}$; $< \frac{n . b . h^2}{n^2}$;

Also der Druck auf die ganze Wand

größer als $\frac{b . h^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + + + (n-1))$

und kleiner als $\frac{b . h^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + + + n)$,

das ist größer als $\frac{1}{2} \frac{b . h^2}{n} (n-1)$ (Arithm. §. 156.);

und kleiner als $\frac{1}{2} \frac{b . h^2}{n} (n+1)$.

Da nun dieses gilt, man mag n nehmen so groß man will, und der gesammte Druck immer zwischen jene Grenzen fällt, so ist er $= \frac{1}{2}$ b h².

Diese Grenzen wurden nämlich dadurch gefunden, daß wir zuerst uns jeden Streifen nur in derjenigen Tiefe dachten, wo sich seine obere Seite befindet, also den Druck zu klein angaben; dann aber ihn in der Tiefe dachten, wo sich seine untere Seite befindet, also den Druck zu groß angaben.

§. 37. Man kann diese Auflösung auch in einer andern Form darstellen. Da in jeder Tiefe, z. B. in m, der Druck der Höhe der darüber stehenden Wassersäule proportional ist: so kann man den verhältnißmäßigen Druck in allen Puncten durch Linien darstellen. Trägt man nämlich ef = Ae, mn = Am senkrecht auf Am auf, so stellt mn die Höhe der in m, fe die Höhe der in e drückenden Wassersäule dar, und da alle diese Höhenlinien ef, mn sich in der Seite AK des gleichschenklichten rechtwinklichten Dreiecks AKB endigen, so stellt das Dreieck ABK die Summe aller der auf AB drükkenden Wassersäulchen ef, mn u. s. w. dar; und da dieses Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2}$ AB . BK $= \frac{1}{2}$ h² ist; so leidet die Wand, deren Breite = b den gesammten Druck $= \frac{1}{2}$ b h², als Inhalt des Prisma's ABKG. Denn der Druck auf den Streifen Aed ist gleich dem Gewichte des über Aef errichteten Prisma's von der Höhe = b; der Druck auf den Streifen mr ist gleich dem Gewichte eines Prisma's von der Grundfläche mr und Höhe mn, oder, was eben dasselbe ist, gleich einem Prisma über der Grundfläche nmqs von der Höhe qr = b u. s. w.

§. 38. Der Schwerpunct der parallelogrammischen Wand liegt in der Tiefe $= \frac{1}{2}$ h unter der Oberfläche; man findet also den gesammten Druck auf die Wand, wenn man den Inhalt desjenigen Wasserkörpers sucht, dessen Grundfläche der Wand gleich und dessen Höhe der Tiefe des Schwerpuncts unter dem Wasserspiegel gleich ist.

§. 39. Lehrsatz. Man findet für jede Gestalt der Wand den gesammten Druck, welchen sie leidet, wenn man das Gewicht desjenigen aus der flüssigen Masse gebildeten Körpers sucht, dessen Grundfläche die Oberfläche der Wand und dessen Höhe die Tiefe des Schwerpunctes der Wandfläche unter dem Wasserspiegel ist.

Beweis. Wenn man irgend einen in der Tiefe $= h$ unter dem Wasserspiegel liegenden schmalen horizontalen Streifen der Wand betrachtet, dessen Quadratinhalt $= f^2$ ist, so leidet er den Druck $= f^2 . h$; eben so fände man $'f^2\ h'$ als den Druck für einen andern Streifen, $''f^2\ h''$ für einen dritten u. s. w. Der gesammte Druck wird daher hier eben so ausgedrückt wie das Moment aller Theile der Wand in Beziehung auf eine in der Oberfläche des Wassers liegende Drehungsaxe (vergl. Statik §. 94. 95. 146.) und dieses Moment ist eben so groß als das Gewicht der ganzen Wand in die Entfernung des Schwerpunctes von der Drehungsaxe multiplicirt. Also ist dieser letztere Ausdruck auch hier der richtige für den Druck, welchen das Wasser auf die Wand ausübt, nur mit dem Unterschiede, daß man hier bloß die Größe der ganzen Wand in der Formel verstehen muß, und als Gewichtseinheit das Gewicht eines Cubicfußes oder der Körpereinheit des drückenden Fluidi zu betrachten hat.

§. 40. Aufgabe. Die Gewalt zu bestimmen, mit welcher der Druck des Wassers in einer cylindrischen Röhre, diese zu zersprengen strebt.

Auflösung. Der Kreis ABCD (Fig. 112.) stellt den Querschnitt der Röhre vor. Wir wollen uns vorstellen, die Röhre sei in allen übrigen Puncten überflüssig stark, und bloß in den auf einerlei Durchmesser liegenden Stellen A und B nur grade so stark als zum Widerstande gegen den Druck des Wassers erforderlich ist. Würde nun der halbe Cylinder ADB unverrückt festgehalten: so ist es so gut, als ob der Druck des Wassers auf ACB diese Hälfte nach einer auf AB senkrechten Richtung von

jener loszureißen strebte, und man muß daher den Druck auf jedes Theilchen mn der Wand nach Richtungen auf AB senkrecht und damit parallel zerlegen; der gesammte auf AB senkrechte Druck giebt die Kraft, welche die Röhre bei A und B zu zerreißen strebt. Der Druck auf mn sei = p, und durch pq dargestellt, so ist der auf AB senkrechte Theil dieses Druckes = ps

$= p . \mathrm{Cos}\, qps = \frac{p . no}{mn}$, oder da der Druck des Wassers auf den Bogen mn diesem Bogen selbst proportional = h . mn . a ist, wenn die Tiefe unter dem Wasserspiegel = h und die Breite des Streifens = a, so ist der entsprechende auf AB senkrechte Druck = h . a . no. Es läßt sich leicht übersehen, daß der gesammte Druck, den alle Theile des Halbkreises leiden, auf diese Weise zerlegt, einen auf AB senkrechten Druck giebt, der = h . a . AB ist, oder daß der ganze Druck, den der halbe Cylinder ACB leidet, sich zu der Kraft, mit welcher derselbe den Cylinder bei A und B zu zerreißen strebt, verhält wie π . r zu 2 r. Jeder der Puncte B und B muß also einzeln betrachtet der Kraft = a . h . r widerstehen, und hiernach muß die Dicke der Röhre und ihre Festigkeit bestimmt werden.

Anmerkung. Einige hierher gehörige Erfahrungen führt Langsdorf im Lehrbuch der Hydraulik S. 131. an.

§. 41. Bemerkung. Wenn man sich eine dem Drucke des Wassers ausgesetzte verticale Wand denkt, wie Fig. 111., so könnte man fragen, wo man eine Horizontallinie qr als Axe, um welche die Wand sich drehen dürfe, festhalten müsse, damit der Wasserdruck die Wand in Beziehung auf diese Axe im Gleichgewichte halte. Oder man könnte fragen, wo muß ein auf die Wandfläche senkrecht drückendes Gewicht, dem gesammten Wasserdrucke gleich, angebracht werden, um in Beziehung auf irgend eine horizontale Axe BG in der Ebne der Wand eben das Drehungsmoment hervorzubringen, welches der Wasserdruck selbst in Beziehung auf eben die

Axe hervorbringt? — Wenn qr die Horizontallinie ist, in welcher jenes Gewicht wirken müßte, so sagt man, in qr liege der Mittelpunct des Druckes.

§. 41*. Aufgabe. Für eine verticale, parallelogrammische Wand ABG (Fig. 111.) den Mittelpunct des Druckes zu finden.

Auflösung. Er liegt, wenn die Höhe vom Boden BGF bis an den Wasserspiegel = h ist, in der Höhe = $\frac{1}{3}$ h über dem Boden.

Beweis. Wenn man das Prisma ABKG so construirt, wie §. 37. ergiebt, so leidet jede Schichte der Wand einen Druck gleich dem Gewichte des horizontal neben ihm liegenden Querschnittes des Prisma's; die Momente der einzelnen Pressungen sind also eben so groß, als wenn der Druck des ganzen Prisma's in seinem Schwerpuncte, das ist (Statik §. 138.) in der Höhe = $\frac{1}{3}$ h vereiniget wäre.

§. 42. Wenn eine verticale Mauer dem Drucke des Wassers widerstehen soll: so könnte man hiernach leicht die zu einer hinreichenden Stabilität erforderlichen Abmessungen bestimmen, indem es so gut ist, als ob in der Höhe = $\frac{1}{3}$ h eine Kraft dem ganzen Wasserdrucke gleich horizontal wirkte.

Hierher gehörige practische Anwendungen theilt Woltman mit in seinen Beiträgen zur hydraulischen Architectur 2. B. S. 80.

§. 43. Es kommen manchmal Fälle vor, wo ein höher liegendes Land seine Entwässerungsgräben durch niedrigere Gegenden ziehen muß, die bei ganz freiem Zusturze des Wassers würden überschwemmt werden. Hier muß man daher Einrichtungen treffen, um bei hohem Wasser den Zufluß von dem höhern Lande her abzuhalten. Man pflegt in solchen Fällen eine gewisse Höhe zu bestimmen, bis zu welcher das Wasser schon muß gefallen seyn, ehe das höhere Land seiner Entwässerung freien Lauf lassen darf, und da wäre es allenfalls möglich, durch eine verticale Klappe, die um eine horizontale Axe beweglich

sich öffnen könnte, den Abfluß zu hemmen. Die Axe müßte nämlich so liegen, daß der Mittelpunct des Druckes zu der Zeit, wo das Wasser abfließen dürfte, an derjenigen Seite der Axe läge, wo der Druck ein Oeffnen bewirkt, zu der Zeit hingegen, wo der Abfluß gehemmt werden soll, an der andern Seite der Axe, wo die Klappe sich gegen einen festen Widerstand stemmt.

Bedeutet (Fig. 113.) EF die ohngefehre Höhe des Wassers im niedrigen Lande, DG den Wasserstand im höhern: so muß, wenn der Wasserdruck keine niedrigern Puncte als H treffen kann, die Höhe AH = $\frac{1}{3}$ HD sein, damit die Klappe grade im Gleichgewichte bleibe, wenn die horizontale Axe in A ist. Steigt das Wasser höher als D, so liegt der Mittelpunct des Druckes oberhalb A und die Klappe drängt sich gegen H zu, ohne sich zu öffnen; sinkt es dagegen unter D, so ist das Moment des Druckes auf AE größer als auf AD, und das Wasser fließt nach F zu ab.

Diese Benutzung der Lehre vom Mittelpuncte des Druckes wird indeß wohl nicht leicht anwendbar sein, da Reibung, Einrosten der Zapfen und dergleichen bedeutende Ungleichheiten hervorbringen mögten.

§. 44. Aufgabe. Ein Gefäß (Fig. 114.) ist mit flüssigen Körpern verschiedener Art gefüllt, man suche den Druck gegen Boden und Wände für den Zustand des Gleichgewichts.

Auflösung. Die Körper legen sich in dem Gefäße ABCD (Fig. 114.) in Schichten, die durch horizontale Oberflächen begrenzt sind. Wiegt nun ein Cubicfuß des obern Flüssigen = G, und ist die Höhe des Raumes, den er einnimmt = H, so ist der Druck, den jeder Theil = f² der Fläche GH leidet, wo die beiden obern Fluida einander begrenzen, gleich dem Gewichte G . f² . H. Für das Gewicht eines Cubicfußes des zweiten Körpers, der sich zwischen GH und IK befindet, setze ich = g; die Höhe, welche er einnimmt, = h, so ist für jeden Theil = f² der Grundfläche IK, der Druck

$= f^2 (G . H + g . h)$. Und endlich wenn des untern Fluidi Gewicht durch $= \gamma$, Höhe durch $= \vartheta$ ausgedrückt wird, der Druck auf einen im Boden DC liegenden Flächentheil $= f^2$,

$$= f^2 (G . H + g . h + \gamma . \vartheta).$$

Ein Theil der Seitenwand, dessen Quadratinhalt $= f^2$ ist, wird, wenn er in der Tiefe $= k$ unter IK liegt, von einem Gewichte $= f^2 (G . H + g . h + \gamma . k)$ gedrückt und so in allen ähnlichen Fällen.

§. 45. **Aufgabe.** Die gekrümmte Röhre AD (Fig. 115.) ist mit einem schweren Flüssigen, dessen Cubicfuß $= G$ wiegt, bis an die Horizontallinie AD gefüllt; man gießt auf AB einen leichtern Körper, dessen Cubicfuß $= g$ wiegt, bis zu einer Höhe $= h$ oberhalb der Oberfläche des vorigen; bis zu welcher Höhe wird die Oberfläche CD steigen müssen, damit das Gleichgewicht eintrete?

Auflösung. Gesetzt die Oberfläche AB sänke bis EH und die gegenüber liegende Oberfläche CD stiege bis FG, so daß der Unterschied der Höhen $= x$ wäre, das ist die senkrechte Höhe $GK = x$; so leidet offenbar jedes Theilchen der Oberfläche EH einen Druck, der durch $= G . x$ ausgedrückt, oder durch die Höhe einer Wassersäule $= G . x$ abgemessen wird, wenn ein Cubicfuß Wasser als Einheit der Gewichte angenommen wird. In der Röhre IH hingegen leidet die Oberfläche EH einen Druck, welcher durch die Höhe $= g . h$ einer Wassersäule abgemessen wird. Beide Pressungen müßten offenbar gleich sein (§. 28. 33.), also $x = \frac{g}{G} . h$.

§. 46. Rechnet man das Quecksilber 14mal so schwer als Wasser, so würde, wenn von EH bis FG Quecksilber sich befindet, und Wasser im Schenkel IH aufgegossen wäre, $GK = \frac{1}{14} h$ sein. Hätte man also diese Röhre an einem Wasserbehälter angebracht, in welchem man die Höhe über EH, bis zu welcher er gefüllt

ist, nicht bequem abmessen könnte, so bedürfte es nur der Abmessung der mit dem Wasserdrucke das Gleichgewicht haltenden Quecksilbersäule GK, um die Wasserhöhe zu bestimmen. Eine von EH bis an des Wassers Oberfläche reichende Wassersäule wiegt bei gleicher Grundfläche eben so viel als die von K bis an G reichende Quecksilbersäule.

§. 47. Lehrsatz. Obgleich jeder Punct im Boden des mit Wasser gefüllten Gefäßes ABCD (Fig. 107.) einen Druck leidet, welcher dem Gewichte einer bis an des Wassers Oberfläche CD reichenden verticalen Wassersäule entspricht: so bedarf es doch, um das ganze Gefäß zu erhalten, nur einer Kraft, die dem Gewichte des gesammten Flüssigen in ABCD und dem Gewichte des Gefäßes gleich ist.

Beweis. Es läßt sich genau so, wie in §. 13. zeigen, daß ein Stück iq der Wand einen Druck vertical aufwärts leidet, der $= qr \cdot h$ ist, wenn die Tiefe dieses Stückchens der Wand unter der Oberfläche CD $= h$ heißt. Das in derselben Verticale liegende Stückchen sp des Bodens leidet den Druck $= qr \cdot (h + pi)$ vertical niederwärts, und die Kraft, welche das ganze Gefäß trägt, braucht also in Beziehung auf diesen Theil des Flüssigen nur dem Unterschiede beider Pressungen, das ist dem Gewichte der Wassersäule qisp gleich zu sein. Eben das läßt sich für alle Wassersäulen zeigen, und die das Gefäß erhaltende Kraft hat folglich außer dem Gewichte des Gefäßes nur noch das ganze Gewicht des flüssigen Körpers zu tragen, indem alle übrigen auf die Wände wirkenden Kräfte einander aufheben.

Dritter Abschnitt.

Vom Gleichgewichte elastisch flüssiger Körper, auf welche die Schwere wirkt.

§. 48. Erfahrung. Die Luft ist schwer. — Man kann dieses bemerken, wenn man ein Gefäß, das sich vermittelst eines Hahnes schließen läßt, durch die Luftpumpe so gut als möglich luftleer macht, indem es dann an Gewicht verliert. Das Barometer zeigt dieses noch deutlicher.

§. 49. Erklärung. Das Barometer wird (Fig. 116.) aus einer gebogenen Glasröhre verfertigt, deren längerer Schenkel AB oben bei B luftdicht zugeschmolzen ist. Man füllt diese bei C offen bleibende Röhre mit Quecksilber und verfährt dabei so, daß in den Schenkel AB gar keine Luft gelangt. Wenn man das so vollendete Barometer vertical aufstellt, so findet man, daß das Quecksilber in der luftdicht verschlossenen Röhre eine gewisse Höhe über der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel behält, und daß sich über der Oberfläche cd im geschlossenen Schenkel ein ganz leerer Raum bildet, wenn die Röhre AB lang genug ist. Der verticale Höhen-Unterschied, um welchen cd über ab liegt, heißt die Barometerhöhe; sie beträgt in niedrigen Gegenden und auf dem Meere etwa 28 pariser Zoll.

§. 50. Bemerkung. Wir befinden uns in einem Luftmeere, dessen Höhe zu bestimmen, wir unmittelbar gar nicht im Stande sein würden. Ohne Zweifel übt dieses sehr hoch über uns stehende Luftmeer einen sehr er-

heblichen Druck aus, den wir nur darum nicht empfinden, weil alle Körper nicht bloß von Luft umgeben, sondern mit Luft durchdrungen sind. Unsre Kenntniß von dem Luftmeere oder der Atmosphäre erhält daher einen wichtigen Beitrag, wenn wir den Druck der über uns stehenden Luft durch ein ihm gleiches Gewicht zu bestimmen oder dem Auge darzustellen wissen.

§. 51. Lehrsatz. Der gesammte Druck der Luft auf irgend eine Fläche $= f^2$ beträgt so viel als das Gewicht eines über derselben Fläche $= f^2$ stehenden Quecksilbersäule, deren Höhe der Barometerhöhe gleich ist.

Beweis. Die Quecksilbersäule abcd (Fig. 116.) befindet sich unter ganz ähnlichen Umständen, wie die waren, welche wir §. 46. voraussetzten. Die Oberfläche cd nämlich ist gegen den Druck der Luft ganz gesichert, indem oberhalb cd ein luftleerer Raum ist; cd leidet daher, wenn alles gut ausgeführt ist, gar keinen Druck. Dagegen ist ab ein Theil des Bodens, auf welchem die Atmosphäre mit ihrem ganzen Gewichte lastet, und jeder Punct in ab trägt das gesammte Gewicht der vertical über ihm stehenden Luftsäule. Dem äußeren Drucke auf ab hält das Gewicht des Quecksilbersäule cdef das Gleichgewicht, das ist, jeder Punct der Fläche ab wird, so gut wie jeder Punct der Fläche ef mit einem Gewichte gleich dem einer Quecksilbersäule von der Höhe df belastet. Hieraus läßt sich der Druck berechnen, den eine bestimmte Fläche leidet, denn jeder Quadratzoll wird einen Druck gleich dem Gewichte von etwa 28 Cubiczoll Quecksilber leiden.

§. 52. Erfahrung. Die Luft ist elastisch. Dieses zeigen schon die in §. 21—26. erwähnten Erscheinungen der Luftpumpe.

§. 53. Bemerkung. Auf der Schwere und Elasticität der Luft beruht die ganze Einrichtung der Saugepumpen. In einem verticalen Cylinder ABEF (Fig. 117.) wird ein Kolben, der eine sich nach oben öffnende Klappe hat, auf und nieder bewegt; in diesem Cylinder,

dessen unteres Ende in die Wassermasse CD eingetaucht ist, befindet sich unten bei EF eine sich nach oben öffnende Klappe, die das Wasser zwar einläßt, aber ihm den Ausgang verschließt, so wie die Klappe im Kolben, der obern Luft den Eintritt in den Raum ABFE verschließt, den Austritt aber gestattet.

Ist nun AB die tiefste, ab die höchste Stellung, die der Kolben erreichen kann, so verdünnt sich die Luft in dem Raume ABFE, indem man den Kolben aufwärts zieht. Die verdünnte Luft übt einen geringern Druck aus, als die vorhin im Raume ABEF enthaltene, der auf CD lastende Druck der freien Atmosphäre drängt daher, während der Kolben steigt, das Wasser über EF hinauf, etwa bis GH. Wenn der Kolben seinen höchsten Stand ab erreicht hat, und zurückzugehen anfängt, so schließt sich die Klappe bei EF und die Röhre bleibt bis an GH gefüllt; die vorhin verdünnte Luft wird wieder verdichtet, und wenn der Kolben bis gegen AB herabgekommen ist, so hat sie (weil ein Theil ihres vorigen Raumes mit dem Wasser EFHG gefüllt ist), eine größere Dichtigkeit als im anfänglichen, natürlichen Zustande; ihr Druck ist daher größer als der Druck der Atmospäre auf AB, sie öffnet das Ventil oder die Klappe im Kolben, und in dem Raume ABGH bleibt nur noch Luft von der Dichtigkeit der äußeren Luft. Indem diese sich beim Steigen des Kolbens wieder verdünnt, drängt sich aufs neue Wasser bei EF ein; es steigt höher, etwa bis IK, und bei fortwährendem Hin- und Herziehen des Kolbens erreicht endlich das Wasser diesen, tritt über ihn hinauf, und kann nun bei LM ausgegossen werden.

§. 54. Erfahrung. Die Elasticität der Luft, oder der Druck, welchen eingeschlossene Luft ausübt, ist der Dichtigkeit proportional.

Die Versuche, welche dieses beweisen, lassen sich etwa so anstellen. Will man beweisen, daß bei der Verdichtung der Luft der Druck, den sie ausübt, der Dichtigkeit proportional ist: so füllt man die offene Röhre

(Fig. 118.) etwa bis an abcd mit Quecksilber; schmelzt dann den kürzeren Schenkel bei e luftdicht zu, und gießt in den längern Schenkel df Quecksilber nach. Dieses nöthiget durch seinen Druck die Luft in eb sich zusammenzupressen; und man findet nun, daß sie in die Hälfte ihres vorigen Raumes zusammengepreßt ist, wenn die Höhe der Quecksilberoberfläche f über der Oberfläche im andern Schenkel, der Barometerhöhe gleich ist; daß sie noch ein Drittheil des vorigen Raumes einnimmt, wenn der Unterschied der Quecksilberhöhen gleich der doppelten Barometerhöhe ist; daß sie in ein Viertheil des anfänglichen Raumes zusammengepreßt ist, wenn der Unterschied der Quecksilberhöhen in beiden Schenkeln so viel als die dreifache Barometerhöhe beträgt u. s. w.

Da die Luft im natürlichen Zustande schon einen Druck leidet, welcher durch das Gewicht einer Quecksilbersäule, deren Höhe = b, gleich der Barometerhöhe ist, abgemessen wird, so verdoppelt man den Druck, wenn man so viel Quecksilber eingießt, daß die Oberfläche f sich um die Höhe = b über die entgegengesetzte Oberfläche erhebt; man erhält den dreifachen Druck, wenn diese Höhe gleich der doppelten Barometerhöhe ist u. s. w.

Versuche zum Beweise, daß eben dieses Gesetz bei Verdünnung der Luft gelte, könnte man etwa so anstellen. Man füllt eine gleichschenkliche gebogene Röhre (Fig. 119.) mit Quecksilber etwa bis an abcd, verschließt dann den einen Schenkel luftdicht bei e, und nimmt nun nach und nach Quecksilber aus dem andern Schenkel weg. Indem so die Oberfläche cd sinkt, wird auch ab sinken, und der Raum, den die Luft füllt, sich vergrößern. Die verdünnte Luft kann nicht mehr ganz dem Drucke der äußeren Luft widerstehen, und das Quecksilber im offenen Schenkel steht daher niedriger, als im geschlossenen Schenkel, etwa dort in h, wenn es hier in fg steht. Man findet nun, daß der Höhen Unterschied der beiden Quecksilberflächen gleich der halben Barometerhöhe ist, wenn die Luft bei e in das doppelte

Standpunct um die Höhe $= h$ über dem zweiten, der vierte um $= h$ über dem dritten und so weiter liegt, so bilden die in diesen verschiedenen Standpuncten beobachteten Barometerhöhen eine geometrische Reihe.

Beweis. Es sei zuerst die Höhe $= h$ klein genug, um die Dichtigkeit der Luftsäule von der Höhe $= h$ als überall gleich anzusehen, so kann man, obgleich eigentlich die Dichtigkeit der Luft nach dem Gesetze der Stetigkeit, in unmerklichen Uebergängen, abnimmt, sie betrachten, als ob sie aus Schichten von der Höhe $= h$ bestände, deren jede durchaus gleichartig in sich selbst wäre, jede höhere aber eine geringere Dichtigkeit hätte, als die niedrigere.

Die Dichtigkeit der untersten Schichte sei $= D$, die Barometerhöhe im untersten Standpuncte $= K$, so wird, wenn man hier die Dichtigkeit des Quecksilbers als Einheit betrachtet, oder das Gewicht der Cubic-Einheit an Quecksilber $= 1$ setzt, das Gewicht einer Luftsäule von der Höhe $= h$, durch $= h.D$ dargestellt, indem man, wenn z. B. 1 Cubiczoll die Einheit ist, das Gewicht einer Quecksilbersäule von h Zoll Höhe über der Basis $= 1$ Quadratzoll durch $= h$, und das Gewicht einer Luftsäule über eben der Grundfläche von eben der Höhe durch $= D.h$ darstellt.

Wenn man um die Höhe $= h$ steigt, so fällt das Barometer von $= K$, auf $= K - h.D$ und die nächste Schichte leidet nur noch den Druck $= K - h.D$, also ist ihre Dichtigkeit $= \frac{D.(K - h.D)}{K}$, indem

$$K : K - h.D = D : \frac{D.(K - h.D)}{K} \text{ ist.}$$

Die nächste Schichte von der Höhe $= h$ übt folglich einen Druck $= \frac{h.D.(K - h.D)}{K}$ aus, und indem man abermals um die Höhe $= h$ steigt, fällt das Barometer

füllt, die nach dem zweiten Kolbenhube den Raum von der Höhe $= a + b - x$ einnimmt. Diese Luft übet also

den Druck $= \frac{(b-x)}{a+b-x} k = \left(\frac{b - \frac{a \cdot k}{a+b}}{a+b - \frac{a \cdot k}{a+b}}\right) k$ aus,

und die Höhe $= y$, zu welcher das Wasser steigt, ist

$$y = k - \left(\frac{b-x}{a+b-x}\right) k = \frac{ak}{a+b-x} = \frac{ak}{a+b - \frac{ak}{a+b}}.$$

Eben so könnte man die Höhe bei den folgenden Kolbenzügen bestimmen.

§. 57. Es ist einleuchtend, daß die Höhe des Wassers in der Pumpe nie die ganze Höhe $= k$ erreichen kann, wenn des Kolbens Höhe über die Wasserfläche CD grösser als $= k$ ist, indem die Höhe $= k$ nur dann erreicht wird, wenn über der gehobenen Wasserfläche sich gar keine Luft mehr befindet.

§. 58. Bemerkung. Da das Barometer den Druck der Luft oder das Gewicht der über uns stehenden Luftsäule abmißt, so muß gewiß das Barometer fallen, wenn man sich in höhere Gegenden begiebt. Dieses Fallen des Barometers giebt uns unmittelbar an, wie viel die Luftsäule wiegt, welche wir unter uns gelassen haben. Es würde uns unmittelbar die erreichte Höhe angeben, zu welcher wir gestiegen sind, wenn die Luft eine überall gleiche Dichtigkeit hätte; aber da die höheren Luftschichten einen immer geringern Druck leiden, so sind sie ohne Zweifel weniger zusammen gepreßt, also von geringerer Dichtigkeit. Die Dichtigkeit jeder höhern Luftschichte ist dem verminderten Drucke proportional, und dieses Gesetz kann uns leiten, den Luftdruck in verschiedenen Höhen zu bestimmen.

§. 59. Lehrsatz. Wenn man in der Atmosphäre um immer gleiche Höhen $= h$ steigt, so daß der dritte

die Barometerstände p und q sind, ist also

$$x - y = \frac{H}{\log K - \log l} (\log q - \log p),$$

Und dieses ist die allgemein brauchbare Formel für alle Höhenmessungen, so lange man die Dichtigkeit der Luft als bloß vom Drucke abhängig betrachtet.

§. 62. K, l, q, p sind hier linearische Größen; aber es kann nicht auffallend sein, daß wir ihre Logarithmen angeben sollen. Eigentlich erhielten wir ja $x - y = \frac{H}{\log \frac{K}{l}} \cdot \log \frac{q}{p}$, wo $\frac{K}{l}$ und $\frac{q}{p}$ Zahlen darstellen, und in den vorigen Ausdrücken sind also die Zahlen zu verstehen, welche die Barometerhöhen im bestimmten Maaße ausdrücken.

§. 63. Der Coefficient $\frac{H}{\log \frac{K}{l}}$ ist beständig für alle einzelnen Bestimmungen. Wenn wir hier, wo nur von oberflächlichen Bestimmungen die Rede sein kann, annehmen, daß das Barometer von 28 Zoll = 336 Linien = K auf 27 Zoll 11 Linien = 335 Linien = l falle, wenn man = 75 Fuß = H steigt, so ist

$$\frac{H}{\log \frac{K}{l}} = \frac{75}{\log \frac{336}{335}} = \frac{75}{0{,}0012945} = 57937 \text{ Fuß.}$$

Wenn also diese Zahlen in allen Fällen richtig wären, so hätte man

die Höhe $x - y = 57937 \log \frac{q}{p}$, wenn man sich der gewöhnlichen Logarithmen bedient.

§. 64. Bemerkung. Obgleich man sich, wie die eben mitgetheilte Berechnung zeigt, jedes Logarithmen-

systems bei diesen Rechnungen bedienen kann, so gewähren doch die unter dem Namen der natürlichen Logarithmen bekannten Logarithmen in der Darstellung des beständigen Factors einen bedeutenden Vortheil. Wenn man die Rechnung so führt, wie eben geschehen ist, so sieht man wohl, daß man den briggischen Logarithmen von $\frac{q}{p}$ mit 57937 Fuß multipliciren muß, um die Höhe $x-y$ zu erhalten; aber diese 57937 Fuß sind keine in der Natur selbst nachzuweisende Größe, welches dagegen der Fall ist, wenn man natürliche Logarithmen gebraucht.

Das System der natürlichen Logarithmen hat das Eigenthümliche, daß $\log \text{nat}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ desto näher $=\frac{1}{n}$ ist, je kleiner dieser Bruch wird. Fassen wir bloß diese Eigenthümlichkeit ins Auge und nehmen nun an, die Barometerhöhen l und K sind sehr wenig verschieden, so daß $K=l+\lambda$ und λ sehr klein ist, so geben die logarithmischen Formeln des 61. §.

$$x-y=\frac{H}{\log\frac{K}{l}}\log\frac{q}{p}=\frac{H}{\log\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)}\log\frac{q}{p},$$ da

wir jedes logarithmische System hier gebrauchen dürfen, so dürfen wir auch das der natürlichen Logarithmen gebrauchen, und in diesem ist für ein sehr kleines λ,

$$\log.\ \text{naturalis}\left(1+\frac{\lambda}{l}\right)=\frac{\lambda}{l},$$

folglich $x-y=\frac{H\,.\,l}{\lambda}.\log.\ \text{nat.}\frac{q}{p}$; denn es versteht sich, daß wir Logarithmen desselben Systems überall in derselben Formel gebrauchen müssen.

Um den Coefficienten $\frac{H\,.\,l}{\lambda}$ bequemer zu übersehen, muß man bemerken, daß H die Höhe derjenigen Luft-

säule ist, welche eben so viel — bei gleicher Grundfläche — wiegt, als die Quecksilbersäule von der Höhe $= \lambda$; denn wir mußten um die Höhe $= H$ in der Luft hinaufsteigen, damit das Barometer von $= K$ bis auf $= l$, das ist um die Höhe $= K - l = \lambda$ fiele. Betrachten wir also diese Luftsäule von der Höhe $= H$ als überall gleich dicht, und nennen D die Zahl, welche das Verhältniß der Dichtigkeit der Luft zur Dichtigkeit des Quecksilbers ausdrückt, so daß jene zu dieser wie $D : 1$ ist, so wiegt die Luftmasse $= H . D$ eben so viel als die Quecksilbermasse $= \lambda$; oder, da die Quecksilbersäule $= \lambda$ so viel als die Luftsäule, deren Volumen oder Höhe $= H$ ist, wiegt, so hat man:

Dichtigkeit der Luft zur Dichtigkeit des Quecksilbers, wie λ zu H, das ist

$$D = \frac{\lambda}{H}.$$

Jener Coefficient kann also durch

$\frac{H . l}{\lambda} = \frac{l}{D}$ ausgedrückt werden, und stellt nun dar, die Höhe einer Luftsäule von der gleichförmigen Dichtigkeit $= D$, welche eben so viel als die ganze Quecksilbersäule $= l$ wiegt. Wäre das Quecksilber 10000 mal so dicht als Luft, so würde für $l = 28$ Zoll $= 2\frac{1}{3}$ Fuß $\frac{l}{D} = \frac{2\frac{1}{3}}{\frac{1}{10000}} = 23333$ Fuß, und eine so hohe Luftsäule von der überall gleichen Dichtigkeit $= D = \frac{1}{10000}$ würde eben so gut, als die wirkliche, sich oberwärts verdünnende, aber viel höhere Luftsäule, der Quecksilbersäule von 28 Zoll das Gleichgewicht halten.

Wollen wir uns also der natürlichen Logarithmen bedienen, so ist

die Höhe $= x - y = \frac{l}{D}$ log. naturalis $\frac{q}{p}$, und

$\frac{1}{D}$ ist im Allgemeinen die Höhe der Luftsäule von der Dichtigkeit $= D$, welche der Quecksilbersäule $= 1$ das Gleichgewicht hält. Dieses gilt für jeden Werth von 1; denn da bei sonst gleichen Umständen die Dichtigkeit der Barometerhöhe proportional ist, so hat man bei sonst gleichen Umständen für eine andre Barometerhöhe $= 1'$, die Dichtigkeit $D' = \frac{1'. D}{1}$, also $\frac{1'}{D'} = \frac{1}{D}$, man kann also der Barometerhöhe $= 1$, welchen Werth man will, geben, wenn nur die dazu gehörige richtige Dichtigkeit $= D$ angenommen wird.

Vierter Abschnitt.

Nähere Anleitung zu barometrischen Höhenmessungen.

§. 65. Bemerkungen. Es ist bekannt, daß alle Körper sich bei zunehmender Wärme ausdehnen, und daß diese Erscheinung uns dient, die Wärme-Unterschiede vermittelst des Thermometers, welches die Ausdehnung des Quecksilbers zeigt, zu bestimmen. Dieser Einfluß der Wärme wirkt auf eine zweifache Weise auf die Bestimmung der Höhen vermittelst des Barometers. Zuerst ist es nicht gleichgültig, ob ich denselben Druck der Luft mit wärmerem oder kälterem Quecksilber abmesse; denn da das Quecksilber sich bei zunehmender Wärme in einen größeren Raum ausdehnt, also eine geringere Dichtigkeit annimmt, so wiegt eine sonst gleiche Quecksilbersäule von 28 Zoll Höhe, weniger, wenn sie wärmer ist.

Zweitens dehnt sich die Luft noch viel mehr als das Quecksilber bei zunehmender Wärme aus, und die Rücksicht darauf macht eine starke Correction bei den vorigen Rechnungen nöthig.

§. 66. Da die Dichtigkeit des Quecksilbers nicht immer gleich ist, so kann sie nicht unbeschränkt als Einheit zum Maaße der Dichtigkeiten angenommen werden, sondern die Dichtigkeit des reinen Quecksilbers kann nur bei einer bestimmten Temperatur, wofür ich die Wärme des gefrierenden Wassers annehme, als Einheit gelten. Genaue Erfahrungen (Laplace Exposition du système du monde. Paris, 1808. pag. 89.) zeigen, daß das Quecksilber seine Dichtigkeit um $\frac{1}{4330}$ ändert, wenn die Wärme sich um 1 Gr. des Reaumurschen Quecksilber-Thermometers ändert (*). Hat man also die Barometerhöhe bei einer Wärme = m Graden des Reaumurschen Thermometers = l gefunden, so würde dasselbe

(*) Die Lehre vom Thermometer gehört nicht hieher; ich erwähne daher hier nur, daß man an den Thermometern die zwei Puncte als feste Puncte anmerkt, welche das Quecksilber im Thermometer im gefrierenden Wasser und im kochenden Wasser erreicht. Der Kochpunkt muß bei bestimmtem Barometerstande beobachtet werden. Den Raum zwischen jenen beiden Puncten theilt man am Reaumurschen Thermometer in 80 gleiche Grade, die von 0 bis 80 vom Gefrierpuncte bis zum Kochpuncte fortgezählt werden; eben solche Grade trägt man unter Null auf und erhält so die Grade — 1, — 2 u. s. w. Am Centesimalthermometer theilt man eben jenen Raum in 100 Grade, fängt mit 0 vom Frostpuncte zu zählen an, und hat 100 Grade beim Siedepuncte. Das Fahrenheitische Thermometer theilt eben jenen Raum in 180°, fängt aber beim Frostpuncte mit + 32 Grad an, und zählt nun fort, so daß der Siedepunct des Wassers bei 212 Graden ist. Der Nullpunct des Fahrenheitischen Thermometers liegt neben ÷ $14\frac{2}{9}$ Grad Reaumur und neben ÷ $17\frac{7}{9}$ Grad Centesimal.

Quecksilber bei 0 Graden nur eine Säule von der Länge $= 1 - \frac{m}{4330} . l$ gebildet haben. Dieses ist die Reduction der Barometerstände auf eine gleiche Temperatur.

§. 67. Aber auch die Luft behält bei gleichem Drucke nicht dieselbe Dichtigkeit, wenn die Wärme verschieden ist. Die Elasticität der Luft nimmt zu, wenn sie erwärmt wird, daher sieht man zum Beispiel in der Röhre edf (Fig. 118.) das Quecksilber von der bei eab eingesperrten Luft höher hinauf gedrängt, im Schenkel df steigen, wenn die Luft, die in den Raum eab eingeschlossen ist, erwärmt wird. Denken wir uns daher die ganze von der Erde bis an die oberen Grenzen des Luftkreises sich erstreckende Luftsäule, so wird in ihr die nach unten zu allmählig zunehmende Verdichtung nicht mehr bloß nach Verhältniß des Druckes wachsen, sondern, da in der Nähe der Erde die Wärme größer ist, als in beträchtlichen Höhen, so wird die untere Luft sich nicht ganz so zusammen pressen lassen, als sie bei minderer Erwärmung es thun würde. Wenn die Barometer (Fig. 120.) in der verticalen Luftsäule AC in A und B aufgestellt sind, so trägt noch immer die Quecksilberfläche des unteren Barometers die ganze oberhalb A stehende Luftsäule, und das Barometer in B giebt den Druck der ganzen oberhalb B stehenden Luftsäule an; aber der Raum BA enthält, wenn die Wärme nach unten hin zunimmt, eine geringere Luftmasse, ihre Elasticität hat gleichsam den übrigen Theil der Luftmasse, der nach den einfachen Gesetzen des Druckes bei gleichförmiger Wärme sich zwischen A und B befinden würde, hinaufgedrängt. Hieraus folgt, daß bei größerer Wärme die Luftsäule AB weniger wiegen und folglich einen geringeren Unterschied der Barometerstände veranlassen wird.

§. 68. Nach Biots sehr sorgfältigen Versuchen ist die Dichtigkeit der Luft bei 28 pariser Zoll Barometer-

Man berechnet dann, indem man die reducirten Barometerhöhen $= q'$ in dem niedrigern und $= p'$ in dem höhern Puncte nennt, zuerst die Höhe nach der Formel $= 56447{,}5 \cdot \log. \text{br.} \frac{q'}{p'}$, wenn man briggische, oder nach der Formel, Höhe $= 24514 \cdot \log. \text{nat.} \frac{q'}{p'}$, wenn man natürliche Logarithmen gebrauchen will. Um die so gefundene, uncorrigirte Höhe, wegen der Wärme zu verbessern, sucht man, wenn die Wärme der Luft an beiden Orten und in der ganzen zwischenliegenden Luftsäule $= m$ Grade ist, jene uncorrigirte Höhe $= x'$, dividirt sie mit 213 und legt dem x' so viele 213 Theile zu als der Wärmegrad $= m$ des Reaumurschen Thermometers über Null angiebt, findet also die Höhe

$$= x' + \frac{m}{213} x'.$$

Zweiter Fall. Ist die Wärme an dem obern Orte geringer als am unteren, so corrigirt man den Barometerstand jedes Ortes, so wie es die an jedem Orte gefundene Temperatur erfordert; nimmt dann das arithmetische Mittel aus beiden Temperaturen, sieht die ganze Luftsäule so an, als ob sie diese mittlere Temperatur in jedem Puncte hätte, so daß die zuletzt angeführte Verbesserung der uncorrigirten Höhe x' eben so angebracht wird, wie im vorigen Falle.

Beispiel. D'Aubuisson stellte am 17. Oct. 1809 folgende Beobachtungen zu Bestimmung der Höhe des Monte Gregorio an.

Das Barometer stand oben auf 22,351 Zoll, bei einer Temperatur des Quecksilbers = 8,4 Grade, und einer Temperatur der (etwas kälteren) Luft = 7,9 Grade. Das Barometer stand unten auf 27,418 Zoll und das Quecksilber in demselben war = 15,9 Grad, die Luft unten = 16 Gr. Reaumur warm.

$\frac{1}{D}$ ist im Allgemeinen die Höhe der Luftsäule von der Dichtigkeit $= D$, welche der Quecksilbersäule $= 1$ das Gleichgewicht hält. Dieses gilt für jeden Werth von l; denn da bei sonst gleichen Umständen die Dichtigkeit der Barometerhöhe proportional ist, so hat man bei sonst gleichen Umständen für eine andre Barometerhöhe $= l'$, die Dichtigkeit $D' = \frac{l'.D}{l}$, also $\frac{l'}{D'} = \frac{l}{D}$, man kann also der Barometerhöhe $= l$, welchen Werth man will, geben, wenn nur die dazu gehörige richtige Dichtigkeit $= D$ angenommen wird.

Vierter Abschnitt,

Nähere Anleitung zu barometrischen Höhenmessungen.

§. 65. **Bemerkungen.** Es ist bekannt, daß alle Körper sich bei zunehmender Wärme ausdehnen, und daß diese Erscheinung uns dient, die Wärme-Unterschiede vermittelst des Thermometers, welches die Ausdehnung des Quecksilbers zeigt, zu bestimmen. Dieser Einfluß der Wärme wirkt auf eine zweifache Weise auf die Bestimmung der Höhen vermittelst des Barometers. Zuerst ist es nicht gleichgültig, ob ich denselben Druck der Luft mit wärmerem oder kälterem Quecksilber abmesse; denn da das Quecksilber sich bei zunehmender Wärme in einen größeren Raum ausdehnt, also eine geringere Dichtigkeit annimmt, so wiegt eine sonst gleiche Quecksilbersäule von 28 Zoll Höhe, weniger, wenn sie wärmer ist.

sicht ist, hier eine vollständige Anleitung zum Höhenmessen zu geben, so übergehe ich diesen, überdas noch nicht ganz genau bestimmbaren Einfluß. Eben so muß ich die Ungleichheiten fast ganz übergehen, die sich in den barometrischen Höhenmessungen ergeben müssen, wenn die Zunahme der Temperatur in den untern Schichten ungleichförmig ist. Wir haben im vorigen §. im zweiten Falle angenommen, man dürfe das arithmetische Mittel aus den Wärmegraden statt der Temperatur der ganzen Luftsäule setzen; dieses ist aber gewiß oft irrig, da z. B. an warmen Tagen die Luft in der Nähe der Erde viel mehr erhitzt ist, als in 20 Fuß Höhe, und da an Sommerabenden die Luft nahe an der Erde viel kühler ist als in einiger Höhe über der Erde. Eigentlich sollte man die Wärme jedes einzelnen Theiles der zwischen beiden Orten liegenden Luftsäule kennen, und daraus das Gewicht der ganzen Luftsäule berechnen, was aber nicht gut möglich ist, weshalb man sich meistens mit jenem arithmetischen Mittel begnügen muß.

§. 72. Außer diesen Correctionen bedarf die Höhenmessung noch einer Verbesserung, deren umständliche Erklärung nicht hieher gehört. Die Kraft der Schwere nimmt in beträchtlichen Höhen ab, und eine gleiche Quecksilbermasse wiegt auf dem Berge weniger als unten. Das leichtere Quecksilber steht daher auf der Höhe des Berges etwas zu hoch, oder es würde eine etwas geringere Barometerhöhe zeigen, wenn die Schwerkraft oben so stark als unten wirkte. Aus diesem Grunde giebt unsre Beobachtung die Differenz der Barometerhöhen etwas zu klein, und folglich unsre Rechnung die Berghöhen etwas zu klein, und man müßte z. B. beim Monte Gregorio noch 15 Fuß addiren und würde ihn so = 5259 Fuß finden.

§. 73. Anmerkung. Eine sehr leichte, populäre Anleitung zum Höhenmessen giebt Benzenbergs Beschreibung eines einfachen Reisebarometers, nebst Anleitung zu Berechnung der Berghöhen. Düsseldorf, 1811.

Quecksilber bei 0 Graden nur eine Säule von der Länge $= l - \frac{m}{4330} . l$ gebildet haben. Dieses ist die Reduction der Barometerstände auf eine gleiche Temperatur.

§. 67. Aber auch die Luft behält bei gleichem Drucke nicht dieselbe Dichtigkeit, wenn die Wärme verschieden ist. Die Elasticität der Luft nimmt zu, wenn sie erwärmt wird, daher sieht man zum Beispiel in der Röhre edf (Fig. 118.) das Quecksilber von der bei eab eingesperrten Luft höher hinauf gedrängt, im Schenkel df steigen, wenn die Luft, die in den Raum eab eingeschlossen ist, erwärmt wird. Denken wir uns daher die ganze von der Erde bis an die oberen Grenzen des Luftkreises sich erstreckende Luftsäule, so wird in ihr die nach unten zu allmählig zunehmende Verdichtung nicht mehr bloß nach Verhältniß des Druckes wachsen, sondern, da in der Nähe der Erde die Wärme größer ist, als in beträchtlichen Höhen, so wird die untere Luft sich nicht ganz so zusammen pressen lassen, als sie bei minderer Erwärmung es thun würde. Wenn die Barometer (Fig. 120.) in der verticalen Luftsäule AC in A und B aufgestellt sind, so trägt noch immer die Quecksilberfläche des unteren Barometers die ganze oberhalb A stehende Luftsäule, und das Barometer in B giebt den Druck der ganzen oberhalb B stehenden Luftsäule an; aber der Raum BA enthält, wenn die Wärme nach unten hin zunimmt, eine geringere Luftmasse, ihre Elasticität hat gleichsam den übrigen Theil der Luftmasse, der nach den einfachen Gesetzen des Druckes bei gleichförmiger Wärme sich zwischen A und B befinden würde, hinaufgedrängt. Hieraus folgt, daß bei größerer Wärme die Luftsäule AB weniger wiegen und folglich einen geringeren Unterschied der Barometerstände veranlassen wird.

§. 68. Nach Biots sehr sorgfältigen Versuchen ist die Dichtigkeit der Luft bei 28 pariser Zoll Barometer-

dem Gewichte einer über op stehenden Wassersäule von der Höhe $= qs$, und es läßt sich ganz so wie in §. 47. zeigen, daß dieser Druck nach verticaler Richtung mit eben der Gewalt wirkt, wie das Gewicht einer eben so hohen über der horizontalen Projection tu des Theiles op der Oberfläche errichteten Wassersäule von eben der Höhe. Es wird also op mit einem Gewichte $= tu \, . \, sq$ niederwärts gedrückt. Aus eben den Gründen aber leidet das durch dieselben Verticallinien begrenzte Stück mn der Oberfläche des Körpers einen Druck $= tu \, . \, sr$ vertical aufwärts, das ist gleich dem Gewichte einer über der horizontalen Projection von mn errichteten Wassersäule, deren Höhe gleich der Tiefe der mn unter der Oberfläche ist. Mit andern Worten, op leidet den verticalen niederwärts gehenden Druck der ganzen Wassersäule $vopw$; der durch eben die Verticallinien begrenzte Theil mn der Oberfläche leidet aufwärts den ganzen Druck einer Wassersäule, die den Raum $vmnw$ füllen könnte; der Unterschied beider ist gleich dem Gewichte des Wassers, das den Raum $opnm$ füllen könnte, und mit dieser Gewalt wird der zwischen $omnp$ liegende Theil des Körpers aufwärts getrieben. Es erhellt also leicht, da dies für alle so begrenzte Theile des Körpers gilt, daß der ganze Körper einen Druck aufwärts leidet, der gleich ist dem Gewichte desjenigen Wassers, welches in dem durch den festen Körper ausgefüllten Raume Platz hätte.

§. 76. Dieser Satz ist nicht auf tropfbare Körper beschränkt, sondern gilt auch für elastische Fluida. Auch bei diesen ist der Druck, den ein untergetauchter oder ganz von dem Flüssigen umgebener Körper leidet, gleich dem Gewichte desjenigen Theiles des Fluidi, der sich hier befinden müßte, um das Gleichgewicht zu erhalten, wenn der feste Körper nicht da wäre. Ist also der eingetauchte Körper von sehr erheblicher Größe so muß man (Fig. 123.) darauf Rücksicht nehmen, daß die Schichte FG von größerer Dichtigkeit als die Schichte ED ist, und das Gewicht der in dem Raume des Körpers BC

Wärme der Werth von $\frac{1}{D} = \frac{24514}{1 - m \,.\, 0{,}00469}$ pariser Fuß gehören. Will man statt dieses bei natürlichen Logarithmen brauchbaren Coefficienten lieber den gebrauchen, der zu jedem Logarithmen-Systeme anwendbar ist, so muß man wissen, daß nach den eben angeführten Erfahrungen bei der Temperatur von 0 Grade oder bei der Kälte des gefrierenden Wassers das Barometer von 28 Zoll auf 27,99 Zoll fällt, wenn man 8,755 Fuß steigt. Die Formel in §. 62. 63. ist also

$$x - y = \frac{8{,}755 \text{ Fuß}}{\log. \frac{28}{27{,}99}} \log. \frac{q}{p},$$

also für briggische Logarithmen

$$x - y = \frac{8{,}755 \text{ Fuß}}{0{,}0001551} \log. \text{brigg.} \frac{q}{p}$$

$= 56447{,}5 \,.\, \log. \text{brigg.} \frac{q}{p}$, wenn die Beobachtung bei 0 Grad Wärme angestellt ist.

§. 70. **Aufgabe.** Aus den gegebenen gleichzeitigen Barometerständen und Temperaturen an zwei Orten, die verticale Höhe des einen über dem andern zu bestimmen.

Auflösung. Erster Fall. Wenn die ganze zwischen beiden Orten enthaltene Luftsäule eine gleiche Wärme hat.

Man reducirt beide, sowohl im höhern als im niedrigern Orte beobachteten Quecksilberhöhen im Barometer auf die Normaltemperatur, um so die Höhe einer Quecksilbersäule von der als Einheit angenommenen Dichtigkeit zu haben, dies geschieht, wenn die Eiskälte diese Normaltemperatur ist, indem man die beobachtete Barometerhöhe $= p$ in $= p\left(1 - \frac{m}{4330}\right)$ verwandelt, wenn die Wärme $= m$ Grade Reaumur war.

Man berechnet dann, indem man die reducirten Barometerhöhen $= q'$ in dem niedrigern und $= p'$ in dem höhern Puncte nennt, zuerst die Höhe nach der Formel $= 56447{,}5 \cdot \log. \text{br.} \frac{q'}{p'}$, wenn man briggische, oder nach der Formel, Höhe $= 24514 \cdot \log. \text{nat.} \frac{q'}{p'}$, wenn man natürliche Logarithmen gebrauchen will. Um die so gefundene uncorrigirte Höhe, wegen der Wärme zu verbessern, sucht man, wenn die Wärme der Luft an beiden Orten und in der ganzen zwischenliegenden Luftsäule $= m$ Grade ist, jene uncorrigirte Höhe $= x'$, dividirt sie mit 213 und legt dem x' so viele 213 Theile zu als der Wärmegrad $= m$ des Reaumurschen Thermometers über Null angiebt, findet also die Höhe

$$= x' + \frac{m}{213} x'.$$

Zweiter Fall. Ist die Wärme an dem obern Orte geringer als am unteren, so corrigirt man den Barometerstand jedes Ortes, so wie es die an jedem Orte gefundene Temperatur erfordert; nimmt dann das arithmetische Mittel aus beiden Temperaturen, sieht die ganze Luftsäule so an, als ob sie diese mittlere Temperatur in jedem Puncte hätte, so daß die zuletzt angeführte Verbesserung der uncorrigirten Höhe x' eben so angebracht wird, wie im vorigen Falle.

Beispiel. D'Aubuisson stellte am 17. Oct. 1809 folgende Beobachtungen zu Bestimmung der Höhe des Monte Gregorio an.

Das Barometer stand oben auf 22,351 Zoll, bei einer Temperatur des Quecksilbers = 8,4 Grade, und einer Temperatur der (etwas kälteren) Luft = 7,9 Grade. Das Barometer stand unten auf 27,418 Zoll und das Quecksilber in demselben war = 15,9 Grad, die Luft unten = 16 Gr. Reaumur warm.

Reduction der Barometerstände:

log. 22,351 = 1,349297	log. 27,418 = 1,438036
log. 8,4 = 0,924279	log. 15,9 = 1,201397
2,273576	2,639433
log. 4330 = 3,636488	3,636488
0,637088 - 2	0,002945 - 1
= log. 0,04336.	= log. 0,10068.

Die Barometerhöhen waren = 22,351 und = 27,418;
Correction = 0,043 0,101.

bei 0° wären die Barometerhöhen gewesen = 22,308 und = 27,317,
= p' und = q'.

Die Temperatur der Luft war oben = 7,9 Grade
unten = 16,0

also das arithmetische Mittel = 11,95 Grade.

Der Coefficient = 56447,5 pariser Fuß

geht also über in $= 56447,5 + \frac{11,95}{213} . 56447,5$,

das ist in = 59614 pariser Fuß,

und die Höhe ist $= 59614 . \log. \text{brigg.} \frac{27,317}{22,308}$

log. br. 27,317 = 1,436433
log. br. 22,308 = 1,348461

$\log. \text{br.} \frac{27,317}{22,308} = 0,087972$

also Höhe des Monte Gregorio = 59614 . 0,08797
= 5244 Fuß.

Diese Höhe erfordert noch eine kleine Verbesserung, wegen der Abnahme der Schwere, die ich gleich erwähnen will.

§. 71. Bemerkung. Die Barometerhöhe hängt von der mehrern oder mindern Feuchtigkeit der Luft ab, indem die Luft durch die in ihr schwebenden Dämpfe bald mehr bald minder dicht ist, als sie nach dem Drucke und der Temperatur sein sollte; aber da es nicht meine Ab-

an Volumen ihm gleicht, und seine specifische Schwere wird also durch $\frac{P}{P-(R-q)}$ ausgedrückt, wenn die des Wassers = 1 ist.

§. 84. Aufgabe. Eines flüssigen Körpers absolute und eigenthümliche Schwere zu bestimmen.

Auflösung. Will man zuerst genau bestimmen, wie viel ein Cubiczoll des Flüssigen wiegt: so ist es am besten, einen sehr genau gearbeiteten soliden Cubiczoll aus Metall machen zu lassen; diesen auf gewöhnliche Weise außer dem Flüssigen abzuwiegen und dann durch genaue Abwiegung desselben in dem Flüssigen zu finden, wie viel er an Gewicht verliert. Dieser Gewichtverlust ist das Gewicht eines Cubiczolles des flüssigen Körpers.

Kömmt es bloß auf das relative Gewicht des flüssigen Körpers an, so wiegt man eben so einen festen Körper in demselben ab und nun ergiebt sich das specifische Gewicht desselben in Vergleichung gegen das des festen Körpers, wenn man den Gewichtverlust im Flüssigen mit dem Gewichte des Körpers, welches er im Freien hatte, dividirt. Will man das specifische Gewicht des Flüssigen sogleich mit dem specifischen Gewichte des Wassers vergleichen, so muß man den Gewichtsverlust = P desselben im Wasser abgewogenen Körpers, und den Gewichtsverlust = Q eben des in dem gegebenen flüssigen Körper abgewogenen festen Körpers durch einander dividiren. Oder des gegebenen flüssigen Körpers specifische Schwere ist zur specifischen Schwere des Wassers, wie $Q : P = \frac{Q}{P} : 1$.

§. 85. Um die verhältnißmäßigen eigenthümlichen Gewichte verschiedener flüssiger Körper zu vergleichen, dienen auch die Aräometer, welches hohle schwimmende Körper sind. Diese sind entweder so eingerichtet, daß sie sich (Fig. 126.) während ihr cylindrischer Hals ab vertical bleibt, zu ungleichen Tiefen einsenken können,

und man nun aus dieser Tiefe, welche durch eine Scale an jenem Halse abgemessen wird, die specifische Schwere des Flüssigen bestimmt; oder sie haben nur ein einziges bestimmtes Merkmal am Halse ab, und werden durch Hülfe mehrerer oder minderer etwa bei aa aufgelegter Gewichte bis zu diesem Zeichen in den flüssigen Körper hinabgedrückt. Im ersteren Falle steigt der Hals desto höher aus dem Fluido hervor, je dichter und schwerer dieses ist, und Zahlen auf dem Halse aufgetragen, zeigen an, welche eigene Schwere der Einsenkung bis zu einem oder dem andern Puncte der Scale entspricht. Im letztern Falle muß man das Aräometer mit desto mehr Gewicht beschweren, je dichter oder specifisch schwerer der flüssige Körper ist, in den es eingetaucht wurde.

Unter diesen Aräometern sind die durch Gewichte regulirten die besten. Eine gute Einrichtung derselben beschreibt Tralles in Gilberts Annalen. Jahrg. 1808. 30. Band. Die Angaben der specifischen Gewichte verschiedener Körper findet man am vollständigsten in Brisson über die specifischen Gewichte der Körper, übersetzt von Blumhof.

§. 86. Bei allen diesen Abwiegungen muß man auf die Temperatur Rücksicht nehmen. Denn da die verschiedenen Körper durch die Wärme in ungleichem Maaße ausgedehnt werden, so bleibt das Verhältniß ihrer specifischen Gewichte nicht bei allen Temperaturen ungeändert.

Bei den Abwiegungen in der Luft muß man noch darauf Rücksicht nehmen, daß auch da der abgewogene Körper etwas, obgleich wenig, an Gewicht verliert, indem die Luft ihn mit einer Kraft aufwärts drückt, welche dem Gewichte der aus der Stelle getriebenen Luft gleich ist.

§. 87. Die Ueberlegung, daß diese Einwirkung des Druckes der Luft veränderlich sein muß, indem die Dichtigkeit der Luft sich ändert, hat zu Erfindung des Manometers oder Dichtigkeitmessers der Luft Ver-

anlassung gegeben. Macht man nämlich, so gut als möglich, eine große Kugel A (Fig. 127.) luftleer, verschließt sie und hängt sie an eine feine Wage, wo ein Gegengewicht aus einem der schwersten Metalle ihr das Gleichgewicht hält: so verliert A desto mehr an Gewicht, je dichter die Luft ist, in welcher die Abwiegung geschieht; und, obgleich auch B in dichterer Luft mehr an Gewicht verliert, so ist doch dieses wegen des kleinen Volumens des aus schwerer Materie gemachten Gewichtes B unbedeutend. Findet man also, daß bei einem gewissen Zustande der Luft das Gleichgewicht zwischen A und B besteht; daß man dagegen zu einer andern Zeit dem Gewichte bei B zum Beispiel 20 Gran zulegen muß, um das Gleichgewicht herzustellen: so wiegt die Luft, welche dem Unterschiede der körperlichen Räume von A und B an Volumen gleich ist, im letztern Falle 20 Gran weniger, als im ersteren.

Dieses Instrument giebt also, wenn es mit vollkommener Genauigkeit gebraucht wird, wirklich die Änderungen in der Dichtigkeit der Luft in Gewichtszahlen an.

§. 88. Auch die Kunst, in der Luft zu schiffen, beruht auf den hier abgehandelten Lehren. Da die meisten Körper so überaus viel schwerer sind als Luft, so bedarf es einer Verbindung mit einem sehr leichten Körper, um jene in der Luft zu erheben. Ein solcher ist das Wasserstoffgas, welches nur $\frac{1}{8}$ so schwer als die atmosphärische Luft, oder wenn man es recht rein erhält, noch leichter ist. Füllt man also mit dieser Luft-Art einen aus dünnem Zeuge luftdicht gemachten Ballon, so treibt der Druck der umgebenden Luft diesen mit bedeutender Gewalt, so daß er angehängte schwere Körper mit sich heben kann, in die Höhe. Beim Höhersteigen gelangt er in dünnere Luftschichten, wenn er also sein Volumen ungeändert behält, so nimmt seine Steigkraft immer mehr ab, und man kann die Grenze, bis zu welcher er bei ge-

gebnem angehängtem Gewichte steigen kann, leicht bestimmen.

§. 89. Beispiel. Ein kugelförmiger Ballon von 28 Fuß Durchmesser sei mit Luft gefüllt, deren Gewicht $\frac{1}{6}$ so viel beträgt, als das Gewicht eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft, die unter einem eben so großen Drucke steht und eben so warm ist; die sämmtlichen mit dieser Luftmasse verbundenen übrigen Körper wiegen 700 Pfund, zu bestimmen, mit welcher Gewalt der Ballon zu steigen anfängt, und wie hoch er steigt.

Der Kugel Inhalt ist = 11494 Cubicfuß, also wenn 1 Cubicfuß Wasser = 70 Pfund wiegt und atmosphärische Luft etwa $\frac{1}{770}$ dieses Gewichts hat, die aus der Stelle getriebene Luft $\frac{1}{11} \cdot 11494 = 1040$ Pfunde. Mit dieser Kraft trieb ihn nun zwar die umgebende Luft aufwärts; aber auch die im Ballon eingeschlossene Luft wog ohngefähr $\frac{1}{6} \cdot 1040 = 170$ Pfund. Der Ballon hatte für sich allein also doch nur eine Steigekraft = 870 Pfunde. War er nun mit 700 Pfund anderer Belastung beschwert, so waren 170 Pfund Steigekraft übrig. Hiermit hätte der Ballon eigentlich so hoch steigen sollen, bis das gesammte Gewicht von 170 + 700 Pfund der in dem Raume von 11500 Cubicfuß enthaltenen Luft gleich wög, das ist bis

11500 Cubicfuß Luft 870 Pfunde wogen,

oder 1 Cubicfuß $\frac{870}{11500} = 0{,}076$ Pfund.

In der Nähe der Erde setzten wir sie $\frac{1}{11} = 0{,}091$ Pfund also hätte jene Dichtigkeit da statt gefunden, wo die Barometerhöhe = $\frac{5}{6}$ derjenigen Barometerhöhe war, die unten statt fand.

Aehnliche Berechnungen wirklicher Fälle giebt Gilbert in den Annalen der Physik. Jahrg. 1804. 1805. 16. und 20. Band.

§. 90. Bemerkung. Obgleich ein schwimmender Körper ruhen kann, wenn das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Flüssigen gleich ist dem Gewichte des ganzen schwimmenden Körpers, und wenn die Schwer-

puncte jener beiden Massen in einerlei Verticale liegen, so ist doch durch diese Bedingungen die Lage des Körpers nicht fest bestimmt, sondern es sind mehrere Lagen möglich, bei denen das Gleichgewicht besteht.

§. 91. Erklärung. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers heißt sicher, wenn der Körper bei einer ihm ertheilten geringen Abweichung von der für das Gleichgewicht passenden Lage, wieder zu ihr zurück kehrt; unsicher oder wankend dagegen, wenn der Körper, nachdem man ihn von jener Lage entfernt hatte, nicht wieder zu ihr zurückkehrt, sondern sich in eine andre gleichfalls den Bedingungen des Gleichgewichts entsprechende Lage begiebt. Die Stabilität des Gleichgewichtes schwimmender Körper wird nach diesen Umständen bestimmt.

§. 92. Anmerkung. Die Untersuchung über die verschiedenen Lagen, in welchen ein schwimmender Körper ruhen kann, führt meistens auf verwickelte Rechnungen, ich gebe daher hier nur ein Beispiel, das sich noch ziemlich leicht übersehen läßt. Bossut handelt im Traité d'Hydrodynamique umständlicher hiervon; Euler in seiner scientia navalis und Bouguer im Traité du navire zeigen die Anwendung dieser Lehren auf den Schiffbau.

§. 93. Aufgabe. Ein grades Prisma, dessen Querschnitt das gegebene Dreieck ABC ist (Fig. 128.), soll so schwimmen, daß bei horizontaler Axe des Prisma's nur ein Winkel der Grundfläche eingetaucht ist; man sucht die Lage, in welcher dieses möglich ist.

Auflösung. Da die Axe des Prisma's horizontal ist, so gilt für alle auf die Axe senkrechten Querschnitte, was für einen gilt, und wir haben daher nur nöthig, das Dreieck ABC so zu betrachten, als ob seine Ebne der schwimmende Körper wäre.

Stellt DE die Wasserfläche vor und ist die Stellung des Dreiecks dem Gewichte entsprechend, so muß der Wasserkörper CDE dem Prisma CAB gleich seyn, und wenn H[illegible] aus der Stelle [illegible] Wasser

I des ganzen Dreieckes Schwerpunct ist, so muß HI vertical sein. Wir wollen den schwimmenden Körper als homogen ansehen, damit sein Schwerpunct nach Statik §. 138. gefunden werden könne. Theilt man dann AB in G in zwei gleiche Hälften und nimmt auf CG, CI $= \frac{2}{3}$ CG, so ist I des schwimmenden Körpers Schwerpunct; ist ferner DF = FE in der Linie DE, und nimmt man CH $= \frac{2}{3}$ CF, so hat man H als des aus der Stelle getriebenen Wassers Schwerpunct.

Es sei AC = b, CB = a, und die gesuchten Linien CD = x, CE = y, so ist

Inhalt ABC : Inhalt CDE = ab : xy (Trigonom. §. 68.), folglich wenn die eigene Schwere des Wassers = P, des schwimmenden Körpers = p heißt,

p . ab = P . xy, das Gewicht des schwimmenden Körpers und des aus der Stelle getriebenen Flüssigen. Dieses ist die erste Bedingung des Gleichgewichtes. Die zweite ist, daß HI und folglich (Geom. §. 274.) auch FG vertical sei. Zieht man also DG, EG, so sind DFG, EFG bei F rechtwinklichte Dreiecke, und überdies DG = GE, weil DF = EF.

Es ist aber in dem völlig bekannten Dreiecke ABC auch CG = c bekannt und ACG = γ; BCG = δ bekannt, und es wird

$$DG^2 = c^2 + x^2 - 2cx . \text{Cos}\gamma = GE^2 = c^2 + y^2 - 2cy . \text{Cos}\delta,$$

oder, weil $y = \frac{p . ab}{P . x}$ war,

$$x^2 - 2cx . \text{Cos}\gamma = \frac{p^2 . a^2b^2}{P^2 . x^2} - \frac{2c . p . ab}{P . x} \text{Cos}\delta,$$

das ist

$$x^4 - 2cx^3 \text{Cos}\gamma + 2c . \frac{p}{P} ab . x \text{Cos}\delta - \frac{p^2a^2b^2}{P^2} = 0;$$

Die Werthe von x, welche diese Gleichung vom vierten Grade angiebt, würden die Lage bestimmen, bei welchen das Gleichgewicht besteht.

Wir wollen nun den Fall betrachten, da das Dreieck zwei gleiche Schenkel $a = b$ hat, und wo folglich auch $\gamma = \delta$ wird; dann geht unsre Gleichung in

$$x^4 - 2cx^3 \operatorname{Cos}\gamma + 2c \cdot \frac{p}{P} \cdot b^2 x \cdot \operatorname{Cos}\gamma - \frac{p^2 b^4}{P^2} = 0$$

über; oder in

$$x^2 (x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma) + \frac{pb^2}{P}\left(2cx \operatorname{Cos}\gamma - \frac{pb^2}{P}\right) = 0,$$

oder in

$$x^2\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) - \frac{pb^2}{P}\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) = 0,$$

oder in $\left(x^2 - \frac{pb^2}{P}\right)\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) = 0.$

Hier kann also, damit der Werth der Gleichung Null gebe,

$$x \text{ entweder } = \pm b \sqrt{\frac{p}{P}},$$

oder $x = c \operatorname{Cos}\gamma \pm \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2 \gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$, werden, indem sowohl

$$\left(x^2 - \frac{pb^2}{P}\right) = 0; \text{ als } x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P} = 0,$$

sein kann.

Da negative Auflösungen für unsre Aufgabe nicht passen, so giebt es drei Lagen, welche das Dreieck mit einer eingetauchten Ecke annehmen kann,

erstlich wo $x = b \cdot \sqrt{\frac{p}{P}}$ und $y = b \sqrt{\frac{p}{P}}$;

zweitens wo $x = c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$

und $y = \frac{pb^2}{P} \cdot \frac{1}{c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}}$, oder

...ches dasselbe ist, $y = c\,\mathrm{Cos}\gamma - \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$;

...rittens wo $x = c\,\mathrm{Cos}\gamma - \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$,

$y = c\,\mathrm{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$ ist.

§. 94. Diese drei verschiedenen Lagen des gleichschenk... ...ichten Dreieckes sind möglich, wenn $c\,\mathrm{Cos}\gamma > b\,.\,\sqrt{\frac{p}{P}}$ ...) und zugleich $b > c\,\mathrm{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$. ...ber außerdem kann das Dreieck auch so liegen, daß es ...it zwei eingetauchten Ecken schwimmt.

§. 95. Aufgabe. Eben der in §. 93. beschriebene Körper soll so schwimmen, daß zwei Ecken eingetaucht ...nd; man sucht die Bestimmungen für seine Lage.

Auflösung. Man kann sich die vorige Figur (Fig. 128.) umgekehrt vorstellen, so daß ADEB unter ...em Wasser liegt. Da nun des ganzen Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2}\,ab\,.\,\mathrm{Sin}\,(\gamma+\delta)$, und Gewicht $= \frac{p\,.\,ab}{2}\,.\,\mathrm{Sin}\,(\gamma+\delta)$, ...es Trapezes ADEB Inhalt $= \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,(\gamma+\delta)\,(ab-xy)$ ...Gewicht $= \frac{1}{2}\,P\,.\,\mathrm{Sin}\,(\gamma+\delta)\,(ab-xy)$ ist, so muß $P\,(ab-xy) = p\,.\,ab$, oder $xy = \frac{ab\,.\,(P-p)}{P}$ sein, ...nd zugleich muß wie vorhin $x^2 - 2cx\,\mathrm{Cos}\gamma = y^2 - 2cy\,\mathrm{Cos}\delta$, werden.

Nehme ich wieder $a = b$ und $\gamma = \delta$, ...o soll $y = \frac{b^2\,(P-p)}{P\,.\,x}$ sein, und folglich

$$x^4 - 2cx^3\,\mathrm{Cos}\gamma + \frac{2cb^2x(P-p)\,\mathrm{Cos}\gamma}{P} - \frac{b^4(P-p)^2}{P^2} = 0,$$

an Volumen ihm gleicht, und seine specifische Schwere wird also durch $\frac{P}{P-(R-q)}$ ausgedrückt, wenn die des Wassers = 1 ist.

§. 84. Aufgabe. Eines flüssigen Körpers absolute und eigenthümliche Schwere zu bestimmen.

Auflösung. Will man zuerst genau bestimmen, wie viel ein Cubiczoll des Flüssigen wiegt: so ist es am besten, einen sehr genau gearbeiteten soliden Cubiczoll aus Metall machen zu lassen; diesen auf gewöhnliche Weise außer dem Flüssigen abzuwiegen und dann durch genaue Abwiegung desselben in dem Flüssigen zu finden, wie viel er an Gewicht verliert. Dieser Gewichtverlust ist das Gewicht eines Cubiczolles des flüssigen Körpers.

Kömmt es bloß auf das relative Gewicht des flüssigen Körpers an, so wiegt man eben so einen festen Körper in demselben ab und nun ergiebt sich das specifische Gewicht desselben in Vergleichung gegen das des festen Körpers, wenn man den Gewichtverlust im Flüssigen mit dem Gewichte des Körpers, welches er im Freien hatte, dividirt. Will man das specifische Gewicht des Flüssigen sogleich mit dem specifischen Gewichte des Wassers vergleichen, so muß man den Gewichtsverlust = P desselben im Wasser abgewogenen Körpers, und den Gewichtsverlust = Q eben des in dem gegebenen flüssigen Körper abgewogenen festen Körpers durch einander dividiren. Oder des gegebenen flüssigen Körpers specifische Schwere ist zur specifischen Schwere des Wassers, wie $Q : P = \frac{Q}{P} : 1$.

§. 85. Um die verhältnißmäßigen eigenthümlichen Gewichte verschiedener flüssiger Körper zu vergleichen, dienen auch die Aräometer, welches hohle schwimmende Körper sind. Diese sind entweder so eingerichtet, daß sie sich (Fig. 126.) während ihr cylindrischer Hals ab vertical bleibt, zu ungleichen Tiefen einsenken können,

gebnem angehängtem Gewichte steigen kann, leicht bestimmen.

§. 89. Beispiel. Ein kugelförmiger Ballon von 28 Fuß Durchmesser sei mit Luft gefüllt, deren Gewicht ⅙ so viel beträgt, als das Gewicht eines gleichen Volumens atmosphärischer Luft, die unter einem eben so großen Drucke steht und eben so warm ist; die sämmtlichen mit dieser Luftmasse verbundenen übrigen Körper wiegen 700 Pfund, zu bestimmen, mit welcher Gewalt der Ballon zu steigen anfängt, und wie hoch er steigt.

Der Kugel Inhalt ist = 11494 Cubicfuß, also wenn 1 Cubicfuß Wasser = 70 Pfund wiegt und atmosphärische Luft etwa $\frac{1}{770}$ dieses Gewichts hat, die aus der Stelle getriebene Luft $\frac{1}{11}$. 11494 = 1040 Pfunde. Mit dieser Kraft trieb ihn nun zwar die umgebende Luft aufwärts; aber auch die im Ballon eingeschlossene Luft wog ohngefehr ⅙ . 1040 = 170 Pfund. Der Ballon hatte für sich allein also doch nur eine Steigekraft = 870 Pfunde. War er nun mit 700 Pfund anderer Belastung beschwert, so waren 170 Pfund Steigekraft übrig. Hiermit hätte der Ballon eigentlich so hoch steigen sollen, bis das gesammte Gewicht von 170 + 700 Pfund der in dem Raume von 11500 Cubicfuß enthaltenen Luft gleich wog, das ist bis

11500 Cubicfuß Luft 870 Pfunde wogen,

oder 1 Cubicfuß $\frac{87}{1150}$ = 0,076 Pfund.

In der Nähe der Erde setzten wir sie $\frac{1}{11}$ = 0,091 Pfund also hätte jene Dichtigkeit da statt gefunden, wo die Barometerhöhe = ⅚ derjenigen Barometerhöhe war, die unten statt fand.

Aehnliche Berechnungen wirklicher Fälle giebt Gilbert in den Annalen der Physik. Jahrg. 1804. 1805. 16. und 20. Band.

§. 90. Bemerkung. Obgleich ein schwimmender Körper ruhen kann, wenn das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Flüssigen gleich ist dem Gewichte des ganzen schwimmenden Körpers, und wenn die Schwer-

anlassung gegeben. Macht man nämlich, so gut als möglich, eine große Kugel A (Fig. 127.) luftleer, verschließt sie und hängt sie an eine feine Wage, wo ein Gegengewicht aus einem der schwersten Metalle ihr das Gleichgewicht hält: so verliert A desto mehr an Gewicht, je dichter die Luft ist, in welcher die Abwiegung geschieht; und, obgleich auch B in dichterer Luft mehr an Gewicht verliert, so ist doch dieses wegen des kleinen Volumens des aus schwerer Materie gemachten Gewichtes B unbedeutend. Findet man also, daß bei einem gewissen Zustande der Luft das Gleichgewicht zwischen A und B besteht; daß man dagegen zu einer andern Zeit dem Gewichte bei B zum Beispiel 20 Gran zulegen muß, um das Gleichgewicht herzustellen: so wiegt die Luft, welche dem Unterschiede der körperlichen Räume von A und B an Volumen gleich ist, im letztern Falle 20 Gran weniger, als im ersteren.

Dieses Instrument giebt also, wenn es mit vollkommener Genauigkeit gebraucht wird, wirklich die Änderungen in der Dichtigkeit der Luft in Gewichtszahlen an.

§. 88. Auch die Kunst, in der Luft zu schiffen, beruht auf den hier abgehandelten Lehren. Da die meisten Körper so überaus viel schwerer sind als Luft, so bedarf es einer Verbindung mit einem sehr leichten Körper, um jene in der Luft zu erheben. Ein solcher ist das Wasserstoffgas, welches nur $\frac{1}{8}$ so schwer als die atmosphärische Luft, oder wenn man es recht rein erhält, noch leichter ist. Füllt man also mit dieser Luft-Art einen aus dünnem Zeuge luftdicht gemachten Ballon, so treibt der Druck der umgebenden Luft diesen mit bedeutender Gewalt, so daß er angehängte schwere Körper mit sich heben kann, in die Höhe. Beim Höhersteigen gelangt er in dünnere Luftschichten, wenn er also sein Volumen ungeändert behält, so nimmt seine Steigkraft immer mehr ab, und man kann die Grenze, bis zu welcher er bei ge-

I des ganzen Dreieckes Schwerpunct ist; so muß HI vertical sein. Wir wollen den schwimmenden Körper als homogen ansehen, damit sein Schwerpunct nach Statik §. 138. gefunden werden könne. Theilt man dann AB in G in zwei gleiche Hälften und nimmt auf CG, CI $= \frac{2}{3}$ CG, so ist I des schwimmenden Körpers Schwerpunct; ist ferner DF = FE in der Linie DE, und nimmt man CH $= \frac{2}{3}$ CF, so hat man H als des aus der Stelle getriebenen Wassers Schwerpunct.

Es sei AC = b, CB = a, und die gesuchten Linien CD = x, CE = y, so ist

Inhalt ABC : Inhalt CDE = ab : xy (Trigonom. §. 68.), folglich wenn die eigene Schwere des Wassers = P, des schwimmenden Körpers = p heißt,

p . ab = P . xy, das Gewicht des schwimmenden Körpers und des aus der Stelle getriebenen Flüssigen. Dieses ist die erste Bedingung des Gleichgewichtes. Die zweite ist, daß HI und folglich (Geom. §. 274.) auch FG vertical sei. Zieht man also DG, EG, so sind DFG, EFG bei F rechtwinklichte Dreiecke, und überdies DG = GE, weil DF = EF.

Es ist aber in dem völlig bekannten Dreiecke ABC auch CG = c bekannt und ACG = γ; BCG = δ bekannt, und es wird

$$DG^2 = c^2 + x^2 - 2cx . \mathrm{Cos}\,\gamma = GE^2 = c^2 + y^2 - 2cy . \mathrm{Cos}\,\delta,$$

oder, weil $y = \frac{p . ab}{P . x}$ war,

$$x^2 - 2cx . \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{p^2 . a^2 b^2}{P^2 . x^2} - \frac{2c . p . ab}{P . x} \mathrm{Cos}\,\delta,$$

das ist

$$x^4 - 2cx^3 \mathrm{Cos}\,\gamma + 2c . \frac{p}{P} ab . x \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{p^2 a^2 b^2}{P^2} = 0;$$

Die Werthe von x, welche diese Gleichung vom vierten Grade angiebt, würden die Lage bestimmen, bei welchen das Gleichgewicht besteht.

puncte jener beiden Massen in einerlei Verticale liegen, so ist doch durch diese Bedingungen die Lage des Körpers nicht fest bestimmt, sondern es sind mehrere Lagen möglich, bei denen das Gleichgewicht besteht.

§. 91. Erklärung. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers heißt sicher, wenn der Körper bei einer ihm ertheilten geringen Abweichung von der für das Gleichgewicht passenden Lage, wieder zu ihr zurückkehrt; unsicher oder wankend dagegen, wenn der Körper, nachdem man ihn von jener Lage entfernt hatte, nicht wieder zu ihr zurückkehrt, sondern sich in eine andre gleichfalls den Bedingungen des Gleichgewichts entsprechende Lage begiebt. Die Stabilität des Gleichgewichtes schwimmender Körper wird nach diesen Umständen bestimmt.

§. 92. Anmerkung. Die Untersuchung über die verschiedenen Lagen, in welchen ein schwimmender Körper ruhen kann, führt meistens auf verwickelte Rechnungen, ich gebe daher hier nur ein Beispiel, das sich noch ziemlich leicht übersehen läßt. Bossut handelt im Traité d'Hydrodynamique umständlicher hiervon; Euler in seiner scientia navalis und Bouguer im Traité du navire zeigen die Anwendung dieser Lehren auf den Schiffbau.

§. 93. Aufgabe. Ein grades Prisma, dessen Querschnitt das gegebene Dreieck ABC ist (Fig. 128.), soll so schwimmen, daß bei horizontaler Axe des Prisma's nur ein Winkel der Grundfläche eingetaucht ist; man sucht die Lage, in welcher dieses möglich ist.

Auflösung. Da die Axe des Prisma's horizontal ist, so gilt für alle auf die Axe senkrechten Querschnitte, was für einen gilt, und wir haben daher nur nöthig, das Dreieck ABC so zu betrachten, als ob seine Ebne der schwimmende Körper wäre.

Stellt DE die Wasserfläche vor und ist die Stellung des Dreiecks dem Gewichte entsprechend, so muß der Wasserkörper CDE dem Prisma CAB gleich wiegen, und wenn H das aus der Stelle getriebenen Wassers,

des ganzen Dreieckes Schwerpunct ist, so muß HI vertical sein. Wir wollen den schwimmenden Körper als homogen ansehen, damit sein Schwerpunct nach Statik §. 138. gefunden werden könne. Theilt man dann AB in G in zwei gleiche Hälften und nimmt auf CG, CI $= \frac{2}{3}$ CG, so ist I des schwimmenden Körpers Schwerpunct; ist ferner DF = FE in der Linie DE, und nimmt man CH $= \frac{2}{3}$ CF, so hat man H als des aus der Stelle getriebenen Wassers Schwerpunct.

Es sei AC = b, CB = a, und die gesuchten Linien CD = x, CE = y, so ist

Inhalt ABC : Inhalt CDE = ab : xy (Trigonom. §. 68.), folglich wenn die eigene Schwere des Wassers = P, des schwimmenden Körpers = p heißt,

p . ab = P . xy, das Gewicht des schwimmenden Körpers und des aus der Stelle getriebenen Flüssigen. Dieses ist die erste Bedingung des Gleichgewichtes. Die zweite ist, daß HI und folglich (Geom. §. 274.) auch FG vertical sei. Zieht man also DG, EG, so sind DFG, EFG bei F rechtwinklichte Dreiecke, und überdies DG = GE, weil DF = EF.

Es ist aber in dem völlig bekannten Dreiecke ABC auch CG = c bekannt und ACG = γ; BCG = δ bekannt, und es wird

$$DG^2 = c^2 + x^2 - 2cx . \mathrm{Cos}\,\gamma = GE^2 = c^2 + y^2 - 2cy . \mathrm{Cos}\,\delta,$$

oder, weil $y = \frac{p . ab}{P . x}$ war,

$$x^2 - 2cx . \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{p^2 . a^2 b^2}{P^2 . x^2} - \frac{2c . p . ab}{P . x} \mathrm{Cos}\,\delta,$$

das ist

$$x^4 - 2cx^3 \mathrm{Cos}\,\gamma + 2c . \frac{p}{P} ab . x \mathrm{Cos}\,\delta - \frac{p^2 a^2 b^2}{P^2} = 0;$$

die Werthe von x, welche diese Gleichung vom vierten Grade angiebt, würden die Lage bestimmen, bei welchen das Gleichgewicht besteht.

Wir wollen nun den Fall betrachten, da das Dreieck zwei gleiche Schenkel $a = b$ hat, und wo folglich auch $\gamma = \delta$ wird; dann geht unsre Gleichung in

$$x^4 - 2cx^3 \operatorname{Cos}\gamma + 2c \cdot \frac{p}{P} \cdot b^2 x \cdot \operatorname{Cos}\gamma - \frac{p^2 b^4}{P^2} = 0$$

über; oder in

$$x^2 (x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma) + \frac{pb^2}{P}\left(2cx \operatorname{Cos}\gamma - \frac{pb^2}{P}\right) = 0,$$

oder in

$$x^2\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) - \frac{pb^2}{P}\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) = 0,$$

oder in $\left(x^2 - \frac{pb^2}{P}\right)\left(x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P}\right) = 0.$

Hier kann also, damit der Werth der Gleichung Null gebe,

$$x \text{ entweder } = \pm b \sqrt{\frac{p}{P}},$$

oder $x = c \operatorname{Cos}\gamma \pm \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$, werden, indem sowohl

$$\left(x^2 - \frac{pb^2}{P}\right) = 0; \text{ als } x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma + \frac{pb^2}{P} = 0,$$

sein kann.

Da negative Auflösungen für unsre Aufgabe nicht passen, so giebt es drei Lagen, welche das Dreieck mit einer eingetauchten Ecke annehmen kann,

erstlich wo $x = b \cdot \sqrt{\frac{p}{P}}$ und $y = b \sqrt{\frac{p}{P}}$;

zweitens wo $x = c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$

und $y = \frac{pb^2}{P} \cdot \frac{1}{c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}}$, oder

welches dasselbe ist, $y = c \operatorname{Cos}\gamma - \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$;

drittens wo $x = c \operatorname{Cos}\gamma - \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$,

$$y = c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)} \text{ ist.}$$

§. 94. Diese drei verschiedenen Lagen des gleichschenklichten Dreieckes sind möglich, wenn $c \operatorname{Cos}\gamma > b \cdot \sqrt{\frac{p}{P}}$ ist, und zugleich $b > c \operatorname{Cos}\gamma + \sqrt{\left(c^2 \operatorname{Cos}^2\gamma - \frac{pb^2}{P}\right)}$. Aber außerdem kann das Dreieck auch so liegen, daß es mit zwei eingetauchten Ecken schwimmt.

§. 95. Aufgabe. Eben der in §. 93. beschriebene Körper soll so schwimmen, daß zwei Ecken eingetaucht sind; man sucht die Bestimmungen für seine Lage.

Auflösung. Man kann sich die vorige Figur (Fig. 128.) umgekehrt vorstellen, so daß ADEB unter dem Wasser liegt. Da nun des ganzen Dreiecks Inhalt $= \frac{1}{2} ab . \operatorname{Sin}(\gamma + \delta)$, und Gewicht $= \frac{p . ab}{2} . \operatorname{Sin}(\gamma + \delta)$, des Trapezes ADEB Inhalt $= \frac{1}{2} \operatorname{Sin}(\gamma + \delta)(ab - xy)$ Gewicht $= \frac{1}{2} P . \operatorname{Sin}(\gamma + \delta)(ab - xy)$ ist, so muß $P(ab - xy) = p . ab$, oder $xy = \frac{ab . (P - p)}{P}$ sein, und zugleich muß wie vorhin
$x^2 - 2cx \operatorname{Cos}\gamma = y^2 - 2cy \operatorname{Cos}\delta$, werden.

Nehme ich wieder $a = b$ und $\gamma = \delta$, so soll $y = \frac{b^2 (P - p)}{P . x}$ sein, und folglich

$$x^4 - 2cx^3 \operatorname{Cos}\gamma + \frac{2cb^2 x(P - p) \operatorname{Cos}\gamma}{P} - \frac{b^4 (P - p)^2}{P^2} = 0,$$

diese Gleichung läßt sich in zwei Factoren zerlegen

$$\left(x^2 - \frac{b^2(P-p)}{P}\right)\left(x^2 - 2cx\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \frac{b^2(P-p)}{P}\right) = 0,$$

und es kann $x = b\sqrt{\frac{P-p}{P}}$,

oder $x = c\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\gamma - \frac{b^2(P-p)}{P}\right)}$,

oder $x = c\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \sqrt{\left(c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\gamma - \frac{b^2(P-p)}{P}\right)}$

sein, und dieses sind die drei Werthe, die x erhalten kann.

§. 96. Beispiel. Es sei $c = \frac{1}{2}b$, oder $\gamma = 60°$, so kann das gleichschenklichte Dreieck in folgenden Stellungen schwimmen. Erstlich mit einer Ecke unter dem Wasser, sowohl wenn $x = y = b\sqrt{\frac{p}{P}}$ ist, als wenn

$$x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}b^2 - \frac{p}{P}b^2\right)}$$

$$\text{und } y = \frac{1}{4}b \mp \sqrt{\left(\frac{1}{16}b^2 - \frac{p}{P}b^2\right)} \text{ ist.}$$

Zweitens mit zwei Spitzen unter dem Wasser, wenn $x = y = b\sqrt{\frac{P-p}{P}}$, und

$$\text{wenn } x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}b^2 - b^2\left(\frac{P-p}{P}\right)\right)} \text{ ist.}$$

Wäre $P = 20 \cdot p$, oder der schwimmende Körper nur $\frac{1}{20}$ so schwer als der Flüssige, worin er eingetaucht ist, so gäbe das für die beiden ersten Fälle $x = y = b\sqrt{\frac{1}{20}}$,

$$x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\left(\frac{4}{80}b^2\right)},$$

für die beiden letztern Fälle $x = y = b \cdot \sqrt{\frac{19}{20}}$,

$$\text{und } x = \frac{1}{4}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16} - \frac{19}{20}\right)} \cdot b,$$

wo also der letzte unmöglich wird.

Das Dreieck kann in den vier Stellungen schwimmen, die Fig. 129. 130. 131. 132. darstellt, wenn das Fluidum die hier vorausgesetzte sehr große specifische Schwere hat.

§. 96. **Aufgabe.** Ein schwimmender Körper ABCD (Fig. 133.), der in der Stellung ABCD ruhete, wird in die Stellung EFGH so gebracht, daß sein eingetauchter Theil noch eben so groß ist als vorhin; man soll bestimmen, ob er in die vorige Lage zurück zu kehren oder eine andre anzunehmen, ein Bestreben hat.

Auflösung. Damit der Körper schwimmend im Gleichgewichte sei, muß des ganzen Körpers ABCD Gewicht $= P$ eben so groß sein, als das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Wassers. Ist also MN die Oberfläche des Wassers und K der Schwerpunct der Wassermasse, die in OBDP Raum fände, so muß $OBDP . b = P$ sein, wenn b das Gewicht von 1 Cubicfuß Wasser bedeutet; und des ganzen Körpers Schwerpunct muß in der Verticallinie KL liegen, wenn der Körper in der Stellung ABCD ruhen soll. Wir haben nicht nöthig, den schwimmenden Körper als homogen anzunehmen und können daher seinen Schwerpunct von der Mitte der Figur entfernen; wir können denselben also entweder unterhalb K oder oberhalb annehmen.

Erster Fall. Der Schwerpunct g des schwimmenden Körpers liege unterhalb K.

Indem nun der Körper in die Stellung EFGH so gebracht wird, daß sein eingetauchter Theil eben so groß als vorhin bleibt, kömmt der vorhin eingetauchte Theil in die Lage QFGR und sein Schwerpunct gelangt nach ; aber k ist jetzt nicht der Schwerpunct des aus der Stelle getriebenen Wassers, sondern da dieses den Raum FGT einnehmen würde, so liegt sein Schwerpunct offenbar mehr nach Q zu, etwa in U. Der Schwerpunct des ganzen Körpers ist aus g nach γ gerückt, und es ist

nun so als ob in γ die Kraft = P niederwärts, in U die Kraft = P als Druck des Wassers aufwärts wirkte, und beide Kräfte streben dahin, den Körper in seine vorige Stellung zu bringen. Die vorige Gleichgewichtsstellung hatte also, wenn der Schwerpunct des ganzen Körpers unterhalb K lag, erhebliche Stabilität.

Zweiter Fall. Der Schwerpunct f des schwimmenden Körpers liege oberhalb des Schwerpunctes K der aus der Stelle getriebenen Wassermasse.

Indem der Körper in die Lage EFGH kömmt, rückt sein Schwerpunct nach φ, und der aus der Stelle getriebenen Wassermasse Schwerpunct nach U. Es ist also ganz so, als ob in φ eine Kraft = P niederwärts und in U eine gleiche Kraft aufwärts wirkte. Beide tragen bei, den Körper in seine alte Stellung zurück zu bringen, so lange die durch φ gezogne Verticale zwischen U und K, oder so lange φ niedriger liegt, als der Durchschnittspunct V der beiden durch U und k auf OP, QR gezognen Senkrechten. Befände sich φ in V, so würde der Körper in seiner neuen Lage ruhen. Hätte der Schwerpunct f′ so hoch gelegen, daß φ′ jenseits V fiele, so würden Kräfte, deren eine in φ′ niederwärts und eine in U aufwärts wirkt, beide den Körper von seiner alten Lage noch mehr zu entfernen streben, und sein Gleichgewicht hätte keine Stabilität.

§. 97. Erklärung. Wenn man durch den Schwerpunct U der jetzt aus der Stelle getriebenen Wassermasse eine Senkrechte UV auf den Wasserspiegel zieht, und zugleich diejenige Stellung der Linie γkV bemerkt, in welche die vor der Störung des Gleichgewichtes durch den Schwerpunct der Wassermasse gezogne, auf den Wasserspiegel Senkrechte jetzt gelangt ist: so heißt der Durchschnittspunct V beider Linien das Metacentrum des schwimmenden Körpers.

§. 98. Die vorigen Betrachtungen ergeben, daß der Schwerpunct des ganzen Körpers unterhalb des Me-

centri liegen muß, wenn der Körper einige Stabilität
aben soll.

§. 99. Die Betrachtungen des 96. §. lassen sich
ier nun auch rechnend anstellen. Des Körpers Ge-
icht sei = P und eben so groß das Gewicht der aus der
Stelle getriebenen Wassermasse, ehe das Gleichgewicht
estört ward. Indem der Körper in die Stellung
EFGH gebracht wird, bleibt, wie wir vorausgesetzt
aben, das Gewicht des aus der Stelle getriebenen Was-
ers = P, und folglich ist das Dreieck SQW = RWT,
elches, wenn der Winkel SWQ sehr klein sein soll,
ur statt findet, wenn WQ = WR ist, indem, wenn
er Winkel SWQ = RWT = α, des Dreiecks Inhalt
= $\frac{1}{2}$ SW . WQ . Sin α = $\frac{1}{2}$ RW . WT . Sin α ist,
nd bei sehr kleinen Schwankungen SW nahe genug
= QW, RW = WT bleibt.

In der jetzigen Stellung des Körpers ist sein Schwer-
unct g nach γ gerückt, und wir können leicht das Mo-
ent aller wirkenden Kräfte in Beziehung auf diesen
Punct ausrechnen.

Außer dem Gewichte = P des ganzen Körpers, wel-
ches wir als in γ vereinigt und dort vertical niederwärts
wirkend betrachten, ist der vertical aufwärts strebende
Druck des Wassers die einzige Kraft, welche den Kör-
per zu drehen strebt. Die letztere kennen wir, da der
Schwerpunct U des jetzt eingetauchten Theiles oder der
us der Stelle getriebenen Wassermasse nicht bekannt ist,
m besten ansehen als entspringend aus drei Kräften, die
ch in dem nach k gerückten Schwerpuncte der beim
Gleichgewichte aus der Stelle getriebnen Wassermasse
nd in den Schwerpuncten der Dreiecke SWQ, RWT
efinden. Die jetzt aus der Stelle getriebene Wasser-
masse ist nämlich = P − RWT + SWQ, und es ist
so so gut, als ob erstlich die Kraft = P in k vertical
ufwärts wirkte; zweitens das Gewicht der Wasser-
masse RWT in ihrem Schwerpuncte vertical niederwärts,

und endlich das Gewicht des Wassers SWQ in seinem Schwerpuncte vertical aufwärts. Diese drei Kräfte sind $= P$; $= \frac{1}{2} WT^2 . \text{Sin}\, \alpha$, und $= \frac{1}{2} WQ^2 . \text{Sin}\, \alpha$. Zieht man durch die jetzige Stellung γ des Schwerpunctes des ganzen schwimmenden Körpers eine Verticale γX, so ist für den Fall, da γ unterhalb k liegt
das Moment von P, $= P . kZ = P . k\gamma . \text{Sin}\, \alpha$,
das Mom. v. WRT ist $= (\frac{2}{3} WT - kZ) . \frac{1}{2} WT^2 . \text{Sin}\, \alpha$
und dieses Moment hat dasselbe Zeichen, wie das von P, da beide Kräfte eine Drehung nach derselben Seite um γ bewirken.

Das Moment von WQS ist, wenn ich sogleich $\frac{1}{2} WQ^2 . \text{Sin}\, \alpha = \frac{1}{2} WT^2 . \text{Sin}\, \alpha$ setze,

$$= (\tfrac{2}{3} WS + kZ) \tfrac{1}{2} WT^2 . \text{Sin}\, \alpha,$$

und hat dasselbe Zeichen, weil auch diese Kraft die Seite EF zu heben strebt. Die Summe aller Momente ist also $= P . k\gamma . \text{Sin}\, \alpha + \frac{2}{3} WT^3 . \text{Sin}\, \alpha$, und dadurch wird die Größe der Stabilität des Körpers ausgedrückt, indem sein Bestreben, in die vorige Lage zurückzukehren, desto größer ist, je größer sich dieses Moment findet. Und hier findet immer Stabilität statt, weil, wenn γ niedriger als k liegt, alle Kräfte sich vereinigen, um den Körper in seine vorige Lage zurückzubringen.

Liegt der Schwerpunct f höher als der Schwerpunct K, der aus der Stelle getriebenen Wassermasse, so rückt jener nach φ, dieser nach k, indem der Körper seine Stellung ändert. Berechnet man jetzt, auf ähnliche Art wie vorhin, die Momente der einzelnen Theile, in welche wir den Wasserdruck zerlegt haben, so ist erstlich der in k wirkenden Kraft $= P$, Moment in Beziehung auf den Drehungspunct φ, durch welchen die Verticale φy gezogen ist,

$$= - P . k\varphi . \text{Sin}\, \alpha,$$ und hier negativ, weil diese Kraft den Körper von seiner vorigen Stellung mehr zu entfernen strebt. Das Moment des Gewichtes von RWT wirkt dem vorigen entgegen und ist $= \frac{1}{2} WT^2 . \text{Sin}\, \alpha (\frac{2}{3} WT + \varphi W . \text{Sin}\, \alpha)$; das Mo-

umgebenden Flüssigen Oberfläche hinauf im Haarröhrchen, sondern sie bleiben, so wie Fig. 135. zeigt, mit ihrer Oberfläche ab in der Röhre unter dem Spiegel CD des umgebenden Flüssigen, endigen sich aber oben in eine convexe Halbkugel, so wie jene in eine concave Halbkugel.

§. 102. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich auch unter andern Umständen. In weiten Gefäßen zieht das Wasser sich an den Wänden höher hinauf, das Quecksilber hingegen steht an den Wänden eines Glasgefäßes niedriger als in der Mitte.

§. 103. Bemerkung. Da die Schwere als eine anziehende Kraft der ganzen Erde betrachtet werden kann, und sehr viele Erscheinungen darauf leiten, jedem Theilchen der Materie eine anziehende Kraft zuzuschreiben, so ist es leicht, den Gedanken zu fassen, daß das Höhersteigen des Wassers im Haarröhrchen von der anziehenden Kraft der Röhre herrühre, oder davon, daß die Theilchen der Röhre das Wasser mit mehr Kraft anziehen, als die Wassertheilchen sich unter einander. Beim Quecksilber muß ohne Zweifel das Gegentheil statt finden.

Die hier wirkende Attraction muß wohl nur in sehr kleinen Abständen merklich sein, denn das Wasser steigt nicht höher, wenn auch die Röhre AB länger ist. Ja die dünne Wasserschichte, welche bloß die Röhre von innen befeuchtet, scheint dick genug zu sein, um die Verschiedenheit in der anziehenden Kraft ungleichartiger Materien unmerklich zu machen, indem das Wasser in Röhren von ungleicher Materie aber gleichem Durchmesser gleich hoch steigt, wenn nur die Wände vollkommen benetzt waren.

§. 104. Die Wassersäule EF wird hier also dadurch getragen, daß die äußerste Schichte sich an die Wand der Röhre anhängt, diese eine zweite Schichte neben sich

Sechster Abschnitt.

Vom Gleichgewichte tropfbarer Körper in Haarröhrchen.

§. 100. Erfahrung. Wenn man eine sehr enge an beiden Enden offene Glasröhre in Wasser oder einen andern Körper, der das Glas benetzt, eintaucht, so steigt das Wasser in dieser Röhre höher als der Wasserspiegel der Masse ist, worin sie eingetaucht wurde. Beobachtet man die Vorsicht, daß man die Röhre vorher inwendig mit dem Flüssigen befeuchtet, in welches man sie eintaucht, so steigt es allemal gleich hoch, wenn der Durchmesser der Röhre gleich ist, ja man bemerkt sogar, daß diese Höhe bei gut benetzten Röhren und gleichen Durchmessern der Röhren dieselbe ist, wenn auch die Röhren aus verschiedenen Materien verfertigt sind, vorausgesetzt, daß das Fluidum, worin man sie eintaucht, immer dasselbe sei.

Verschiedene Fluida erreichen ungleiche Höhen, die nicht grade mit ihrem specifischen Gewichte im Verhältnisse stehen.

Bei genauerer Aufmerksamkeit findet man, daß die Oberfläche des in dem feinen Röhrchen oder Haarröhrchen AB (Fig. 134.) aufgestiegenen Flüssigen in der Mitte vertieft ist, oder wenn die Röhre cylindrisch ist, eine ohngefehr halbkugelförmige Höhlung bildet.

§. 101. Erfahrung. Dagegen giebt es andre Flüssige, die das Glas nicht befeuchten, zum Beispiel Quecksilber, und diese steigen nicht nur nicht über des

mgebenden Flüssigen Oberfläche hinauf im Haarröhr-
)en, sondern sie bleiben, so wie Fig. 135. zeigt, mit
hrer Oberfläche ab in der Röhre unter dem Spiegel CD
es umgebenden Flüssigen, endigen sich aber oben in eine
nvexe Halbkugel, so wie jene in eine concave Halb-
ugel.

§. 102. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich auch
nter andern Umständen. In weiten Gefäßen zieht das
Wasser sich an den Wänden höher hinauf, das Queck-
lber hingegen steht an den Wänden eines Glasgefäßes
iedriger als in der Mitte.

§. 103. Bemerkung. Da die Schwere als eine
nziehende Kraft der ganzen Erde betrachtet werden kann,
nd sehr viele Erscheinungen darauf leiten, jedem Theil-
)en der Materie eine anziehende Kraft zuzuschreiben, so
t es leicht, den Gedanken zu fassen, daß das Höher-
eigen des Wassers im Haarröhrchen von der anziehen-
en Kraft der Röhre herrühre, oder davon, daß die
heilchen der Röhre das Wasser mit mehr Kraft anzie-
en, als die Wassertheilchen sich unter einander. Beim
)ueckfilber muß ohne Zweifel das Gegentheil statt
nden.

Die hier wirkende Attraction muß wohl nur in sehr
leinen Abständen merklich sein, denn das Wasser steigt
icht höher, wenn auch die Röhre AB länger ist. Ja
ie dünne Wasserschichte, welche bloß die Röhre von in-
en befeuchtet, scheint dick genug zu sein, um die Ver-
chiedenheit in der anziehenden Kraft ungleichartiger
Materien unmerklich zu machen, indem das Wasser in
Röhren von ungleicher Materie aber gleichem Durch-
ıesser gleich hoch steigt, wenn nur die Wände vollkom-
ıen benetzt waren.

§. 104. Die Wassersäule EF wird hier also dadurch
etragen, daß die äußerste Schichte sich an die Wand
er Röhre anhängt, diese eine zweite Schichte neben sich

hinaufzieht, die zweite eine dritte u. s. w., und das ganze Gewicht der Säule EB wird also getragen von der in jedem Puncte der cylindrischen Wand wirksamen anziehenden Kraft.

§. 105. Bemerkung. Um die Richtigkeit dieser Hypothese zu prüfen, denken wir uns die Röhre AB nach GH verlängert, jedoch so, daß die Wände der Röhre AB aus dem festen Körper, z. B. Glas, die eingebildeten Wände der FGH aber bloß aus den umgebenden Wassertheilchen bestehen. Da die in der Röhre AB stehende Wassersäule bei der freien Verbindung mit dem Fluido im Gleichgewichte ist, so muß die ganze Säule EB von Kräften erhalten werden, die auf das übrige Fluidum oder auf das der bequemern Vergleichung wegen als abgesondert gedachte Fluidum BFGH nicht wirken.

Allerdings wirken auch die Wassertheilchen selbst anziehend auf einander, aber genau so in der Wassersäule HI als in der FK, weshalb diese Einwirkung sich durch keine Ungleichheit in beiden Schenkeln verräth. Die Wassertheilchen, die zunächst unter dem Ende der Glasröhre bei F, B liegen, werden aufwärts durch die anziehende Kraft = V des Glases gezogen. Zwar ziehen die unterhalb liegenden Wassertheilchen, die gleichsam die Wand des Theiles FK bilden, auch niederwärts, aber dieses findet eben so gut in der gleich hohen Wasserschichte unterhalb H statt, und kommt also nicht, als der einen Wassersäule eigenthümlich vor. Die Theilchen, welche unmittelbar oberhalb FB liegen, werden von der oberhalb ab liegenden Glasröhre mit der Kraft = V aufwärts, von den als Röhrenwand gedachten Wassertheilchen unterhalb FB mit der dem Wasser eigenthümlichen Anziehungskraft = U herabgezogen. Die beiden Wassertheilchen, die unmittelbar oberhalb und unterhalb FB an der Röhrenwand anliegen, werden also mit der gesammten Kraft = 2V — U aufwärts gezogen.

ma's Inhalt ist $= a(\frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{8}\pi d^2)$, und folglich der ganzen gehobenen Wassersäule Gewicht
$= g . a . d . l + g . a \frac{1}{2} d^2 (1 - \frac{1}{4}\pi)$, und dieses muß $= 2a(2v - u)$ sein, also muß da v, u und g bei denselben Materien gleiche Werthe behalten
$dl + \frac{1}{2}d^2(1 - \frac{1}{4}\pi)$ bei allen Abständen der Ebnen von einander immer gleich bleiben, welches bei der Kleinheit von d beinahe dl immer gleich, oder für verschiedene Abstände d, D, die zugehörige Höhe l, L beinahe strenge im umgekehrten Verhältniß der Abstände giebt.

§. 110. Hierauf gründet sich das Experiment, wo man zwei verticale Ebnen, nicht parallel, sondern unter einen sehr spitzen Winkel gegen einander geneigt, aufstellt. Die zwischen ihnen aufsteigende Flüssigkeit, in welche sie eingetaucht worden, steigt da, wo sie einander sehr nahe sind, sehr hoch, in den Puncten hingegen, wo beide Ebnen mehr von einander abstehen, minder hoch; und so bildet die Oberfläche des Flüssigen eine krumme Linie, deren Puncte in Höhen, den Abständen umgekehrt proportional liegen, welches die Hyperbel ist.

§. 111. Bemerkung. Woher es rührt, daß die Oberfläche des gehobenen Wassers eine Höhlung bildet, die bei sehr engen Röhren beinahe einer hohlen Halbkugel gleicht, läßt sich aus dem Vorigen wohl übersehen. Indem nämlich das Wasser eigentlich nur an der Röhrenwand hinaufgezogen wird, und die folgenden concentrischen Wasserschichten nur von den benachbarten Wassertheilchen, die schon gehoben sind, getragen werden, so ist es einleuchtend, daß diese weniger und weniger sich heben, und folglich eine in der Mitte hohle Oberfläche bilden werden. Laplace zeigt nun überdies, daß bei einer so gebildeten hohlen Oberfläche der Druck, den das Fluidum auf sich selbst, das ist auf die tiefer liegenden Theile, vermöge der gegenseitigen Attraction der Theilchen ausübt, viel geringer ist, als bei ebner Oberfläche; daß also, wenn die Oberfläche HD eben, die Oberfläche

von l nicht sehr verschieden, und daher beinahe l . r immer gleich groß bei verschiedenen Halbmessern der Röhre. Es ist folglich l halb so groß bei einem doppelt so großen Werthe von r, und überhaupt l im umgekehrten Verhältnisse von r.

§. 107. Bei ganz genauen Versuchen findet man, daß in Röhren von verschiedenen Halbmessern R und r, die Höhen L, l bis an den niedrigsten Punct der concaven Oberflächen nicht genau in dem Verhältnisse $L : l = r : R$ stehen, sondern daß

$$r(l + \tfrac{1}{3} r) = R(L + \tfrac{1}{3} R) \text{ ist.}$$

Gay-Lüssacs Versuche, welche Laplace in seiner Abhandlung über die Haarröhrchen anführt (Gilb. Annal. Jahrg. 1809. 33. Bd.) zeigen dieses.

§. 108. Wenn in unserer Formel $U > 2V$ oder $u > 2v$ wäre, so würde die aufwärts ziehende Kraft negativ, und das Fluidum würde nun so wie Quecksilber in Glasröhren sich niedriger halten, als die freie Oberfläche des umgebenden Flüssigen.

§. 109. Lehrsatz. Auch zwischen zwei parallelen Ebnen steigt das diese Ebnen benetzende Fluidum zu einer Höhe, die sehr nahe dem Abstande der Ebnen von einander umgekehrt proportional ist.

Beweis. Die horizontale Länge der parallelen Ebne sei $= a$, so ist $= 2a$ die ganze Größe der Linie, welche, indem sie das Fluidum berührt, anziehend auf dieses wirkt. Wir können daher nach eben den Gründen, wie vorhin $2V - U = 2a(2v - u)$, als wirkende Kraft setzen. Das Gewicht der gehobenen Wassersäule ist, wenn der Abstand der Ebnen von einander $= d$, und die Höhe $mn = l$ heißt $= g.a.d.l$; aber oberhalb m (Fig. 134.) befindet sich noch das ausgehöhlte Prisma, welches die Breite $= d$ und Höhe $= \frac{1}{2} d$ hat, aus welchem aber der halbe Cylinder vom Radius $= \frac{1}{2} d$ weggenommen ist. Dieses ausgehöhlten Pris-

Man nimmt eine gebogene Röhre, deren einer Schenkel sehr enge, der andre erheblich weit ist, beide aber oben offen sind. Gießt man in diese, nachdem sie gut mit Alkohol benetzt worden, Alkohol etwa bis an ab, so steht seine Oberfläche im engen Schenkel um eine bestimmte Höhe = l höher, als im andern, und die dortige Oberfläche cd ist concav. Gießt man nun bei ab mehr Alkohol nach, bis die Oberfläche im engen Schenkel das Ende desselben erreicht, so nimmt die Concavität der dortigen Oberfläche langsam ab, und die Oberfläche ist eine Ebne, wenn man den weitern Schenkel bis an gh, bis zu eben der Horizontalfläche gefüllt hat, in welcher die Oeffnung ef liegt. Gießt man noch mehr Alkohol nach, so drängt sich über ef ein convexer Tropfen, ohne abzufließen, hervor, der endlich die Gestalt einer Halbkugel annimmt; diese erreicht er aber erst, wenn der Alkohol im Schenkel gb so hoch über die durch das Ende ef gelegte Ebne herauf gestiegen ist, als vorhin der Höhen-Unterschied der Flächen cd und ab war. — Hier ist also der Druck, den ein convexer Tropfen ausübt, genau eben so viel stärker in Vergleichung gegen den Druck bei ebner Oberfläche, als er bei concaver Oberfläche schwächer in Vergleichung gegen den Druck bei ebner Oberfläche war.

Ganz ähnlich ist folgender Versuch, ab (Fig. 137.) sei ein an beiden Enden offenes Haarröhrchen, in welchem der Alkohol eine Höhe = l erreicht, wenn man es in ein Gefäß mit Alkohol taucht. Flößt man in diese Röhre Alkohol ein, indem man sie frei in verticaler Lage hält, so füllt sich der untere Theil der Röhre mit Alkohol, der sich zugleich unten als ein concaver Tropfen hervordrängt. Je höher der Alkohol in der Röhre steigt, desto mehr wird dieser Tropfen einer Halbkugel ähnlich, und erreicht diese Form völlig, wenn die Röhre bis zur Höhe = 2l mit Alkohol gefüllt ist. Hier ist l die Höhe, welche durch die Wirkung der Röhre auf das unterhalb liegende Fluidum oder durch die Wirkung des

Emo hohl ist, die Wassertheilchen an der letztern (abgesehen von der Einwirkung der Schwere) nicht mit der Gewalt niederwärts drängen, oder sich nicht mit der Gewalt den sie anziehenden Theilchen unterhalb m zu nähern streben, wie bei ebner Oberfläche. So wirkt der Meniscus Emopq gleichsam mit einer saugenden Kraft, und hebt, wenn er selbst durch fremde Kräfte gehalten wird, das Wasser in der Röhre.

Bei convexer Oberfläche findet das Umgekehrte statt. Die gegenseitige Anziehung der Theilchen drängt bei convexer Oberfläche die in dieser Fläche liegenden Theilchen stärker gegen die unteren als es bei ebener Oberfläche geschähe, und deshalb reicht eine niedrigere Säule mit convexer Oberfläche hin, um einer höheren mit ebner Oberfläche das Gleichgewicht zu halten.

§. 112. Diese Bemerkung ist deswegen wichtig, weil sie lehrt, daß im Barometer, dessen einer Schenkel weit genug ist, um eine fast horizontale Quecksilberfläche darzubieten, selbst die höchste Wölbung der Quecksilberfläche im andern Schenkel nicht die volle Höhe zeigt, welche das Quecksilber erreichen sollte, oder bei hinlänglich großer und deshalb horizontaler Oberfläche erreichen würde. Wenn also die Schenkel des Barometers ungleich sind, und vorzüglich, wenn der eine ein erheblich weites Gefäß bildet, und der andre sehr eng ist, so muß man zu der beobachteten größten Höhe der Wölbung des Quecksilbers im luftleeren Schenkel noch etwas zulegen, um die Einwirkung dieser Attractionskraft in Rechnung zu bringen.

Biot giebt in seinem traité de Physique Tom. I pag. 90. ein Täfelchen zu diesem Zwecke, nach Laplace's Formeln berechnet.

§. 113. Zur Erläuterung der in §. 111. angestellten Betrachtungen dient folgender Versuch, den Laplace anführt.

Man nimmt eine gebogene Röhre, deren einer Schenkel sehr enge, der andre erheblich weit ist, beide aber oben offen sind. Gießt man in diese, nachdem sie zuvor mit Alkohol benetzt worden, Alkohol etwa bis an ab, so steht seine Oberfläche im engen Schenkel um eine bestimmte Höhe = 1 höher, als im andern, und die dortige Oberfläche cd ist concav. Gießt man nun bei ab mehr Alkohol nach, bis die Oberfläche im engen Schenkel das Ende desselben erreicht, so nimmt die Concavität der dortigen Oberfläche langsam ab, und die Oberfläche ist eine Ebne, wenn man den weitern Schenkel bis an gh, bis zu eben der Horizontalfläche gefüllt hat, in welcher die Oeffnung ef liegt. Gießt man noch mehr Alkohol nach, so drängt sich über ef ein convexer Tropfen, ohne abzufließen, hervor, der endlich die Gestalt einer Halbkugel annimmt; diese erreicht er aber erst, wenn der Alkohol im Schenkel gb so hoch über die durch das Ende ef gelegte Ebne herauf gestiegen ist, als vorhin der Höhen-Unterschied der Flächen cd und ab war. — Hier ist also der Druck, den ein convexer Tropfen ausübt, genau eben so viel stärker in Vergleichung gegen den Druck bei ebner Oberfläche, als er bei concaver Oberfläche schwächer in Vergleichung gegen den Druck bei ebner Oberfläche war.

Ganz ähnlich ist folgender Versuch, ab (Fig. 137.) sei ein an beiden Enden offenes Haarröhrchen, in welchem der Alkohol eine Höhe = 1 erreicht, wenn man es in ein Gefäß mit Alkohol taucht. Flößt man in diese Röhre Alkohol ein, indem man sie frei in verticaler Lage hält, so füllt sich der untere Theil der Röhre mit Alkohol, der sich zugleich unten als ein concaver Tropfen hervordrängt. Je höher der Alkohol in der Röhre steigt, desto mehr wird dieser Tropfen einer Halbkugel ähnlich, und erreicht diese Form völlig, wenn die Röhre bis zur Höhe = 2l mit Alkohol gefüllt ist. Hier ist l die Höhe, welche durch die Wirkung der Röhre auf das innerhalb liegende Fluidum oder durch die Wirkung des

durch de beschriebenen Kugelringes auf h läßt sich durch

$2\pi \cdot \frac{1}{n} \cdot ac \cdot \frac{DE \cdot EN \cdot HN}{HE^2} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}$ ausdrücken, und

verhält sich folglich zur Attraction des ähnlichen Kugelringes, welchen DE beschreibt, wie ac zu AC.

Offenbar findet diese Vergleichung statt, für jeden kleinen Kugelring, wenn nur seine Lage auf der einen und auf der andern Kugel eine ähnliche ist, und seine Dicke dem Halbmesser proportional genommen wird. Wenn aber für alle Theile der einen Kugel die Attraction auf H, sich zu der von allen ähnlich angenommenen Theilen der andern Kugel auf h ausgeübten Attraction, verhält, wie AC zu ac, so findet auch für die Attraction der ganzen Kugeln eben dieses Verhältniß statt. Puncte also H, h, die in Vergleichung gegen die Halbmesser der auf sie wirkenden Kugeln ähnlich liegend sind, oder für die HC : hc = AC : ac ist, leiden eine gegen den Mittelpunct jener Kugeln gerichtete Anziehung, die dem Halbmesser der Kugeln proportional ist.

§. 117. Ganz allgemein ist die von der Kugel AFBA auf H ausgeübte Attraction im Verhältniß ihrer Masse und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes HC, also durch $\frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot AC^3}{HC^2}$ ausgedrückt. Diese allgemeine Regel, die ich hier nicht umständlich beweisen will, giebt bei einem bestimmten Verhältnisse der HC gegen AC, z. B. HC = m . AC

$\frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot AC}{m^2}$, also in diesem bestimmten Falle die Attraction dem Halbmesser der Kugel proportional.

§. 118. Liegt der angezogene Punct in der Oberfläche der Kugel selbst, so ist HC = AC und folglich bei

sem Ringe eine Dicke $= \frac{2}{n}$ AC bei, so ist sein Inhalt $= 2\pi \cdot \frac{1}{n} AC \cdot NE \cdot ED$. Jedes Theilchen DE dieses Ringes wirkt anziehend auf H mit einer Kraft, die seiner Masse direct und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, das ist mit einer Kraft $= \frac{DE}{HE^2} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}$, wenn G die anziehende Kraft eines Körpers $= a^3$ in der Entfernung $= b$ angiebt. Aber es ist offenbar, daß die verschiedenen Theile unseres Ringes ihre auf AB senkrechten Wirkungen gegenseitig zerstören, weil jedem DE ein eben solches Stück gegenüber liegt; wir zerlegen daher die nach EH gerichtete Attractionskraft und finden die der Axe HB parallele Kraft $= \frac{DE}{HE^2} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{HN}{HE}$ für das Stückchen DE und folglich für den ganzen Ring, welchen DE beschreibt, die nach HB gerichtete Attractionskraft

$$= \frac{2\pi \cdot \frac{1}{n} AC \cdot DE \cdot EN \cdot HN}{HE^3} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}.$$

Ganz dieselben Ueberlegungen zeigen, daß in der andern Kugel der durch de beschriebene Ring auf h eine Attraction $= \frac{2\pi \cdot \frac{1}{n} ac \cdot de \cdot en \cdot hn}{he^3} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}$ nach der Richtung hb ausübt. Da nun
HC : AC = hc : ac, ferner DHC = dhc und
EHC = ehc, und folglich
EH : eh = DE : de = EN : en = HN : hn = AC : ac
ist, so kann man

$$de \cdot en \cdot hn = \frac{DE \cdot EN \cdot HN \cdot ac^3}{AC^3}$$

und $he^3 = \frac{HE^3 \cdot ac^3}{AC^3}$ setzen. Also die Anziehung des

durch de beschriebenen Kugelringes auf h läßt sich durch $2\pi \cdot \frac{1}{n} \cdot ac \cdot \frac{DE \cdot EN \cdot HN}{HE^3} \cdot \frac{G \cdot b^2}{a^3}$ ausdrücken, und verhält sich folglich zur Attraction des ähnlichen Kugelringes, welchen DE beschreibt, wie ac zu AC.

Offenbar findet diese Vergleichung statt, für jeden kleinen Kugelring, wenn nur seine Lage auf der einen und auf der andern Kugel eine ähnliche ist, und seine Dicke dem Halbmesser proportional genommen wird. Wenn aber für alle Theile der einen Kugel die Attraction auf H, sich zu der von allen ähnlich angenommenen Theilen der andern Kugel auf h ausgeübten Attraction, verhält, wie AC zu ac, so findet auch für die Attraction der ganzen Kugeln eben dieses Verhältniß statt. Puncte also H, h, die in Vergleichung gegen die Halbmesser der auf sie wirkenden Kugeln ähnlich liegend sind, oder für die HC : hc = AC : ac ist, leiden eine gegen den Mittelpunct jener Kugeln gerichtete Anziehung, die dem Halbmesser der Kugeln proportional ist.

§. 117. Ganz allgemein ist die von der Kugel AFBA auf H ausgeübte Attraction im Verhältniß ihrer Masse und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates des Abstandes HC, also durch $\frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot AC^3}{HC^2}$ ausgedrückt. Diese allgemeine Regel, die ich hier nicht umständlich beweisen will, giebt bei einem bestimmten Verhältnisse der HC gegen AC, z. B. HC = m . AC

$$\frac{G \cdot b^2}{a^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot AC}{m^2},$$ also in diesem bestimmten Falle die Attraction dem Halbmesser der Kugel proportional.

§. 118. Liegt der angezogene Punct in der Oberfläche der Kugel selbst, so ist HC = AC und folglich die

artigen Kugeln von ungleichem Halbmesser die At-
on, welche einen in der Oberfläche liegenden Punct
den Mittelpunct der Kugel treibt, dem Halbmesser
ugel proportional.

. 119. Lehrsatz. Wenn innerhalb einer Ku-
welche aus gleichartiger Materie besteht, sich ein
:r D (Fig. 138.) befindet, so wird dieser mit
Gewalt, die dem Abstande vom Mittelpuncte pro-
nal ist, gegen den Mittelpunct angezogen.

Beweis. Denkt man sich um den Mittelpunct
e Kugel-Oberfläche vom Halbmesser CD, so leidet
Punct D vermöge der sämmtlichen über ihm oder
nter als er vom Centro liegenden Kugelschichten
eine Attraction gegen den Mittelpunct, indem die
ung der einzelnen Theile jeder Schichte sich gegen-
aufhebt (§. 113.). Der Punct D leidet also nur
ttraction der Kugel vom Halbmesser CD, an de-
Oberfläche er sich befindet. Denken wir uns also
verschiedenen Entfernungen vom Mittelpuncte: so
. 116. 118.) die anziehende Kraft, die ihn gegen
Mittelpunct treibt, seinem Abstande vom Mittel-
e proportional.

. 120. Bemerkung. Wir sind gewohnt, die
were als eine unveränderliche Kraft, und ihre Ein-
ng auf gegebene Körper, als an allen Orten gleich,
ehen. Hier aber erhellt, daß wir bei größerer
herung zum Mittelpuncte der Erde, die Schwer-
als abnehmend anzusehen haben. Könnten wir
den Druck, welchen zum Beispiel ein Pfund Blei
er Oberfläche der Erde ausübt, mit demjenigen
ke vergleichen, den es in großen Tiefen unter der
ausübt, so würden wir den letztern geringer fin-
Um hier nur ein Beispiel zu geben, wie eine solche
leichung allenfalls möglich wäre, wollen wir uns

Q 2

eine elastische Feder denken, die durch das Gewicht von einem Pfunde bis auf einen bestimmten Grad zusammengedrückt würde, wenn wir den Versuch auf der Oberfläche der Erde anstellten; diese Feder wird von demselben Bleigewichte, das wir 1 Pfund nannten, nicht mehr ganz zu demselben Grade gespannt werden, wenn wir uns tief unter die Oberfläche der Erde begeben könnten. Und so würden wir es immer finden, wenn wir den durch die Schwerkraft bewirkten Druck desselben Körpers, mit Kräften vergleichen könnten, die wie die Federkraft überall dieselben bleiben.

§. 121. Nennen wir also die Attractionskraft, oder die Schwerkraft, so wie wir sie an der Oberfläche der Erde beobachten, $= G$, so wird sie, wenn der Erde Halbmesser $= r$ heißt, in der Entfernung $\frac{m}{n} . r$ vom Centro, wenn $\frac{m}{n} < 1$ ist, nur noch $= \frac{m}{n} . G$ sein, und ein Körper, der auf der Oberfläche der Erde 1 Pfund wöge, wird dort nur den Druck ausüben, den bei uns ein Gewicht von $\frac{m}{n}$ Pfund ausübt.

§. 122. Lehrsatz. Wenn keine andern Kräfte auf die einzelnen Theilchen des Erdkörpers, außer der Attraction aller Theilchen auf einander, wirken: so könnte das Gleichgewicht bestehen, wenn die Erde eine kugelförmige Wassermasse wäre.

Beweis. Ist die Erde eine Wasserkugel, so leidet jedes Wassertheilchen den Druck, den das Gewicht der über ihm stehenden Wassersäule hervorbringt. Wir könnten uns eine vom Mittelpuncte bis an die Oberfläche gehende Röhre Cab (Fig. 140.) denken, in welcher das Wasser von dem übrigen Wasser der Kugel abgesondert wäre. Da in dieser Röhre das Theilchen abcd gegen C

herabgezogen wird, so drückt es mit seinem ganzen Gewichte auf cd; das der Entfernung vom Centro angemessene Gewicht des Theilchens cdef verbindet sich hiermit, und die Summe beider giebt den Druck auf ef und so weiter. Denken wir uns nun ein andres gegen den Mittelpunct zu gerichtetes Röhrchen ghik und eine Verbindungsröhre ek, die ein Stück eines Kreises um den Mittelpunct C ist, so übet das Wasser in ghki offenbar eben den Druck wie in abde aus, und das Wasser in der Verbindungsröhre wird von beiden Enden her gleich gedrückt, folglich bleibt die Wassermasse abekhg in Ruhe.

So läßt sich für alle Puncte der kugelförmigen Wassermasse zeigen, daß das Gleichgewicht statt findet, wenn keine andern Kräfte als die Attraction aller Theile auf jeden Punct der Masse wirken.

§. 123. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, den irgend ein Punct innerhalb der Wasserkugel leidet, wenn jedes Theilchen bloß durch die Attractionskraft aller Theilchen gegen den Mittelpunct getrieben wird.

Auflösung. Es sei $= G$ das Gewicht eines Cubicfußes Wasser an der Oberfläche, R der Halbmesser der Kugel, so wird in der Entfernung $= x$ vom Centro der Cubicfuß Wasser nur noch $\frac{x \cdot G}{R}$ wiegen.

Stellt man sich die Wassersäule Cab in n gleiche Theile getheilt, und die Röhre als überall gleich weit vor, so beträgt das Gewicht des oberen Theilchens, dessen Inhalt wir durch die Höhe $= \frac{1}{n}$ R darstellen,

weniger als $\frac{1}{n}$ G. R, und mehr als $\frac{1}{n} \cdot R \cdot \frac{n-1}{n} G$,

indem seine entferntesten Puncte sich in dem Abstande $= R$, seine dem Centro nächsten Puncte sich in dem Abstande $= \frac{n - 1}{n} R$ vom Centro befinden. Des zweiten Theilchens Gewicht ist

kleiner als $\frac{n-1}{n^2} RG$, größer als $\frac{n-2}{n^2} RG$,

das dritte Gewicht

kleiner als $\frac{n-2}{n^2} RG$, größer als $\frac{n-3}{n^2} RG$.

Wollen wir also den Druck bestimmen, welchen das Theilchen leidet, welches $= \frac{m}{n} R$ vom Centro entfernt ist, oder das, welches von der Oberfläche an das $(n - m)$te heißen würde: so ist dieser Druck kleiner als

$$\frac{RG}{n^2}(n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + + (m+1))$$

und größer als

$$\frac{RG}{n^2}((n-1) + (n-2) + + + m).$$

Hieraus ließe sich der Druck bestimmen, den jedes Theilchen leidet. Ist $m = 0$ oder verlangt man den Druck für das im Mittelpuncte selbst liegende Theilchen, so ist dieser kleiner als

$$\frac{RG}{n^2}(n + (n-1) + (n-2) + + + + 1)$$

und größer als

$$\frac{RG}{n^2}((n-1) + (n-2) + (n-3) + + + 1)$$

also kleiner als $\frac{R.G.(n+1).n}{2.n^2}$,

und größer als $\frac{RG}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$;

er muß also $= \frac{1}{2} R.G$ sein, oder halb so groß, als er

in würde, wenn die Säule von der Höhe $= R$ überall
lit der Kraft $= G$ zum Mittelpuncte hin gezogen
ürde.

§. 124. Die Summirung der allgemeinen Reihen
. 123. gäbe in der Entfernung $= \frac{m}{n} R$ vom Mittel-

uncte den Druck kleiner als $\frac{RG}{n^2} \frac{(n+m+1)(n-m)}{2}$.

und größer als $\frac{RG}{n^2} \frac{(n+m-1)(n-m)}{2}$

also $= \frac{RG(n^2-m^2)}{2n^2}$; also z. B.

der Entfernung $= \frac{7}{8} R$, Druck $= \frac{15}{128} . R . G$,
der Entfernung $= \frac{3}{4} R$, Druck $= \frac{28}{128} . R . G$,
der Entfernung $= \frac{5}{8} R$, Druck $= \frac{39}{128} . R . G$,
der Entfernung $= \frac{1}{2} R$, Druck $= \frac{48}{128} . R . G$,
der Entfernung $= \frac{3}{8} R$, Druck $= \frac{55}{128} . R . G$,
der Entfernung $= \frac{1}{4} R$, Druck $= \frac{60}{128} . R . G$,
der Entfernung $= \frac{1}{8} R$, Druck $= \frac{63}{128} . R . G$,
der Entfernung $= 0 . R$, Druck $= \frac{1}{2} . R . G$.

§. 125. Bemerkung. Die Erde dreht sich um
re Axe, dadurch entsteht, wie die Mechanik lehrt, eine
Schwungkraft oder für die Theilchen, die nicht in der
Axe liegen, ein Bestreben, sich von der Axe zu entfer-
en, welches ihrem Abstande von der Axe proportional
t. Jedes Theilchen in der Axe wird also eben so wie
n Zustande der Ruhe gegen den Mittelpunct getrieben;
des von der Axe entfernte Theilchen aber wird durch
vei Kräfte getrieben, durch die Attraction gegen den
Mittelpunct, und durch die Schwungkraft senkrecht von
er Axe abwärts.

§. 126. Die Schwungkraft ist dem Abstande von
er Axe proportional, also an der Oberfläche der Erde
m Aequator am größesten. Nehmen wir an, daß dort

die Schwerkraft $= G$, die Schwungkraft $= \frac{1}{f} G$ sei, in der Entfernung $= R$ vom Mittelpuncte, so ist in andern Puncten in der Entfernung $= x$ von der Axe die Schwungkraft $= \frac{1}{f} \cdot \frac{x}{R} \cdot G$.

§. 127. Bemerkung. Die Erde behält nicht mehr die Kugelgestalt, wenn sie sich um ihre Axe dreht, sondern die Oberfläche entfernt sich am Aequator mehr vom Centro als sie am Pole davon entfernt ist; wir dürfen also eigentlich die anziehende Kraft am Pole an der Erd-Oberfläche nicht gleich derjenigen setzen, welche an der Oberfläche um den Aequator statt findet. Um indeß nur ohngefehr die Erscheinungen zu übersehen, wird in dem folgenden Lehrsatze auf diesen Umstand keine Rücksicht genommen.

§. 128. Lehrsatz. Wenn die Erde sich um ihre Axe dreht, so muß sie, wofern sie ein gleichartiger beinahe kugelförmiger Wasserkörper ist, einen erheblich größern Aequatoreal-Durchmesser haben, als ihre Axe ist.

Beweis. aC sei (Fig. 140.) eine in der Axe der Erde liegende Röhre, deren Wasser in freier Verbindung mit der, am Mittelpuncte mit ihr vereinigten, im Aequator liegenden Röhre Ce steht. In der Entfernung $= x$ vom Mittelpuncte wird ein Wassertheilchen in der Axe mit der Attractionskraft $= \frac{x}{R} G$ gegen den Mittelpunct getrieben, und wenn die halbe Axe $= r$ ist, so wird der im Mittelpuncte der Erde liegende Punct C der Röhre aC, den Druck $= \frac{1}{2} r \cdot G$ leiden, wenn die halbe Axe $= r$, und die Attraction an der Oberfläche $= G$ ist (§. 123.).

In der Entfernung $= x$ vom Mittelpuncte wird ein

m Aequator liegendes Theilchen von der Schwere und Schwungkraft mit der Gewalt $= \frac{x}{R} G - \frac{x}{R} \cdot \frac{1}{f} G$ gegen den Mittelpunct getrieben. Erreicht also die Wassersäule CE hier die Höhe $= R$, so übt diese auf den Mittelpunct einen Druck $= \frac{1}{2} R \cdot \left(1 - \frac{1}{f}\right) G$ aus.

Der Druck muß von beiden Röhren her im Centro gleich sein und es ist daher ohngefehr

$$r = \left(1 - \frac{1}{f}\right) R.$$

Eine ähnliche Vergrößerung des Aequatoreal-Halbmessers wird offenbar in der sich drehenden Wasserkugel att finden, wenn auch keine Röhren das Wasser zusammenhalten, und folglich wird die Erde, ihrer Umdrehung wegen, eine abgeplattete Kugel.

§. 129. Aus der Schnelligkeit der Umdrehung der Erde ergiebt sich $\frac{1}{f}$ ohngefehr $= \frac{1}{290}$, darnach würde lso die Erd-Axe $= \frac{289}{290}$ des Aequatoreal-Durchmessers. Aber diese Rechnung bedarf noch einiger Verbesserung. Es ist nämlich, wie ich schon bemerkt habe, icht richtig, daß G an der Oberfläche der Erde am Pole ben das bedeutet, wie am Aequator; denn wenn wir ns eine kugelähnliche aber abgeplattete feste Masse denn, so übt diese auf die am Pole in der Entfernung $= r$ vom Mittelpuncte liegenden Puncte eine größere ttractionskraft aus, als auf die in der größern Entfernung $= R$ liegenden Puncte. Nenne ich also die Attractionskraft des ruhenden abgeplatteten Sphäroids am ole $= g$, am Aequator $= G$, so ist eigentlich $\frac{1}{2} r \cdot g = \frac{1}{2} R \cdot \left(1 - \frac{1}{f}\right) G$, und g ist größer als G, also

$rg = RG\left(1 - \frac{1}{f}\right)$ und folglich r kleiner als

$$R\left(1 - \frac{1}{f}\right).$$

Eine genauere Rechnung zeigt, daß r ohngefehr $= \frac{229}{230}$ R seyn müßte, wenn die Erde überall gleich dicht wäre, wie wir es hier annehmen.

§. 130. Aehnliche Betrachtungen ließen sich nun auch anstellen, um zu finden, wie weit das Wasser bei g oder in andern Puncten sich vom Mittelpuncte entfernen wird, um das Gleichgewicht herzustellen. Aber um diese Betrachtung vollständig anzustellen, müßte man wissen, wie ein abgeplatteter, beinahe kugelförmiger Körper vermöge seiner Attractionskraft wirkt, welches sich hier nicht wohl erklären läßt. Einige, nicht so gar schwere Untersuchungen hierüber habe ich in meiner Uebersetzung von Eulers Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper mitgetheilt.

Achter Abschnitt.

Vom Drucke der Erde gegen Mauern.

§. 131. **Bemerkung.** Lockere Erde ist zwar kein flüssiger Körper; aber in manchen Beziehungen stimmt sie doch fast mehr mit diesen, als mit festen Körpern überein. Das Zerfließen flüssiger Körper, die durch ein Gefäß zusammen gehalten werden, finden wir bei trockenem Sande als ein Herabrollen oder ein Abflächen wieder, und obgleich dieser schon zur Ruhe kömmt, wenn seine Oberfläche unter einem Winkel von 30 Graden oder 50 Graden geneigt ist, statt daß das Wasser eine horizontale Oberfläche fordert, so ist doch jenes Herabgleiten der Sandkörnchen über einander, mit dem völligen Zerfließen flüssiger Körper sehr wohl zu vergleichen.

§. 132. Es würde keine geringe Schwierigkeit haben, die Gesetze des Gleichgewichts dieser, gleichsam halbflüssigen Körper für alle Fälle genau anzugeben. Auch hier findet allerdings, wie bei Wasser, eine Fortpflanzung des Druckes nach allen Seiten statt; aber keinesweges eine nach allen Seiten gleiche Fortpflanzung des Druckes. Wie sich ein in Fig. 100. auf EF wirkender Druck auf die Wand bei B, B äußern würde, wenn das Gefäß mit trockenem Sande gefüllt wäre, läßt sich nicht wohl bestimmen, und wir würden zu dieser Bestimmung wenigstens noch einer auf Erfahrung gestützten

Regel bedürfen, wie der Druck von der Richtung der Kraft gegen diejenige Richtung, nach welcher der Druck statt finden soll, und wie er von der Menge der zwischen liegenden Sandtheilchen abhänge u. s. w.

§. 133. Erfahrung. Jede bestimmte Art von Sand, trockener Erde oder ähnlichen Körpern lagert sich, freiliegend aufgeschüttet, unter einem bestimmten Winkel. Daher legt sich aufgehäufter Sand in einen ohngefehr conisch geformten Haufen.

§. 134. Dieser Winkel giebt uns ein Maaß für die Reibung, welche die Sandkörnchen leiden, indem sie über den unter ihnen liegenden herabrollen, denn es ist offenbar (Statik §. 178.), daß der Reibungscoefficient = tang β ist, wenn β jenen Winkel bedeutet, unter welchem, gegen den Horizont geneigt, sich die Sandmasse abflächt.

§. 135. Bemerkung. Denken wir uns nun eine Sandmasse (Fig. 141.) ABCD, die sich gegen die Mauer AB stützt, so hat jene ein Bestreben, abzusinken, und drückt deshalb gegen die Mauer. Stellt DBC den Winkel = β vor, unter welchem der Sand ruhen würde, wenn keine Wand da wäre, so ist es allerdings das ganze Prisma ABD, welches sich gegen die Wand drängt; aber wir dürfen dieses nicht als einen festen, gegen AB zu auf der Ebne BD herabgleitenden Körper ansehen; denn dieser würde wegen der Reibung ruhen, wenn DBC = β ist. Jede Schichte dieses Prisma's strebt über die andre sich wegzuschieben, und der Keil ABE zum Beispiel übt mehr Druck auf AB aus, als der Keil ABD, wenn man nämlich beide als feste Massen betrachtet, ausüben würde. Man kann nun untersuchen, unter welchem Winkel ABE = φ man die Linie BE ziehen muß, damit eine feste keilförmige Masse ABE, auf der Ebne EB herabgleitend, den größten

und man ist wohl berechtiget, dieses als den wahren Druck anzusehen, den die Mauer AB leidet.

Für $\beta = 45^\circ$ wird dieser Druck

$$= \frac{1}{2} h^2 - h^2 (0{,}41423)$$

und ist immer desto größer, je kleiner β ist.

§. 137. Wenn Q kleiner als

$$\frac{1}{2} h^2 - h^2 . \tan\beta (\sec\beta - \tan\beta)$$ ist,

so erhält φ mögliche Werthe; fällt der Werth von Q zwischen $\frac{1}{2} h^2 - h^2 . \tan\beta (\sec\beta - \tan\beta)$

und $\frac{1}{2} h^2 + h^2 . \tan\beta (\sec\beta + \tan\beta)$,

so ist φ unmöglich. Für noch größere Werthe kommen zwar anscheinend mögliche Werthe für φ heraus, aber da sie tang φ negativ, oder φ als einen stumpfen Winkel angeben, so sind sie offenbar unbrauchbar.

§. 138. Ich wage es nicht, hier weitere Folgerungen aus diesen Schlüssen abzuleiten. Sehr zweckmäßige Versuche über den Druck der Erde hat Hr. Woltman in seinen Beiträgen zur hydraulischen Architectur 3. und 4. Band bekannt gemacht, und die Theorie dieses Gegenstandes vollständiger behandelt. Auf diese muß ich hier, wo größere Umständlichkeit zweckwidrig sein würde, verweisen.

---

allgemein

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{2} h^2 - Q}{h^2 . \tan \beta} \pm \sqrt{\left(\frac{(\frac{1}{2} h^2 - Q)^2}{h^4 . \tan^2 \beta} - \frac{2Q}{h^2}\right)}$$

der irrationale Theil dieses Ausdrucks giebt entwickelt

$$\sqrt{\left(\frac{Q^2 - Q(h^2 + 2h^2 . \tan^2 \beta) + \frac{1}{4} h^4}{h^4 . \tan^2 \beta}\right)}$$

und er würde unmöglich werden, sobald

$$Q^2 + \frac{1}{4} h^4 < Q (h^2 + 2h^2 . \tan^2 \beta) \text{ wäre.}$$

Es ist daher der durch

$$Q^2 - Q (h^2 + 2h^2 . \tan^2 \beta) + \frac{1}{4} h^4 = 0,$$

ausgedrückte Werth von Q der äußerste, den Q erreichen kann; oder, wenn man diese quadratische Gleichung auflöst, so ergiebt sich

$$Q = \frac{1}{2} h^2 + h^2 . \tan^2 \beta \pm \sqrt{(h^4 . \tan^4 \beta + h^4 . \tan^2 \beta)}$$

oder $Q = \frac{1}{2} h^2 + h^2 . \tan^2 \beta \pm h^2 . \tan \beta . \text{Sec} \beta$

(da $\sqrt{(1 + \tan^2 \beta)} = \text{Sec} \beta$ ist)

als der äußerste Werth, den Q erreichen kann, da ein über diese Grenze hinaus liegender Werth ein unmögliches φ gäbe.

Bei diesem Werthe von Q wird

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{2} h^2 - Q}{h^2 . \tan \beta},$$ weil der vorhin noch beigefügte irrationale Theil jetzt verschwindet. Es ist also, wenn man für Q jenen Werth setzt

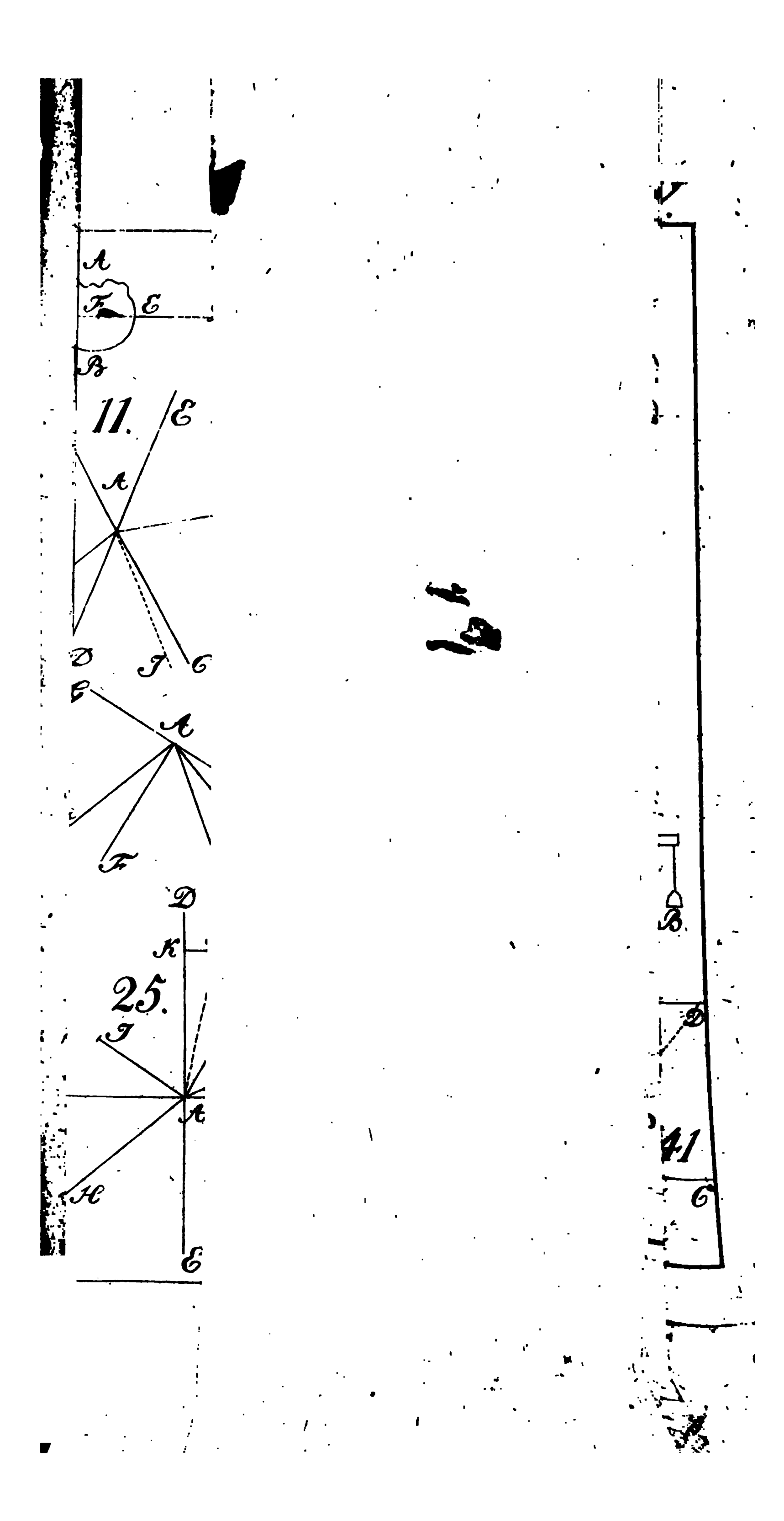
$$\tan \varphi = - \tan \beta \mp \text{Sec} \beta,$$

und hier offenbart sich, daß man nur das untere Zeichen gebrauchen darf, und $\tan \varphi = \text{Sec} \beta - \tan \beta$ setzen muß, indem $\tan \varphi$ gewiß nicht negativ werden kann.

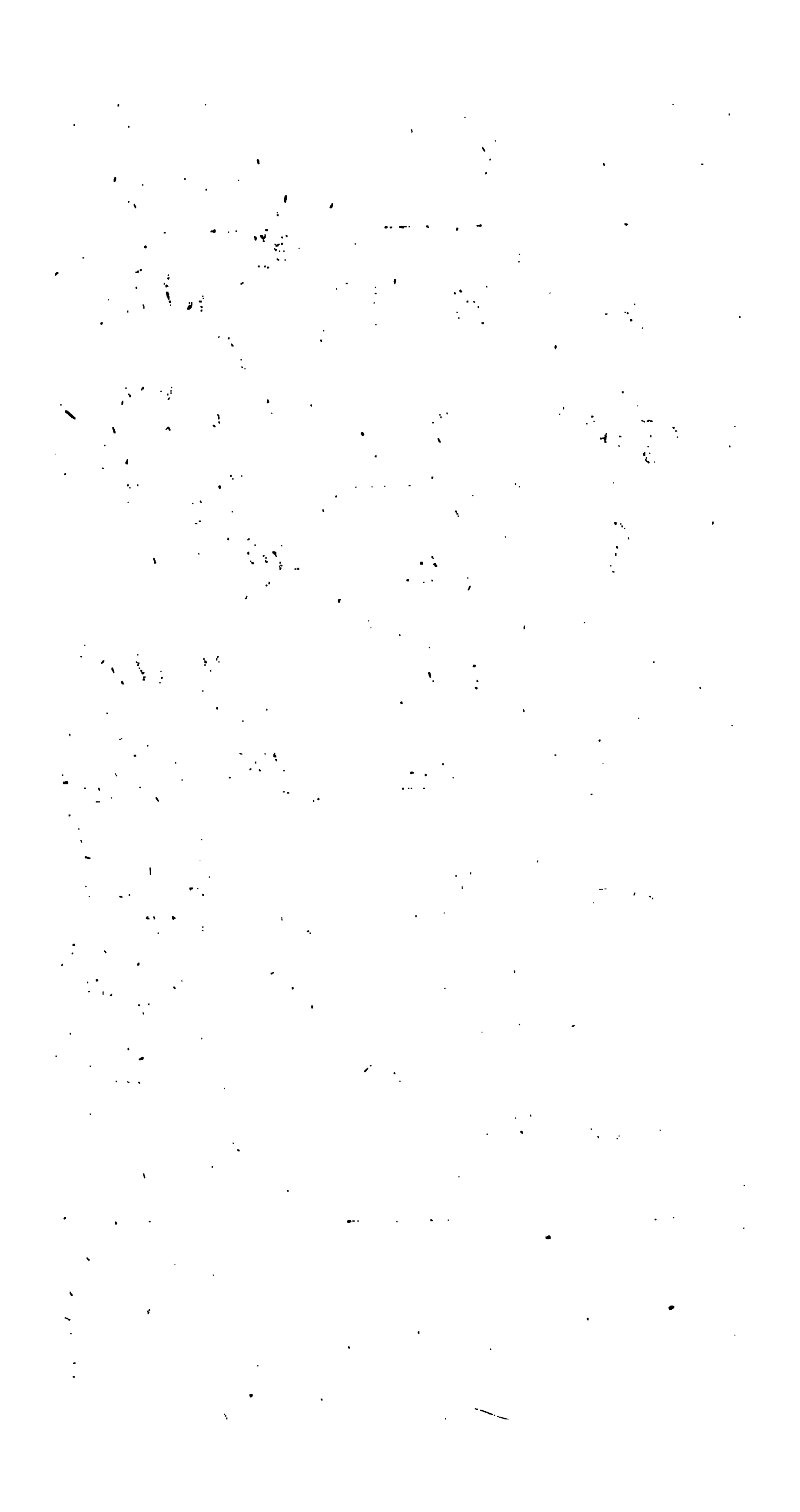
Der größeste Druck, den solche gegen die feste Wand herabgleitende Prismen ausüben würden, ist also

$$Q = \frac{1}{2} h^2 + h^2 . \tan \beta . (\tan \beta - \text{Sec} \beta),$$

oder $Q = \frac{1}{2} h^2 - h^2 . \tan \beta (\text{Sec} \beta - \tan \beta),$



A
F
E
B
11.
E
A
D
I
C
C
A
F
D
K
25.
I
A
H
E
V.
B
D
41
C



Lehrbuch

der

Gesetze des Gleichgewichts

und

der Bewegung

fester und flüssiger Körper

von

H. W. Brandes,
Professor an der Universität in Breslau.



Zweiter Theil.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Vorrede.

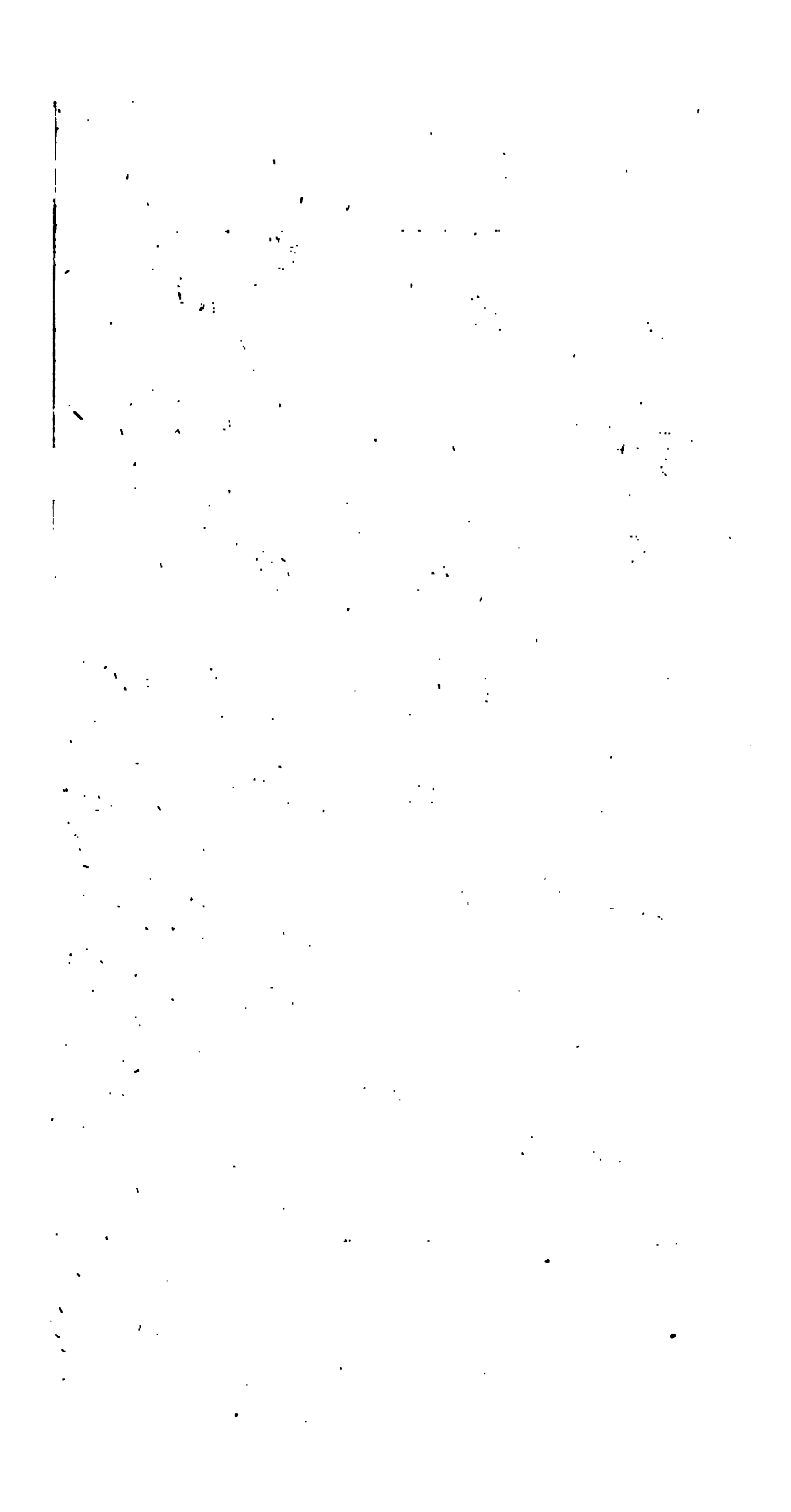
Obgleich ich schon in der Vorrede zum ersten Theile den Zweck angezeigt habe, den ich mir bei der Ausarbeitung dieses Buches vorsetzte: so ist es doch wohl nicht überflüssig, auch hier noch einige Erörterungen hierüber mitzutheilen.

Daß ich den mit wenigen Vorkenntnissen ausgerüsteten Lesern ein ihnen völlig verständliches Buch, das zugleich über die meisten und wichtigsten Lehren der Mechanik gründlichen Aufschluß gäbe, in die Hände zu geben wünschte, habe ich schon in jener Vorrede gesagt. Ich wünsche aber nicht so verstanden zu werden, als wollte ich dadurch, daß ich eine möglichst vollständige Mechanik ohne höhere Analysis zu lehren versuche, diesen höheren Kenntnissen ihren Werth absprechen, oder als hegte ich den kühnen Gedanken, mein Buch könne für irgend eine Classe von Lesern die Anwendung der Analysis ganz entbehrlich machen. Wie weit ich hievon entfernt sein, habe ich an mehreren Stellen des Buches wohl deutlich genug gesagt, indem ich ausdrücklich aufmerksam darauf mache, wie oft die hier angestellten Betrachtungen zwar wohl zu Beantwortung der wichtigsten vorkommenden Fragen leiten, aber uns doch das eigentliche Gesetz nicht erkennen lassen, nach welchem die einzelnen Größen von einander abhängen, und so uns über das Wesentlichste nicht beleh-

ren. Jenen Vorwurf, daß ich die Nothwendigkeit der Analysis zweifelhaft machen wolle, habe ich also wohl nicht zu fürchten; aber vielleicht kann man mir dagegen einen andern Vorwurf machen, daß nämlich mein Buch alle Zwecke nur halb erfülle, indem es zu einer ersten populären Uebersicht der Mechanik schon zu gelehrt sei, und dennoch auch den Leser, der gern ganz in die Tiefe der Wissenschaft eindringen will, unbefriedigt lasse. Ich will diesen Vorwurf nicht dadurch abzuweisen suchen, daß ich an die zahlreiche Classe von Lesern erinnere, die grade auf dem Standpuncte stehen, welchen mein Buch voraussetzt, die nämlich Belehrung über alle Gegenstände der Mechanik bedürfen, ohne die erforderlichen Vorkenntnisse aus der höhern Analysis zu besitzen; sondern ich will meine aus der Natur der Sache hergenommene Ansicht mittheilen, die, wie mich dünkt, einen Grund angiebt, warum jeder Lehrling der Mechanik, wäre er auch mit den besten analytischen Vorkenntnissen ausgestattet, wohlthut, sein Studium mit einem elementarischen Buche anzufangen. Es ist bekannt, wie oft die geschickte Anwendung der Analysis, vorzüglich der Integralrechnung, uns auf einmal zu den Formeln führt, welche die Beantwortung aller Fragen enthalten, wie aber auch sehr oft durch diesen glücklichen Sprung der natürliche Zusammenhang der Formel mit der Sache selbst uns ganz unbemerkt bleibt. Wenn wir also gleich der höheren Rechnungen nothwendig bedürfen, um immer tiefer in die schwierigen Theile der Wissenschaft einzudringen, wenn wir gleich ihrer nicht entbehren können, wenn wir neue Forschungen anstellen wollen, und selbst schon, wenn

wir den wahren Zusammenhang aller Erscheinungen in einem leichten Gesetze darstellen wollen: so ist es doch sehr nöthig, daß wir im Anfange unserer Forschungen uns jedes Schrittes deutlich bewußt werden, daß wir uns klar vorstellen, was uns zur Erreichung des Zieles führen soll und geführt hat, und uns üben, die in der Natur der Sache liegenden Umstände so zu erwägen, daß aus ihnen auch die entferntern Erfolge erkannt, und, wo möglich, die Gesetze, von denen sie abhängen, aufgefunden werden. Zu diesem Zwecke nun scheint mir für den Anfänger ein solches Buch sehr nützlich, welches, wie ich es hier zu leisten gesucht habe, an die leichtesten Lehren der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie die Lehrsätze der Mechanik anknüpft, das alle diese Lehrsätze in klaren Worten ausspricht und sich sogar nicht scheuet, oft die Sprache der Ungelehrten zu reden, um selbst da, wo sich bis zu den einfachen Hauptgesetzen nicht durchdringen läßt, doch die Betrachtungen vollständig anzudeuten, die man anstellen muß, um zu Resultaten zu gelangen.

Wenn man so den ganzen Zusammenhang der Erscheinungen übersehen, wenn man die Gesetze ihrer gegenseitigen Abhängigkeit aufgesucht hat: so entsteht fast von selbst das Bedürfniß, mit Hülfe vollkommnerer Vorkenntnisse auch in Rechnungsformeln die Resultate auf die leichteste Weise darzustellen; und wer mit den Principien der Differentialrechnung bekannt ist, fängt von selbst schon an zu bemerken, wie nützlich ihm die Anwendung derselben hier werden könnte. Um nun hier den Leser bei der ersten Anwendung der Analysis auf den rechten Weg zu leiten, um ihm an einigen Beispielen zu zeigen,



Lehrbuch

der

Gesetze des Gleichgewichts

und

der Bewegung

fester und flüssiger Körper

von

H. W. Brandes,
Professor an der Universität in Breslau.

Zweiter Theil.

Mit 5 Kupfertafeln.

Leipzig,
bei Paul Gotthelf Kummer.
1818.

zu bemerken, daß mir hier Eulers Vortrag in den von mir übersetzten Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper (übersetzt mit Zusätzen von Brandes. Leipzig, 1806.) viele Vorzüge zu haben scheint, indem er mit Voraussetzung eben der Kenntnisse, die auch Poisson voraussetzt, den Leser viel vollständiger über alles belehrt, was unsre theoretische Hydraulik lehren kann. Für Leser von geringern Kenntnissen sind:

Bossut traité d'hydrodynamique (übers. von Langsdorf. Frankfurth, 1791.),
Eytelweins Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. (Berlin, 1801.),
Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik (Altenburg, 1794.),

sehr zu empfehlen. — Mehrere Bücher hier anzuführen, ist unnöthig, da meine Absicht nur ist, das zu bemerken, was sich als nächste Fortsetzung des Unterrichtes etwa an dieses Buch anknüpfen läßt.

Ueber die von mir befolgte Anordnung und Darstellung der einzelnen Materien in diesem Lehrbuche sage ich nichts, da, wie ich hoffe, fast überall die Gründe, warum ich so geordnet und so dargestellt habe, sich von selbst ergeben, auch bei vielen schwierigen Lehren der eigenthümliche Gang meiner Behandlung jedem Sachkundigen bemerklich werden wird, und hoffentlich den Fleiß, den ich auf jeden Gegenstand gewendet habe, bezeugen wird.

Breslau, am 18. März 1818.

H. W. Brandes.

Vorrede.

Obgleich ich schon in der Vorrede zum ersten Theile den Zweck angezeigt habe, den ich mir bei der Ausarbeitung dieses Buches vorsetzte: so ist es doch wohl nicht überflüssig, auch hier noch einige Erörterungen hierüber mitzutheilen.

Daß ich den mit wenigen Vorkenntnissen ausgerüsteten Lesern ein ihnen völlig verständliches Buch, das zugleich über die meisten und wichtigsten Lehren der Mechanik gründlichen Aufschluß gäbe, in die Hände zu geben wünschte, habe ich schon in jener Vorrede gesagt. Ich wünsche aber nicht so verstanden zu werden, als wollte ich dadurch, daß ich eine möglichst vollständige Mechanik ohne höhere Analysis zu lehren versuche, diesen höheren Kenntnissen ihren Werth absprechen, oder als hegte ich den kühnen Gedanken, mein Buch könne für irgend eine Klasse von Lesern die Anwendung der Analysis ganz entbehrlich machen. Wie weit ich hievon entfernt bin, habe ich an mehreren Stellen des Buches wohl deutlich genug gesagt, indem ich ausdrücklich aufmerksam darauf mache, wie oft die hier angestellten Betrachtungen zwar wohl zu Beantwortung der wichtigsten vorkommenden Fragen leiten, aber uns doch das eigentliche Gesetz nicht erkennen lassen, nach welchem die einzelnen Größen von einander abhängen, und so uns über das Wesentlichste nicht beleh-

12. Abschnitt.

13. Abschnitt.

14. Abschnitt.

15. Abschnitt.

16. Abschnitt.

17. Abschnitt.

18. Abschnitt.

...ste Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

1. Abschnitt.

2. Abschnitt.

3. Abschnitt.

4. Abschnitt.

5. Abschnitt.

6. Abschnitt.

7. Abschnitt.

Die Gesetze der Bewegung fester Körper.

Erster Abschnitt.

Von der Bewegung im Allgemeinen, und von der gleichförmigen Bewegung insbesondere.

§. 1. Bemerkung. Wenn ein Körper sich bewegt, so können entweder alle einzelne Puncte des Körpers nach parallelen Richtungen fortgehen, oder es ist mit dem Fortrücken des ganzen Körpers zugleich eine Drehung desselben, die sehr mannigfaltig verschieden sein kann, verbunden. Um diese zusammengesetztern Bewegungen zuerst ganz von unserer Betrachtung auszuschließen, beschränken wir unsre Untersuchung auf die Bewegung eines einzelnen Punctes.

Die Bewegung eines Punctes kann entweder mit immer gleicher Geschwindigkeit geschehen, oder sie kann ungleichförmig sein; der Punct kann entweder in grader oder in krummer Linie fortgehen; sein Weg kann entweder ganz frei sein, so daß der Punct den auf ihn wirkenden Kräften ohne Hinderniß folget, oder der bewegte Punct kann sich an der Oberfläche eines festen Körpers befinden, so daß er nicht nach allen Richtungen frei dem Eindrucke der auf ihn wirkenden Kräfte folgen kann.

§. 2. Bemerkung. Um die Bewegung eines Punctes genau zu kennen, muß in jedem Augenblicke seine

Lage und seine Geschwindigkeit bekannt sein. Seine Lage wird bestimmt, indem man sie in Beziehung auf eine bekannte Ebne und eine darin als bekannt angenommene grade Linie betrachtet. Man thut dies am besten nach Anleitung der einen oder der andern von folgenden zwei Methoden.

Erste Bestimmungsweise. Es sei (Fig. 1.) E der Punct, dessen Lage man angeben will: so zieht man von ihm auf die bekannte Ebne FGHI das Perpendikel ED, welches die Ebne in D schneidet. Ist nun in dieser Ebne die Linie AB in bekannter Lage gezogen und A ein bekannter Punct in ihr: so zieht man aus D, DC auf AB senkrecht. Wenn man jetzt AC und DC kennt, so ist des Punctes D Lage in der Ebne FGHI völlig bekannt. Senkrecht über diesem Puncte D befindet sich der zu bestimmende Punct E in dem Abstande = DE, und man sagt nun, daß die Lage von E durch drei auf einander senkrechte Coordinaten AC, CD, DE bestimmt sei, indem die eine DE seinen senkrechten Abstand von der Ebne FGHI, die man wohl die Abscissen-Ebne nennt, angiebt, die andre DC angiebt, wie weit die Senkrechte ED von der Abscissenlinie AB entfernt ist, und die dritte, die man auch die Abscisse auf AB nennt, den Punct C bestimmt, neben welchem D und E liegen.

Zweite Bestimmungsweise. Man denkt sich wieder (Fig. 2.) eine bekannte Ebne FGHI und in ihr einen Punct A, in Beziehung auf welchen die Lage des Punctes E soll bestimmt werden. Legt man nun durch EA eine auf FGHI senkrechte Ebne EAC, welche jene in AC schneidet: so ist die Lage von E völlig bestimmt, wenn man erstlich weiß, wie groß die Entfernung AE ist, zweitens unter welchem Winkel = EAC die Linie AE gegen die Ebne FGHI geneigt ist, und drittens, welchen Winkel = CAB die Durchschnittslinie AC der Ebnen EAC und FGHI mit einer in der letztern Ebne gegebenen Linie AB macht.

Die Gesetze der Bewegung fester Körper.

Erster Abschnitt.

Von der Bewegung im Allgemeinen, und von der gleichförmigen Bewegung insbesondere.

§. 1. **Bemerkung.** Wenn ein Körper sich bewegt, so können entweder alle einzelne Puncte des Körpers nach parallelen Richtungen fortgehen, oder es ist mit dem Fortrücken des ganzen Körpers zugleich eine Drehung desselben, die sehr mannigfaltig verschieden sein kann, verbunden. Um diese zusammengesetztern Bewegungen zuerst ganz von unserer Betrachtung auszuschließen, beschränken wir unsre Untersuchung auf die Bewegung eines einzelnen Punctes.

Die Bewegung eines Punctes kann entweder mit immer gleicher Geschwindigkeit geschehen, oder sie kann ungleichförmig sein; der Punct kann entweder in grader oder in krummer Linie fortgehen; sein Weg kann entweder ganz frei sein, so daß der Punct den auf ihn wirkenden Kräften ohne Hinderniß folget, oder der bewegte Punct kann sich an der Oberfläche eines festen Körpers befinden, so daß er nicht nach allen Richtungen frei dem Eindrucke der auf ihn wirkenden Kräfte folgen kann.

§. 2. **Bemerkung.** Um die Bewegung eines Punctes genau zu kennen, muß in jedem Augenblicke seine

Zusatz für den geübteren Leser.

Die Betrachtung der gleichförmigen Bewegung ist so einfach, daß man der Differential-Rechnung nicht dabei bedarf. Um indeß die in der Folge vorkommenden Anwendungen der Differential-Rechnung zu erleichtern und darauf vorzubereiten, theile ich hier die Darstellung so mit, wie sie den Bezeichnungen der Differential-Rechnung gemäß ist.

Heißt der in der ganzen Zeit $= t$ durchlaufene Weg $= s$, so wächst dieser um ds, indem die Zeit um dt zunimmt. Bei gleichförmiger Bewegung wird in der Zeit $= dt$ mit der Geschwindigkeit $= c$, der Weg $ds = cdt$ durchlaufen, woraus durch Integration die Formel $s = c \cdot t$ folgt. Eigentlich $s = c \cdot t + Const$, wenn nämlich der durchlaufene Weg nicht von dem Puncte an gerechnet wird, wo der Körper sich im Anfange der Zeit t befand. Rechnete ich zum Beispiel in Fig. 3. den Raum $= s$ von A an; der Körper wäre aber für $t = o$ in B gewesen und nach D zu gegangen, so daß er nach Verlauf der Zeit $= t$ in D ankam: so ist $BD = c \cdot t$, aber s, welches von A an sollte gerechnet werden, ist $= AB + c \cdot t$, weil s schon $= AB$ war, für $t = o$. Die bei der Integration unbestimmt hinzukommende beständige Größe wird also hier dadurch bestimmt, daß man für $Const = AB$ den Werth setzt, den s hatte, als $t = o$ war. Soll s von B an gerechnet werden, so ist $Const = o$. Die Geschwindigkeit ist nun aber nicht $= \frac{s}{t}$, wenn s aus einem nicht in der Zeit t durchlaufenen Stücke, und einem von t abhängigen Stücke besteht. Allemal ist die Geschwindigkeit $= \frac{ds}{dt}$; und da $\frac{ds}{dt} = \frac{c \cdot dt}{dt} = c$, unveränderlich bleibt, so ist hier $dc = o$, oder $\frac{d^2s}{dt} = o$, woraus umgekehrt $\frac{ds}{dt} = Const$, oder die Zunahme des Weges als der Zunahme der Zeit proportional folgen würde, wenn man nach einer Bewegung gefragt hätte, für welche $\frac{d^2s}{dt} = o$ sei.

§. 7. **Aufgabe.** Wenn ein Punct sich in grader Linie gleichförmig fortbewegt, den Ort zu bestimmen, wo er sich in jedem Zeitpuncte befindet.

Auflösung. Damit dieses geschehen könne, muß

die Lage der Linie, auf welcher es fortgeht, und des Körpers Lage in einem gewissen Zeitpuncte gegeben sein.

Erster Fall. Wenn die Lage des bewegten Punctes bezogen wird auf eine Linie, die mit dem von ihm durchlaufenen Wege in derselben Ebne liegt. (Fig. 3.)

Es sei AD die bekannte Linie, auf welcher die Entfernungen von dem Anfangspuncte A an gerechnet werden; der gradlinigte Weg CE des Körpers = α gegen AD geneigt. Wenn nun bekannt ist, daß beim Anfange der Bewegung der bewegte Punct sich in C, in der Entfernung BC = b von der Linie AD befand, und daß AB = a, damals den Abstand des von C auf AD gesetzten Perpendikels von dem bekannten Punkte A angab: so ist, wenn der bewegte Punct in der Zeit = t den Weg = c . t = CE durchläuft, am Ende der Zeit = t, sein Abstand von AD,

$$= ED = b + c . t . \mathrm{Sin}\,\alpha,$$

und des Punctes D, neben welchem er sich befindet, Abstand von A, = AD = a + c . t . Cos α.

Zweiter Fall. Wenn die grade Linie CE, auf welcher der bewegte Punct fortrückt, nicht in der Ebne FGHI (Fig. 4.) liegt, in welcher sich die zur Bestimmung des Ortes dienende Linie AB befindet: so muß erstlich die Lage des Punctes C, wo sich der bewegte Punct im Anfange der Zeit t befand, durch Coordinaten AB = a, BD = b senkrecht auf AB, und DC = f senkrecht auf die Ebne ABD gegeben sein; zweitens muß man die Geschwindigkeit = c des Körpers und folglich seinen in der Zeit = t durchlaufenen Weg = CE = c . t kennen; drittens muß der Neigungswinkel = α der Linie CE gegen die Ebne FGHI bekannt sein, nebst dem Winkel = β, unter welchem die Durchschnittslinie DK der durch CE auf FGHI senkrecht gesetzten Ebne CDKE mit jener, gegen AL geneigt ist. Heißt hier CE = c . t, so ist DK = c . t . Cos α, und die mit AB parallele DM = DK . Cos β; MK = DK . Sin β. Die Lage E des bewegten Punctes wird also am Ende der Zeit = t

Zusatz für den geübteren Leser.

Die Betrachtung der gleichförmigen Bewegung ist so einfach, daß man der Differential-Rechnung nicht dabei bedarf. Um indeß die in der Folge vorkommenden Anwendungen der Differential-Rechnung zu erleichtern und darauf vorzubereiten, theile ich hier die Darstellung so mit, wie sie den Bezeichnungen der Differential-Rechnung gemäß ist.

Heißt der in der ganzen Zeit $= t$ durchlaufene Weg $= s$, so wächst dieser um ds, indem die Zeit um dt zunimmt. Bei gleichförmiger Bewegung wird in der Zeit $= dt$ mit der Geschwindigkeit $= c$, der Weg $ds = cdt$ durchlaufen, woraus durch Integration die Formel $s = c \cdot t$ folgt. Eigentlich $s = c \cdot t + \text{Const}$, wenn nämlich der durchlaufene Weg nicht von dem Puncte an gerechnet wird, wo der Körper sich im Anfange der Zeit t befand. Rechnete ich zum Beispiel in Fig. 3. den Raum $= s$ von A an; der Körper wäre aber für $t = 0$ in B gewesen und nach D zu gegangen, so daß er nach Verlauf der Zeit $= t$ in D ankam: so ist $BD = c \cdot t$, aber s, welches von A an sollte gerechnet werden, ist $= AB + c \cdot t$, weil s schon $= AB$ war, für $t = 0$. Die bei der Integration unbestimmt hinzukommende beständige Größe wird also hier dadurch bestimmt, daß man für $\text{Const} = AB$ den Werth setzt, den s hatte, als $t = 0$ war. Soll s von B an gerechnet werden, so ist $\text{Const} = 0$. Die Geschwindigkeit ist nun aber nicht $= \frac{s}{t}$, wenn s aus einem nicht in der Zeit t durchlaufenen Stücke, und einem von t abhängigen Stücke besteht. Allemal ist die Geschwindigkeit $= \frac{ds}{dt}$; und da $\frac{ds}{dt} = \frac{c \cdot dt}{dt} = c$, unveränderlich bleibt, so ist hier $dc = 0$, oder $\frac{d^2s}{dt} = 0$, woraus umgekehrt $\frac{ds}{dt} = \text{Const}$, oder die Zunahme des Weges als der Zunahme der Zeit proportional folgen würde, wenn man nach einer Bewegung gefragt hätte, für welche $\frac{d^2s}{dt} = 0$ sei.

§. 7. **Aufgabe.** Wenn ein Punct sich in grader Linie gleichförmig fortbewegt, den Ort zu bestimmen, wo er sich in jedem Zeitpuncte befindet.

Auflösung. Damit dieses geschehen könne, muß

linie EG mit BC und EF mit DC parallel: so sind die abgeschnittenen Stücke CF, CG die Wege, welche jener Punct mit CB und CD parallel durchlaufen hat. Heißt also BCE $= \alpha$; DCE $= \beta$, so ist der mit CB parallel durchlaufene Weg CF $= \frac{CE \,.\, Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)}$; der mit CD parallel durchlaufene Weg CG $= \frac{CE \,.\, Sin\,\alpha}{Sin\,(\alpha+\beta)}$.

§. 11. Alle hier vorkommende Aufgaben werden auf ähnliche Weise, mit Hülfe des Parallelogramms, ganz wie es beim Parallelogramm der Kräfte der Fall war, aufgelöst.

Zusatz für geübtere Leser.

Wenn in Fig. 4. der Punct nach der Richtung CE mit der Geschwindigkeit $=$ c fortgeht, so durchläuft er den kleinen Raum cE $=$ ds $=$ c.dt in der Zeit $=$ dt. Offenbar ist hier $L = c.dt.\,Cos\,\alpha$ und $mM = c.dt.\,Cos\,\alpha.\,Cos\,\beta$, also wenn AL $=$ S heißt, $mM = dL = dS = c.dt.\,Cos\,\alpha.\,Cos\,\beta$ und $AL = Const + c.t.\,Cos\,\alpha.\,Cos\,\beta$. Da hier für $t = o$ dann die Abscisse $=$ AB war oder $=$ a, so ist Const $=$ a und $= a + c.t.\,Cos\,\alpha.\,Cos\,\beta$.

Auf ganz ähnliche Weise wird die Betrachtung in Beziehung auf die übrigen Coordinaten angestellt.

§. 12. Bemerkung. Wenn ein Körper sich so bewegt, daß alle seine einzelnen Puncte nach parallelen Richtungen fortgehen: so ist die Bewegung des ganzen Körpers oder jedes Punctes in ihm bekannt, wenn man die Bewegung des Schwerpunctes kennt. Eine solche Bewegung heißt eine parallele Bewegung des Körpers, und läßt sich völlig nach denselben Gesetzen betrachten, wie die Bewegung eines einzelnen Punctes.

$= t$, des Beobachters durchlaufener Weg $= C \cdot t = AD$, sein senkrechter Abstand von AB, $= DH = C \cdot t \cdot \text{Cos}\beta$, sein senkrechter Abstand von AC, $= DI = C \cdot t \cdot \text{Sin}\beta$. Der beobachtete Punct hat in der Zeit $= t$, den Weg $= EF = c \cdot t$ zurück gelegt, und wenn EK mit AC, EL mit AB parallel ist, so hat man nach Verlauf dieser Zeit den senkrechten Abstand von

$AB = EL + LP = FL + EQ = c \cdot t \cdot \text{Cos}\gamma + a \cdot \text{Cos}\alpha$,

den senkrechten Abstand von

$AC = FM + MN = FM + EO = c \cdot t \cdot \text{Sin}\gamma + a \cdot \text{Sin}\alpha$.

Hieraus ergiebt sich, wenn man HDc durch D mit AC und bDI durch D mit AB parallel zieht, nach Verlauf der Zeit $= t$, des beobachteten Punctes Abstand von Db,

$$= c \cdot t \cdot \text{Cos}\gamma + a \cdot \text{Cos}\alpha - C \cdot t \cdot \text{Cos}\beta;$$

des beobachteten Punctes Abstand von Dc oder HD,

$$= c \cdot t \cdot \text{Sin}\gamma + a \cdot \text{Sin}\alpha - C \cdot t \cdot \text{Sin}\beta.$$

Wenn also der Beobachter seine Bewegung nicht empfindet und in A zu ruhen glaubt, so wird er des bewegten Punctes in der Zeit $= t$ erlangten Abstand von AB, $= FR = \varphi S = c \cdot t \cdot \text{Cos}\gamma + a \cdot \text{Cos}\alpha - C \cdot t \cdot \text{Cos}\beta$ ansetzen, und den erlangten Abstand von AC, so ansehen, als ob er $= FT = \varphi U$

$= c \cdot t \cdot \text{Sin}\gamma + a \cdot \text{Sin}\alpha - C \cdot t \cdot \text{Sin}\beta$ wäre. Die relative Bewegung stellt sich also dar als eine durch $= t(c \cdot \text{Sin}\gamma - C \cdot \text{Sin}\beta)$ ausgedrückte Zunahme der senkrechten Entfernung von AC, und als eine durch $= t(c \cdot \text{Cos}\gamma - C \cdot \text{Cos}\beta)$ ausgedrückte Zunahme der senkrechten Entfernung von AB. Beide Abstände wachsen also gleichförmig, oder im Verhältniß der Zeit, und folglich ist auch der scheinbar durchlaufene Weg Eφ der Zeit proportional oder gleichförmig durchlaufen; er ist aber auch grade, weil in dem rechtwinklichten Dreieck EVφ, für jeden Zeitpunct $EV : V\varphi =$

$$(c \cdot \text{Cos}\gamma - C \cdot \text{Cos}\beta) : (c \cdot \text{Sin}\gamma - C \cdot \text{Sin}\beta),$$

also Eφ für jeden Zeitpunct mit EV einen Winkel macht, dessen Tangente $= \dfrac{c \cdot \text{Sin}\gamma - C \cdot \text{Sin}\beta}{c \cdot \text{Cos}\gamma - C \cdot \text{Cos}\beta}$ ist.

§. 17. Der aus A nach D fortrückende Beobachter, elcher in A zu ruhen glaubt, betrachtet also die von E ach F gehende Bewegung des Punctes E als eine von E ach φ gehende. Es kann sich daher ereignen, wie es e. Figur vorstellt, daß der Beobachter glaubt, der be-egte Punct rücke z. B. ostwärts fort, obgleich beide Be-egungen nach Westen gehen; dieses geschieht nämlich ann, wenn der Beobachter ihm in der westlichen Bewe-ung voreilt, also ihn ostwärts hinter sich zurück läßt, nd so in ähnlichen Fällen.

§. 18. Wenn der Punct E ganz ruhet, so kann ennoch von einer relativen Bewegung desselben in Bezie-ung auf A die Rede sein. In unsern Formeln wäre ann $c = o$, und folglich $\varphi U = a . \text{Sin}\,\alpha - C . t . \text{Sin}\,\beta$
$= EO - DI$
nd $\varphi S = a . \text{Cos}\,\alpha - C . t . \text{Cos}\,\beta = AO - AI$, der Beobachter in A würde also, indem er alle Bewegung auf : bezieht und sich selbst ruhend glaubt, es so ansehen, ls ob (Fig. 8.) E die Linie Eφ, welche seinem eignen Wege gleich und parallel ist, rückwärts durchlaufen hätte; enn E scheint senkrecht gegen AB zu um $= C . t . \text{Cos}\,\beta$ nd senkrecht gegen AC zu um $= C . t . \text{Sin}\,\beta$ fortge-angen zu sein, also eine Bahn $= \sqrt{(c^2 . t^2 . \text{Sin}^2\beta + C^2 t^2 . \text{Cos}^2\beta)} = C . t$ durchlaufen zu haben, die ge-en AC unter einem Winkel CRE geneigt ist, dessen Tan-ente $= \frac{C . t . \text{Sin}\,\beta}{C . t . \text{Cos}\,\beta} = \text{tang}\,\beta$ ist.

§. 19. Lehrsatz. Wenn ein Beobachter seine eigne Bewegung nicht bemerkt, sondern sie als Bewegung der hn umgebenden Körper ansieht; so muß er glauben, die um ihn ruhenden Körper liefen in Bahnen, die seiner Bahn gänzlich gleich sind, aber die entgegengesetzte Lage hätten. (Fig. 9.)

Beweis. Indem A nach D geht, glaubt er den uhenden Punct E von E nach F gehen zu sehen, und der dem E beigelegte scheinbare Weg EF ist gleich und paral-

$= t$, des Beobachters durchlaufener Weg $= C . t = AD$, sein senkrechter Abstand von AB, $= DH = C . t . \text{Cos}\,\beta$, sein senkrechter Abstand von AC, $= DI = C . t . \text{Sin}\,\beta$. Der beobachtete Punct hat in der Zeit, $= t$, den Weg $= EF = c . t$ zurück gelegt, und wenn EK mit AC, FL mit AB parallel ist, so hat man nach Verlauf dieser Zeit den senkrechten Abstand von

$AB = EL + LP = FL + EQ = c . t . \text{Cos}\,\gamma + a . \text{Cos}\,\alpha$,

den senkrechten Abstand von

$AC = FM + MN = FM + EO = c . t . \text{Sin}\,\gamma + a . \text{Sin}\,\alpha$.

Hieraus ergiebt sich, wann man HDc durch D mit AC und bDI durch D mit AB parallel zieht, nach Verlauf der Zeit $= t$, des beobachteten Punctes Abstand von Db,

$= c . t . \text{Cos}\,\gamma + a . \text{Cos}\,\alpha - C . t . \text{Cos}\,\beta$;

des beobachteten Punctes Abstand von Dc oder HD,

$= c . t . \text{Sin}\,\gamma + a . \text{Sin}\,\alpha - C . t . \text{Sin}\,\beta$.

Wenn also der Beobachter seine Bewegung nicht empfindet und in A zu ruhen glaubt, so wird er des bewegten Punctes in der Zeit $= t$ erlangten Abstand von AB, $= FR = \phi S = c . t . \text{Cos}\,\gamma + a . \text{Cos}\,\alpha - C . t . \text{Cos}\,\beta$, ansetzen, und den erlangten Abstand von AC, so ansehen, als ob er $= FT = \phi U$

$= c . t . \text{Sin}\,\gamma + a . \text{Sin}\,\alpha - C . t . \text{Sin}\,\beta$ wäre. Die relative Bewegung stellt sich also dar als eine durch $= t (c . \text{Sin}\,\gamma - C . \text{Sin}\,\beta)$ ausgedrückte Zunahme der senkrechten Entfernung von AC, und als eine durch $= t (c . \text{Cos}\,\gamma - C . \text{Cos}\,\beta)$ ausgedrückte Zunahme der senkrechten Entfernung von AB. Beide Abstände wachsen also gleichförmig, oder im Verhältniß der Zeit, und folglich ist auch der scheinbar durchlaufene Weg $E\phi$ der Zeit proportional oder gleichförmig durchlaufen; er ist aber auch grade, weil in dem rechtwinklichten Dreieck $EV\phi$, für jeden Zeitpunct $EV : V\phi =$

$(c . \text{Cos}\,\gamma - C . \text{Cos}\,\beta) : (c . \text{Sin}\,\gamma - C . \text{Sin}\,\beta)$, also $E\phi$ für jeden Zeitpunct mit EV einen Winkel macht, dessen Tangente $= \dfrac{c . \text{Sin}\,\gamma - C . \text{Sin}\,\beta}{c . \text{Cos}\,\gamma - C . \text{Cos}\,\beta}$ ist.

Anmerkung. In den hier betrachteten Fällen lag immer der beobachtete Punct in derselben Ebne, in welcher der Beobachter sich fortbewegt; es ist aber leicht zu übersehen, wie die scheinbare Bahn bestimmt würde, wenn nicht alle zu bestimmende Puncte in derselben Ebne lägen.

Dritter Abschnitt.

Von den beschleunigenden Kräften, von der Schwerkraft und dem freien Falle der Körper.

§. 21. Erfahrung. Die Schwerkraft verursacht nicht bloß, daß die Körper vertical herabwärts zu fallen anfangen, sondern wir bemerken, daß der Körper im freien Falle eine immer größere Geschwindigkeit erlangt, und sehen dieses als einen Beweis an, daß die Schwerkraft fortdauernd auf den Körper wirkt, und seine Bewegung immer mehr beschleuniget.

§. 22. Erfahrung. Obgleich zwei ungleiche Körper, während sie ruhen, einen verschiedenen Druck ausüben: so bewegen sie sich doch mit gleicher und auf gleiche Art zunehmender Geschwindigkeit, sobald sie ohne alles Hinderniß fallen können.

§. 23. Wir schließen aus diesen Erfahrungen, daß die Schwerkraft auf alle Theilchen der Materie mit gleicher Gewalt wirkt, und daß sie daher alle Theilchen in gleich schnellem Falle herunter zieht. Verhält es sich so, so kann der schwerere Körper nicht schneller fallen, als der leichtere, weil jeder so fällt, wie die einzelnen Theilchen fallen würden, wenn sie ohne festen Zusammenhang neben einander herabsänken, indem sie auch dann ihre gegenseitige Lage unverändert behalten würden.

§. 24. Das verschiedene Gewicht der Körper deutet uns allerdings eine verschiedene Einwirkung der Schwerkraft an; aber diese, bei doppeltem Gewichte doppelt so große, Einwirkung wird verwandt, um einer doppelt so großen Masse Bewegung zu ertheilen, und daraus erklärt sich, warum die Bewegung nicht schneller wird, als bei einem Körper von geringerm Gewichte.

§. 25. Bemerkung. Da die Erfahrung zeigt, daß die Bewegung frei fallender Körper immer schneller wird: so ist es am natürlichsten, zu vermuthen, daß die Schwerkraft immerfort mit gleicher Gewalt auf die Körper wirke oder die Bewegung gleichförmig beschleunige. Ist dieses wirklich so, so muß es sich in einer immer gleichen, oder der Zeit proportionalen Zunahme der Geschwindigkeit zeigen, indem diese immer gleiche Einwirkung der Schwere in jedem folgenden Zeitraume die Geschwindigkeit um eben so viel vermehren wird, als in jedem vorhergehenden Zeitraume. Nach dieser Voraussetzung werden wir die Wirkungen der Schwere berechnen und dann Mittel finden, aus Beobachtungen die Richtigkeit unsrer Voraussetzungen darzuthun.

§. 26. Bemerkung. Wir könnten uns andre Kräfte denken, die auf ähnliche Weise wie die Schwere, aber mit ungleicher Gewalt auf die Körper wirkten. Eine solche Kraft würde doppelt so mächtig als die Schwerkraft heißen, wenn sie verursachte, daß derselbe Körper ruhend einen doppelt so großen Druck ausübte, und bei freier Bewegung in gleicher Zeit eine doppelt so große Geschwindigkeit erhielte. So würde uns also die in bestimmter Zeit erlangte Geschwindigkeit als Maaß der beschleunigenden Kraft dienen.

§. 27. Erklärung. Schon die Ueberlegung, daß der doppelt so schwere Körper mit doppelter Gewalt zur Erde hin getrieben wird, und dennoch nicht schneller fällt, als der nur halb so schwere, veranlaßt uns, die bewegende Kraft von der beschleunigenden Kraft zu unterscheiden. Die gesammte, offenbar dem Gewichte

es Körpers proportionale Einwirkung der Schwere, ist
ier die bewegende Kraft: aber da sie verwandt wird,
m alle körperlichen Theilchen in Bewegung zu setzen, so
mmt auf jedes zur Beschleunigung seiner Bewegung
ur ein der Masse umgekehrt proportionaler Theil.

Im Allgemeinen heißt also bewegende Kraft die
samte Gewalt, mit welcher der ganze Körper zur Be-
egung angetrieben wird; diese wird als beschleuni-
ende Kraft zur Vermehrung der Geschwindigkeit
des Theilchens verwandt, und man kann daher, wenn
an diesen Ausdruck richtig versteht, sagen, man finde
e beschleunigende Kraft, wenn man die bewegende
Kraft durch die in Bewegung gesetzte Masse dividirt.

§. 28. Wir können offenbar die bewegenden Kräfte,
ie Zahlen, mit einander vergleichen, und folglich auch
ne bestimmte bewegende Kraft als Einheit bei der Ab-
essung der übrigen zum Grunde legen. Diese als ein-
irkend gedacht, auf eine als Einheit angenommene
Masse gäbe uns also die Einheit der beschleunigenden
Kräfte. Wirkt eben jene bewegende Kraft = 1 auf eine
Masse = 2, so bringt sie in Beziehung auf jedes Theil-
chen nur die beschleunigende Kraft = $\frac{1}{2}$ hervor, eine be-
chleunigende Kraft, die jedem Theilchen in derselben Zeit
ur eine halb so große Geschwindigkeit ertheilt. Und so
ßt es sich nun leicht übersehen, warum wir die beschleu-
igende Kraft = $\frac{P}{M}$ setzen, wenn P die bewegende Kraft
nd M die bewegte Masse ist.

Bei der Einwirkung der Schwerkraft ist P allemal
er Masse proportional, und folglich der Quotient $\frac{P}{M}$
mmer gleich. Wir pflegen ihn hier = 1 zu setzen, und
e Schwere als Einheit zu Vergleichung andrer beschleu-
nigender Kräfte zu gebrauchen. Bei andern Kräften, die
wie die Schwerkraft auf alle körperliche Theilchen zu

wirken scheinen, ist auch der Quotient $\frac{P}{M}$ unveränderlich; er könnte aber größer oder kleiner als für die Schwerkraft sein, und darnach würden wir die Größe der beschleunigenden Kraft bestimmen.

Es giebt andre Kräfte, die nicht mit einer der Masse proportionalen Gewalt den ganzen Körper zur Bewegung antreiben. So zum Beispiel reißt ein Strom den schwimmenden Körper mit fort, und übt auf ihn eine bloß von des Körpers Größe und Gestalt abhängende Gewalt aus. Diese bewegende Kraft = P, treibt jedes Theilchen des Körpers mit desto mehr Stärke zur Bewegung an, je geringer die Zahl der Theilchen ist, auf die sie sich vertheilen, oder die sie in Bewegung setzen muß, und wenn folglich die Masse = M heißt, so ist hier = $\frac{P}{M}$ der Ausdruck für die beschleunigende Kraft.

§. 29. Bemerkung. Die Vergleichung der beschleunigenden Kräfte unter einander beruhet in den meisten Fällen nur auf der Vergleichung ihrer Wirkungen. Wenn eine mit immer gleicher Gewalt wirkende Kraft dem ihrer Wirkung frei folgenden Körper am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit = n . k ertheilt hat, so nennen wir diese Kraft das nfache derjenigen, die ihm in 1 Secunde nur die Geschwindigkeit = k ertheilt u. s. w. Aber selbst die Bestimmung dieser Geschwindigkeit ist nicht so leicht; denn da die stetig fortwirkende Kraft in jedem noch so kleinen Zeitmomente die Geschwindigkeit vermehrt, so können wir nicht unmittelbar beobachten, wie groß die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde oder in irgend einem andern Zeitpunct war, sondern müssen erst aus andern Umständen schließen, welchen Raum der Körper mit dieser Geschwindigkeit in 1 Secunde durchlaufen hätte, wenn sie durch diesen Zeitraum unverändert geblieben wäre.

§. 30. Lehrsatz. Wenn eine gleichförmig beschleu-

nigende Kraft auf den frei beweglichen Körper wirkt: so ist der Weg, welchen er vom Anfange der Bewegung an durchläuft, dem Quadrate der Zeit proportional.

Beweis. Wir denken uns einen ruhenden Körper, der durch die Einwirkung der beschleunigenden Kraft grade anfängt, sich zu bewegen, und wir fangen die Zeit von eben diesem Momente zu zählen an. Da nun die gleichförmig beschleunigende Kraft dem Körper in jedem Zeittheilchen gleich viel Geschwindigkeit ertheilt, oder seine schon erlangte Geschwindigkeit um gleich viel vermehrt: so ist die Geschwindigkeit $= \frac{1}{n}$ kt am Ende des Zeittheilchens $= \frac{1}{n}$ t, wenn sie = kt ist am Ende der Zeit = t, oder = k ist am Ende der ersten Secunde. Ist also t die ganze seit Anfang der Bewegung verflossene Zeit, so können wir uns diese in n gleiche Theile zerlegt denken, und haben dann im Anfange der Bewegung oder für die Zeit = o, die Geschwindigkeit = o;

am Ende des ersten Zeittheilchens, oder nach Verlauf der

Zeit $= \frac{1}{n} . t$, die Geschwindigkeit $= \frac{1}{n}$ kt,

am Ende des zweiten Zeittheilchens, oder nach Verlauf der

Zeit $= \frac{2}{n} . t$, die Geschwindigkeit $= \frac{2}{n}$ kt

u. s. w.

Da die Geschwindigkeit anzeigt, welchen Raum der Körper in der Zeit-Einheit durchlaufen würde, so bedeutet eine Geschwindigkeit $= \frac{m}{n}$ kt, daß der Körper vermöge derselben in der Zeit $= \frac{1}{n}$ t den Raum $= \frac{m}{n^2} k . t^2$ durchlaufen würde. Offenbar nun legt der Körper in jedem Zeittheilchen, das $= \frac{1}{n}$ t ist, einen größern Weg zurück als der Geschwindigkeit gemäß ist, welche er im Anfange dieses Zeittheilchens hatte, und einen kleinern

als der Geschwindigkeit am Ende dieses Zeittheilchens gemäß sein würde. Folglich ist der durchlaufene Weg, wenn wir jedes Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$ setzen,

im 1. Zeitth. größer als $= 0$; kleiner als $= \frac{1}{n^2} kt^2$;

im 2. Zeitth. größer als $= \frac{1}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{2}{n^2} kt^2$;

im 3. Zeitth. größer als $= \frac{2}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{3}{n^2} kt^2$,

im 4. Zeitth. größer als $= \frac{3}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{4}{n^2} kt^2$;

u. s. w.

im nten Zeitth. gr. als $= \frac{n-1}{n^2} kt^2$; kleiner als $= \frac{n}{n^2} kt^2$.

Denn im Anfange des ersten Zeittheilchens ist die Geschwindigkeit $= 0$; am Ende desselben $= \frac{1}{n} kt$; im Anfange des zweiten Zeittheilchens $= \frac{1}{n} kt$, am Ende des zweiten Zeittheilchens $= \frac{2}{n} kt$ u. s. w. Der gesammte in der Zeit $= t$ oder in n jener Zeittheilchen durchlaufene Weg ist also größer als

$$\frac{k \cdot t^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + \ldots + (n-1))$$

und kleiner als $\frac{k \cdot t^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + n)$,

da der eingeschlossene Factor eine arithmetische Reihe ist, und aus der Summe der natürlichen Zahlen, in der ersten Formel bis $(n-1)$, in der zweiten bis n fortgezählt, besteht, so ist der durchlaufene Weg größer als $\frac{k \cdot t^2}{n^2} (\frac{1}{2} n (n-1))$ und kleiner als $\frac{k \cdot t^2}{n^2} (\frac{1}{2} (n+1) . n)$.

(Arithmetik. §. 136.)

lso der durchlaufene Weg $> \frac{1}{2} k . t^2 - \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$,

und zugleich $< \frac{1}{2} k . t^2 + \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$.

Diese beiden Grenzen sind strenge richtig, wir mögen die Zeit = t, in welche Anzahl = n von Zeittheilen wir wollen, zerlegen; je größer aber n wird, desto unbedeutender wird $\frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$ und da für jeden Werth von n,

der Weg $> \frac{1}{2} k . t^2 - \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$

und $< \frac{1}{2} k . t^2 + \frac{\frac{1}{2} k . t^2}{n}$ ist,

so muß er nothwendig $= \frac{1}{2} k . t^2$ sein, also der in jeder Zeit = t durchlaufene Weg dem Quadrate der Zeit proportional.

§. 31. Diese Regel giebt uns nun ein Mittel, um erstlich zu bestimmen, ob die Schwerkraft wirklich eine beschleunigende sei, und zweitens zu bestimmen, welche Geschwindigkeit sie dem frei fallenden Körper am Ende irgend einer Zeit ertheilt hat. Genaue Versuche zeigen, daß der Weg frei fallender Körper wirklich dem Quadrate der Zeit proportional ist, und folglich die Schwere als gleichförmig beschleunigende Kraft wirkt; sie zeigen auch, daß k = 30, 2 pariser Fuß die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde ist, indem jeder wirklich durchlaufene Weg = 15, 1 . t^2 in t Secunden gefunden wird.

§. 32. Aus der Formel, daß der durchlaufene Weg = s = $\frac{1}{2} k . t^2$ sei, folgt für t = 1 Sec., daß der in 1 Secunde durchlaufene Weg = $\frac{1}{2}$ k, halb so groß sei, als derjenige, welchen der Körper mit seiner am Ende der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit durchlaufen würde, wenn er diese Geschwindigkeit eine Secunde lang unverändert behielte. Diesen Fallraum in der ersten Secunde, den wir mit g bezeichnen wollen, g = $\frac{1}{2}$ k,

pflegt man am liebsten in den Formeln zu gebrauchen und $s = g.t^2$ zu setzen.

§. 33. Aufgabe. Die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche ein frei fallender Körper erlangt hat, wenn er fallend den gegebenen Raum $= s$ durchlaufen hat, oder wenn während seines Fallens die Zeit $= t$ verflossen ist.

Auflösung. Wenn k die Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde bedeutete, so ist (§. 32.) $k = 2g$, und folglich am Ende der Zeit $= t$, die Geschwindigkeit, die wir mit v bezeichnen, $v = 2g.t$.

Ist s gegeben, so gehört ein bestimmter Weg $= s$ zu der Zeit $= t = \sqrt{\frac{s}{g}}$, weil $s = g.t^2$ ist, und folglich wird $v = 2g.t = 2\sqrt{gs}$, oder $v^2 = 4g.s$.

§. 33*. Man findet daher auch $s = \frac{v^2}{4g}$, als den Weg, welchen der Körper frei fallend muß durchlaufen haben, damit er die Geschwindigkeit $= v$ erlange. Dieser Weg heißt: die der Geschwindigkeit v zugehörige Höhe.

§. 34. Diese Formeln $v = 2g.t$;

$$s = g.t^2;\ t = \frac{v}{2g};$$

$$s = \frac{v^2}{4g};\ t = \sqrt[2]{\frac{s}{g}};\ v = 2\sqrt[2]{gs},$$

beantworten alle Fragen, die bei der freien Bewegung fallender Körper vorkommen können.

Zusätze für geübtere Leser.

Wenn (Fig. 14.) der frei fallende Körper, welcher in C ohne alle anfängliche Geschwindigkeit seine Bewegung anfing, den Weg CB $= s$ in der Zeit $= t$ durchlaufen, und hier die Geschwindigkeit $= v$ erlangt hat: so wissen wir, daß er den sehr kleinen Weg Bb, $= v.dt$ in der Zeit $= dt$ zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit unveränderlich bliebe. Obgleich nun hier die Geschwindigkeit veränderlich ist, so erhellt doch aus den Principien der Differential-Rechnung, daß man $ds = vdt$ setzen dürfe

nn gewiß ist, da die Bewegung eine beschleunigte ist, ds $>$ vdt
nd $<$ (v+dv) dt, wenn die Geschwindigkeit bis zu v+dv
nimmt, während des kleinen Zeittheilchens dt, und die Differ-
ntial-Rechnung giebt die Gründe an, warum das Produkt
r. dt hier nicht beachtet wird.

Bei dem freien Falle der Körper ist (§. 25.) die Geschwin-
gkeit der Zeit proportional, wenn zu Anfang der Bewegung die
eschwindigkeit = o war. Es ist also v = k.t und folglich
s = kt. dt, woraus durch Integration folgt $s = \text{Const} + \frac{1}{2}kt^2$
er, wenn s = o ist, für t = o, das heißt, wenn man den
Weg von da an rechnet, wo die Bewegung anfing, $s = \frac{1}{2}kt^2$
Woran sich dann alle Schlüsse, wie in §. 31. 32. knüpfen.

Die Geschwindigkeit selbst erhält in jedem Zeitmomente einen
lichen Zuwachs, welche der Länge dieses Zeitmomentes propor-
onal ist, also dv = k.dt, woraus v = Const+kt folgt,
er hier v = k.t, weil für t = o die Geschwindigkeit = o
in sollte.

§. 35. Bemerkung. Ganz ähnliche Formeln gel-
n offenbar für jede andre gleichförmig beschleunigende
Kraft, und sie würden sich von diesen, die sich auf die
Wirkungen der Schwere beziehen, nur darin unterschei-
en, daß statt g derjenige Raum müßte gesetzt werden,
welchen ein, dieser andern Kraft frei folgender Körper in
er ersten Secunde durchlaufen würde. Nenne ich diesen
Raum = G, so wäre hier die am Ende jeder Zeit = t
rlangte Geschwindigkeit = 2G.t, statt daß sie bei Ein-
wirkung der Schwere = 2g.t war; wir würden also
nach §. 29.) sagen, jene beschleunigende Kraft verhalte
ich zur beschleunigenden Kraft der Schwere wie G : g,
der sie verhalten sich zu einander, wie die in gleichen Zei-
en vermöge der Einwirkung der einen und der andern
urchlaufenen Wege.

§. 36. Bemerkung. Da die Schwere auf alle
Körper mit gleicher Gewalt einwirkt, sie mögen schon eine
eträchtliche Geschwindigkeit erlangt haben oder nicht: so
st wohl einleuchtend, daß ein vertical niederwärts ge-
worfener Körper, der also gleich im Anfange seiner
Bewegung eine gewisse Geschwindigkeit = c nach der
Richtungslinie der Schwere hat, eben so an Geschwindig-

keit gewinnen wird, wie ein ohne anfängliche Geschwindigkeit bewegter Körper. Fing er also an, sich nach verticaler Richtung niederwärts mit der Geschwindigkeit $= c$ zu bewegen, so wird seine am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit $= c + 2g$, und seine nach Verlauf der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit $= c + 2gt$ sein.

Eben so wenn der Körper mit der Geschwindigkeit $= c$ vertical aufwärts, der Richtung der Schwere grade entgegen, geworfen wird, so raubt ihm die Schwere in der Zeit $= t$ eben so viel von seiner Geschwindigkeit, als sie ihm ertheilen wurde, wenn er frei fiele; seine Geschwindigkeit ist also am Ende der Zeit $= t$, nur noch $= c - 2g.t$.

§. 37. Lehrsatz. Wenn ein Körper mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit vertical niederwärts oder vertical aufwärts geworfen wird: so ist im ersten Falle der in der Zeit $= t$ durchlaufene Weg gleich der Summe desjenigen Weges, welchen er in derselben Zeit gleichförmig mit der anfänglichen Geschwindigkeit, und desjenigen, welchen er vermöge der Schwere ohne anfängliche Geschwindigkeit durchlaufen würde; im zweiten Falle ist der durchlaufene Weg der Differenz dieser Wege gleich.

Beweis. Erster Fall. Es sei c die anfängliche, niederwärts gerichtete Geschwindigkeit, so würde der Körper vermöge dieser Geschwindigkeit in der Zeit $= t$, den Raum $= ct$ durchlaufen; vermöge der Schwere durchliefe er den Raum $= g.t^2$; wir behaupten also, daß der wirklich durchlaufene Raum $= ct + gt^2$ sei. Theilen wir wieder die Zeit $= t$ in n gleiche Theile: so ist am Anfange des ersten Zeittheiles die Geschwindigkeit $= c$, am Ende des ersten Zeittheiles die Geschwindigkeit $= c + 2g.\frac{t}{n}$; am Ende des zweiten Zeittheiles die Ge-

schwindigkeit $= c + 2g \cdot \frac{2t}{n}$ u. s. w., weil jedes Zeittheilchen $= \frac{t}{n}$ ist.

Der durchlaufene Weg ist also

im 1. Zeittheile größer als $\frac{ct}{n}$; kleiner als $\frac{ct}{n} + \frac{2g.t^2}{n^2}$;

im 2. Zeittheile $> \frac{ct}{n} + \frac{2g.t^2}{n^2}$; und $< \frac{ct}{n} + \frac{4g.t^2}{n^2}$;

im 3. Zeittheile $> \frac{ct}{n} + \frac{4g.t^2}{n^2}$; und $< \frac{ct}{n} + \frac{6g.t^2}{n^2}$;

im nten Zeitth. $> \frac{ct}{n} + \frac{2g.(n-1)t^2}{n^2}$; u. $< \frac{ct}{n} + \frac{n.2g.t^2}{n^2}$;

also der in allen diesen Zeittheilen oder in der Zeit $= t$ durchlaufene Weg

$$> \frac{n.ct}{n} + \frac{2g.t^2}{n^2}(1+2+\ldots\ldots+(n-1)),$$

und zugleich

$$< \frac{n.ct}{n} + \frac{2g.t^2}{n^2}(1+2+3+\ldots\ldots+n);$$

das ist, der durchlaufene Weg $> ct + gt^2 - \frac{gt^2}{n}$

und zugleich $< ct + gt^2 + \frac{gt^2}{n}$;

also $= ct + gt^2$, da jene Grenzen gelten für jeden Werth von n.

Zweiter Fall. Wird der Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ aufwärts geworfen, so würde er vermöge dieser Geschwindigkeit gleichförmig den Weg $= ct$ in der Zeit $= t$ aufwärts durchlaufen, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte. Diese dagegen würde, allein wirkend, ihn durch den Raum $= gt^2$ herabwärts treiben. Wir behaupten daher, daß er wirklich den Raum $= ct - gt^2$ aufwärts in der Zeit $= t$ durchlaufe. Der Beweis wird völlig, wie im ersten Falle

geführt, nur daß jetzt die Geschwindigkeit am Ende des ersten Zeittheiles $= c - 2g\frac{t}{n}$, am Ende des zweiten Zeittheiles $= c - \frac{4g.t}{n}$ ist u. s. w.

Der Weg in dem ersten Zeittheile ist also

$$< \frac{c.t}{n} \text{ und größer als } \frac{c.t}{n} - \frac{2g.t^2}{n^2},$$

im zweiten $< \frac{c.t}{n} - \frac{2g.t^2}{n^2}$ und $> \frac{c.t}{n} - \frac{4g.t^2}{n^2}$,
also in allen n Zeittheilen zusammen

$$< ct - gt^2 + \frac{gt^2}{n} \text{ und } > ct - gt^2 - \frac{gt^2}{n},$$

das ist, da diese Grenzen immer gelten, man mag n so groß man will nehmen

$$\text{der Weg} = ct - gt^2.$$

§. 38. Man kann hier sowohl als in §. 30. den durchlaufenen Weg durch einen ihm proportionalen Flächenraum geometrisch darstellen. Trägt man nämlich auf der graden Linie AB (Fig. 11.) gleiche Stücke von A an auf, um gleiche Zeittheile bildlich darzustellen: so würde, wenn man bei gleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit $= c$ durch die immer gleiche senkrechte Linie AC = DE vorstellte, das Recht-Eck ACFB = c . AB oder = c . t, wenn man AB = t als die Zeit darstellend betrachtet oder der Zeit = t proportional setzt, das ist ABFC dem von dem bewegten Körper durchlaufenen Wege proportional sein.

Läßt man eben so bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die auf AB (Fig. 12.) genommenen Stücke Am die Zeit bedeuten, und trägt in jedem Puncte m die Senkrechte mn derjenigen Geschwindigkeit proportional auf, welche am Ende der Zeit = Am = t Statt findet, so ist der von dem Körper durchlaufene Weg dem Flächenraume ACnm proportional. Hier ist nämlich AC der anfänglichen Geschwindigkeit gleich = c aufgetragen, und jede

Senkrechte mn, welche dem Ende der Zeit Am = t entspricht, ist = c + 2g . t genommen.

Es ist leicht zu übersehen, daß die durch alle so bestimmte Puncte n gezogne Linie Cn eine grade Linie ist, weil, wenn CD mit AB parallel gezogen worden, n′p′ : np = Am′ : Am ist, welches zeigt, daß n′Cp′, nCp ähnliche Dreiecke sind, also die Linie n′n sich als Verlängerung an Cn′ anschließt. Wenn man sich die durch Am vorgestellte Zeit = t in n gleiche Theile getheilt denkt, und es stellen Aa, ab zwei dieser Theile dar, so ist $AC = c$, $ad = Ah = c + 2g . \frac{t}{n}$; $bg = ae = c + \frac{4gt}{n}$, und der trapezische Raum ACda ist < Aa . Ah und > Aa . AC, oder

$$ACda < \frac{t}{n} . \left(c + \frac{2g . t}{n}\right) \text{ und } > c . \frac{t}{n};$$

und eben so

$$adgb < \frac{t}{n}\left(c + \frac{4g . t}{n}\right) \text{ und } > \frac{t}{n}\left(c + \frac{2g . t}{n}\right),$$

und wenn man diese Betrachtung, welche mit der in §. 37. genau übereinstimmt, fortsetzt, so erhellt, daß $ACnm = ct + gt^2$ eine dem durchlaufenen Wege proportionale Größe ist.

§. 39. Dieses führt uns zu einer, oft sehr vortheilhaften Darstellung des von bewegten Körpern durchlaufenen Weges. Wäre nämlich die Bewegung nicht gleichförmig beschleunigt, das heißt, nähme die Geschwindigkeit nicht in gleichen Zeiten um gleich viel zu, so könnte man eben so die Zeiten durch Stücke einer Linie Am (Fig. 13.) = t vorstellen, und in jedem so bestimmten Puncte m eine senkrechte Linie mn der Geschwindigkeit proportional errichten. Wenn die Zunahme der Geschwindigkeit nicht gleichförmig ist, so liegen die Puncte n′, n in einer krummen Linie, aber auch hier stellt der durch Am, mn und den Bogen An′n eingeschlossene Flächenraum den Weg dar, oder ist dem in jeder Zeit = t durchlaufenen

Wege proportional. Hat man also Mittel, um den krummlinigt begrenzten Flächenraum zu berechnen, so ist mit dem Gesetze für die Geschwindigkeiten zugleich bestimmt, wie sich die in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Wege zu einander verhalten. (vergl. §. 36.)

§. 40. Aufgabe. Wenn der Körper mit einer anfänglichen, vertical niederwärts gehenden Geschwindigkeit = c geworfen wird, und zugleich der Wirkung der Schwere überlassen, frei fällt, die Zeit zu bestimmen, in welcher er den gegebenen Raum = s durchlaufen wird, und die Geschwindigkeit zu bestimmen, die er am Ende des Weges = s erlangt hat.

Auflösung. Da §. 37. $s = ct + gt^2$ gefunden wurde, und die Geschwindigkeit = v in jedem Augenblicke $v = c + 2gt$ ist, so hat man

$$t^2 + \frac{c}{g}t = \frac{s}{g},$$

$$\text{also } t + \frac{c}{2g} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)},$$

$$t = -\frac{c}{2g} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)},$$

und folglich $v = 2g \cdot \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} + \frac{s}{g}\right)} = \sqrt{(c^2 + 4g \cdot s)}$; oder $v^2 = c^2 + 4g \cdot s$.

§. 41. Auf ähnliche Art würde dieselbe Aufgabe aufgelöst, wenn der Körper aufwärts geworfen wäre.

§. 42. Aufgabe. Wenn ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit = c vertical aufwärts geworfen wird, die Höhe zu bestimmen, welche er erreicht, und die Zeit, die er zu seinem Steigen verwendet.

Auflösung. Da die Geschwindigkeit des steigenden Körpers immer abnimmt, und (§. 36. 37.) nach Verlauf der Zeit = t nur noch = $v = c - 2g \cdot t$ ist, so ist $v = 0$, für $t = \frac{c}{2g}$. Dieses ist also die Zeit, nach welcher der Körper zu steigen aufhört, oder wenn er sei-

ten höchsten Punct erreicht hat. Da nun für jeden Werth von t die erreichte Höhe $= s = ct - gt^2$ ist, so ist für $t = \frac{c}{2g}$, $s = \frac{c^2}{2g} - \frac{c^2}{4g} = \frac{c^2}{4g}$ die ganze Höhe, welche der Körper erreicht. Sie ist einerlei mit derjenigen Höhe, durch welche der Körper fallen müßte, um die Geschwindigkeit $= c$ zu erlangen.

§. 43. Man hätte den größten Werth von s auch so finden können. Da allgemein $s = ct - gt^2$, oder $t^2 - \frac{ct}{g} = -\frac{s}{g}$; oder $t = \frac{c}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} - \frac{s}{g}\right)}$ ist, so wird t unmöglich für $s > \frac{c^2}{4g}$, und s kann folglich keinen größern Werth erlangen.

Hier hat der doppelte Werth für t eine richtige und leicht nachzuweisende Bedeutung. Wenn der Körper von A aus (Fig. 14.) aufwärts geht, so erreicht er den Punct B oder die Höhe $AB = s$ erstlich beim Steigen, wenn die Zeit $= \frac{c}{2g} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g^2} - \frac{s}{g}\right)}$ verflossen ist, und zweitens beim Fallen, wenn die Zeit

$$= \frac{c}{2g} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g} - \frac{s}{g}\right)}$$ vorbei gegangen ist.

Beispiel. Hiernach also sollte eine mit 2000 Fuß Geschwindigkeit vertical aufwärts abgeschossene Canonenkugel eine Höhe von 66225 Fuß oder 5 Meilen erreichen und 66 Sec. steigen. Der Widerstand der Luft verursacht, daß die Höhen unvergleichlich viel geringer ausfallen.

§. 44. Am Ende der Zeit $t = \frac{c}{g}$ kömmt der Körper im Fallen wieder in A an, oder s ist dann $= 0$, und seine Geschwindigkeit $= v = c - 2g.t = c - 2g \cdot \frac{c}{g}$ ist $= -c$ geworden. Er hat also beim Fallen in A

eben die Geschwindigkeit niederwärts (welches durch das — Zeichen angedeutet wird), welche er im Anfange der Bewegung aufwärts hatte.

Zusatz für geübtere Leser.

Bei jedem der Schwere frei folgenden, in verticaler Richtung bewegten Körper erhält die Geschwindigkeit in dem Zeittheilchen $= dt$ einen Zuwachs $= dv$, der $= kdt$ oder (§. 32.) $= 2g.dt$ ist. Dieses ist eine wirkliche oder positive Zunahme der Geschwindigkeit, wenn der Körper sich herabwärts bewegt; hingegen eine Abnahme oder negative Zunahme der Geschwindigkeit, wenn der Körper sich vertical aufwärts bewegt.

Wir haben also ganz allgemein $dv = 2g.dt$ und folglich $v = Const + 2gt$, wenn positive Werthe von v einer herabwärts gehenden Bewegung angehören sollen. War nun am Anfange der Zeit t, oder für $t = 0$ die Geschwindigkeit $= c$, so ist allgemein $v = c + 2gt$, und diese Formel gilt für alle verschiedenen anfänglichen Geschwindigkeiten, nur daß man c als positiv ansehen muß, wenn der anfängliche Wurf herabwärts, als negativ, wenn er hinaufwärts gerichtet war. Im ersten Falle also ist $v = c + 2gt$, und bei der Bewegung niederwärts nimmt der in der Zeit $= t$ durchlaufene Weg $= s$, um $ds = vdt = cdt + 2gt\,dt$ während der Zeit $= dt$ zu. Die Integration lehrt, daß hieraus $s = Const + ct + gt^2$ folge, oder, weil wir am natürlichsten s von da an rechnen, wo der Körper sich befand, als $t = 0$ war, $s = ct + gt^2$.

War die anfängliche Geschwindigkeit aufwärts gerichtet, so würde $s = -ct + gt^2$ werden, wenn man auch hier den Weg $= s$ positiv nennt, wenn er herunterwärts gerechnet wird. Der Weg also, der aufwärts durchlaufen worden, ist

$$= -s = ct - gt^2 = S.$$

Wollen wir hier den Werth finden, welchen s hat, wenn der Körper seine höchste Stelle erreicht hat: so suchen wir, wenn $ct - gt^2$ seinen größten Werth erhält. Da $S = ct - gt^2$ war, so ist $\frac{dS}{dt} = c - 2gt = 0$ die Gleichung für die Zeit, da der Körper den höchsten Punct erreicht hat. Diese giebt $t = \frac{c}{2g}$,

$$\text{also } S = \frac{c^2}{4g}$$

Für $t > \frac{c}{2g}$ erhält S eben die Werthe wieder, die es schon

einmal hatte. Setze ich nämlich allgemein $t = \frac{c}{2g} \pm \tau$, so ist
$$S = ct - gt^2 = \frac{c^2}{2g} \pm c\tau - \frac{c^2}{4g} \mp c\tau - g\tau^2;$$
$$S = \frac{c^2}{4g} - g\tau^2,$$ es mag τ positiv oder negativ sein.

§. 45. Bemerkung. Um zu prüfen, ob die Gesetze des freien Falles genau den in §. 30 bis 34. gelehrten Bestimmungen gemäß sind, dienen zwar allerdings genaue Beobachtungen über die Zeit des Falles von bestimmten Höhen (*); aber da die Beschleunigung bei freiem Falle so sehr groß ist, so hat man es bequemer gefunden, die Versuche mit einer verminderten beschleunigenden Kraft anzustellen. Dieses geschieht durch die von Atwood angegebne Einrichtung. Hängen an einem über die Rolle A (Fig. 15.) geschlagenen Faden an den entgegengesetzten Enden die ungleichen Gewichte P und p, so ist es so gut, als ob die auf das größere P wirkende bewegende Kraft nur $= P - p$ wäre; diese muß die Masse $= P + p$ in Bewegung setzen, und folglich wirkt auf die Beschleunigung der Bewegung nur eine Kraft $= \frac{P-p}{P+p}$, wenn man die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$ setzt. Das Gewicht P sinkt also zwar auch mit gleichförmig wachsender Geschwindigkeit; aber wenn man p so nimmt, daß $\frac{P-p}{P+p}$ zum Beispiel nur $\frac{1}{10}$ ist, so wird G (§. 35.) nur $= \frac{1}{10}$ g, $= 1,51$ Fuß, und man kann bei dieser langsamen Bewegung an einer angebrachten Scale bequem genug sehen, daß das Gewicht in

(*) Benzenbergs Versuche über den Fall der Körper, den Widerstand der Luft und die Umdrehung der Erde (Dortmund 1804.), zeigen, wie genau sich solche Beobachtungen anstellen lassen.

einer Secunde den Raum von 1,51 Fuß, in zwei Secunden den Raum von 6,04 Fuß und so weiter durchläuft.

Man muß bei diesen Versuchen allerdings noch wegen der Friction eine kleine Correction der Gewichte anbringen, was sich aber auch leicht ausführen läßt.

Vierter Abschnitt.

Vom Falle der Körper auf einer geneigten Ebne.

§. 46. **Bemerkung.** Wenn ein Körper auf der geneigten Ebne AB ohne Reibung hinabgleitet: so ist es (Fig. 16.) nicht die ganze Kraft der Schwere, die ihn auf AB herabwärts treibt; sondern es ergiebt sich, indem wir uns die vertical niederwärts wirkende Kraft $= P$ in eine mit AB parallele und in eine darauf senkrechte Kraft zerlegt denken, nur $P . \sin ABC$ als die nach AB wirkende Kraft, welche sich zur Schwere wie $\sin ABC$ zu 1 verhält. (Statik. §. 177.)

Wir setzen also die nach AB wirkende beschleunigende Kraft $= \sin ABC$.

§. 47. **Aufgabe.** Der Körper bewegt sich frei auf einer unter dem Winkel $ABC = \alpha$ geneigten Ebne; man sucht den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg $= s$, und die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= v$.

Auflösung. Da ein frei fallender Körper in einer Secunde vermöge der $= 1$ gesetzten beschleunigenden Kraft der Schwere den Raum $= g$ durchläuft: so wird (§ 35.) der Körper auf der geneigten Ebne in 1 Secunde den Raum $= g . \sin\alpha$, vermöge der beschleunigenden Kraft $= \sin\alpha$ durchlaufen.

Da diese Kraft gleichförmig beschleunigend wirkt, so ist

der in t Secunden zurückgelegte Weg $= gt^2 . \sin\alpha$, und die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= 2gt . \sin\alpha$.

§. 48. Wenn (Fig. 16.) der Körper auf der geneigten Ebne in der Zeit $= t$ den Weg $= As$ durchlaufen hat: so findet man den Weg $= At$, den er in eben der Zeit frei fallend durchlaufen hätte, wenn man in s die Linie st auf AB senkrecht errichtete, und At durch den Anfangspunct A der Bewegung vertical zieht. Hier ist nämlich $ABC = \alpha = Ats$, und $As = At . \sin\alpha$. Es war aber der Weg auf der geneigten Ebne $= gt^2 . \sin\alpha = As$, und der in eben der Zeit in freiem Falle durchlaufene Weg $= gt^2 = \frac{As}{\sin\alpha} = At$.

§. 49. Lehrsatz. Der auf der geneigten Ebne von A an, ohne Einwirkung einer andern Kraft, außer der Schwere, frei herabgleitende Körper hat in jedem Puncte s (Fig. 16.) eben die Geschwindigkeit, welche ein vertical und frei herabfallender Körper erlangt hätte, wenn er von A an frei fallend bis zu der durch s gezognen Horizontallinie gelangt wäre.

Beweis. Da der Körper in der Zeit $= t$ auf der geneigten Ebne die Geschwindigkeit $= v = 2gt . \sin\alpha$ erreicht hat, nach Vollendung des Weges $s = gt^2 . \sin\alpha$: so ist hier $t = \sqrt{\frac{s}{g . \sin\alpha}}$ und $v = 2\sqrt{gs . \sin\alpha}$, oder $v = 2\sqrt{g . Au}$, wenn $As = s$ und su horizontal ist. Aber auch der von A aus vertical herabfallende Körper hat (§. 34.) in der Tiefe $= Au$ die Geschwindigkeit $= v = 2\sqrt{g . Au}$ erlangt; beide Geschwindigkeiten sind also gleich.

§. 50. Hätte der auf der Ebne herabgehende Körper in A eine anfängliche Geschwindigkeit $= c$ gehabt: so wäre in s seine Geschwindigkeit $= c + 2\sqrt{g . Au}$, und eben diese Geschwindigkeit hätte er erlangt, wenn er frei fallend den Weg $= \frac{c^2}{4g} + Au$ zurückgelegt hätte.

§. 51. Lehrsatz. Es ist (Fig. 17.) ABCD ein verticaler Kreis, in welchem der verticale Durchmesser AD gezogen ist. Stellt man sich nun mehrere durch den Endpunct D dieses Durchmessers gezogene Sehnen BD, CD vor, auf welchen, wie auf geneigten Ebnen, Körper herabfallen: so kommen Körper, welche durch die Schwere angetrieben auf den Sehnen und auf dem verticalen Durchmesser herabfallend, ihre Bewegung gleichzeitig in A, in B, in C anfangen, gleichzeitig in D an.

Beweis. Wenn der Winkel ADB $= \beta$ ist, so ist die Sehne DB unter dem Winkel $=$ BDF $= 90° - \beta$ gegen den Horizont geneigt. Die Sehne BD wird also in der Zeit $= t = \sqrt{\frac{BD}{g \cdot \mathrm{Sin}\, BDF}} = \sqrt{\frac{BD}{g \cdot \mathrm{Cos}\, \beta}}$ durchlaufen. (§. 48. 49.)

Da aber BED $= 2 \cdot$ BDF (Geom. §. 269.), so ist BD $= 2 \cdot EB \cdot \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2}\, BED = 2 \cdot EB \cdot \mathrm{Cos}\, \beta$ und folglich $t = \sqrt{\frac{2 \cdot EB}{g}}$. Eben diesen Ausdruck findet man für die Sehne DC und jede andre. Aber auch der durch AD $= 2 \cdot$ EB vertical und frei herabfallende Körper durchläuft den Weg $= 2 \cdot$ EB in der Zeit $= t = \sqrt{\frac{2 \cdot EB}{g}}$, (§. 34.) folglich kommen alle von A, B, C ohne anfängliche Geschwindigkeit auf AD, BD, CD fortlaufende Körper gleich schnell in D an.

§. 51*. Erklärung. Die so in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege AD, BD, CD heißen isochronische oder gleichzeitige.

Fünfter Abschnitt.

Von ungleichförmig beschleunigenden Kräften, und von der durch sie bewirkten gradlinigen Bewegung.

§. 52. **Bemerkung.** Die beschleunigenden Kräfte, welche einen Körper zur Bewegung antreiben, sind oft nicht in allen Puncten des Raumes gleich, und ihre Einwirkung wird daher anders und anders, wenn der Körper nach und nach in andre Stellungen gelangt. Diese Verschiedenheit würde schon beim freien Falle der Körper merklich sein, wenn sie aus sehr großen Höhen herabfielen, indem die Schwere in größern Entfernungen von der Erde geringer ist.

Zuweilen wirken auch die beschleunigenden Kräfte mit mehr oder minderer Gewalt auf den schnell bewegten, als auf den langsam bewegten Körper, wie dieses z. B. bei dem Widerstande der Luft der Fall ist.

§. 53. **Erklärung.** Wenn man auf eine grade Linie AB (Fig. 18.) Stücke AT von A her gerechnet der Zeit = t proportional aufträgt, und in dem Endpuncte des Stückes eine Senkrechte TS, der am Ende jener Zeit erlangten Geschwindigkeit proportional zeichnet: so bestimmt sich eine Reihe von Endpuncten dieser Senkrechten, und durch diese eine grade oder krumme Linie, die man die **Scale der Geschwindigkeiten** in Beziehung auf die verflossene Zeit heißt.

Beispiel. Wenn die Geschwindigkeit der verflossenen Zeit proportional ist, so wird, wenn AT eine bestimmte und AT′ eine andre bestimmte Zeit darstellt, TS die Geschwindigkeit am Ende jener, T′S′ die Geschwindigkeit am Ende dieser vorstellen, wenn TS : T′S′ =

AT : AT' ist. Hier würde die Scale der Geschwindigkeiten eine grade Linie; aber wenn sie auch in andern Fällen eine Curve wird, so ist sie doch, wenn das Gesetz für die Geschwindigkeiten gegeben war, bekannt, weil sich so viele Puncte der Curve, als man verlangt, ergeben. Diese Scale legt nun deutlich das Gesetz des Wachsens oder Abnehmens der Geschwindigkeit vor Augen.

§. 54. Man könnte eben so eine Scale der Geschwindigkeit in Beziehung auf die durchlaufenen Wege zeichnen. Würden nämlich auf AB (Fig. 18.) die durchlaufenen Wege aufgetragen, und in jedem Puncte T die Senkrechte = TS so genommen, daß sie derjenigen Geschwindigkeit proportional wäre, welche der Körper nach Vollendung des Weges = AT grade erreicht hat: so würde der Endpunct jeder dieser Senkrechten einen Punct in der verlangten Scale der Geschwindigkeiten bestimmen.

Beispiel. In Fig. 19. stellt CSS' die Scale der Geschwindigkeiten eines der Schwere frei folgenden, mit der anfänglichen Geschwindigkeit = AC fortgehenden Körpers, in Beziehung auf die verflossenen Zeiten vor, wenn nämlich diese in AT, AT' aufgetragen sind.

Dagegen ist Css' die Scale derselben Geschwindigkeiten in Beziehung auf die durchlaufenen Wege, wenn diese durch AT, AT' dargestellt wären.

Die Figur zeigt, daß die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel zunimmt, daß aber am Ende des doppelten Weges die Geschwindigkeit nicht um das doppelte dessen gewachsen ist, was sie am Ende des einfachen Weges zugenommen hatte, welches auch mit §. 36. 40. übereinstimmt.

Fig. 19. b. stellt ebenfalls beide Scalen für die anfängliche Geschwindigkeit = 0 oder für den Fall dar, da der Körper ganz allein den Wirkungen der Schwere folgt.

§. 55. Erklärung. Auf ganz ähnliche Weise würde sich eine Scale der Kräfte in Beziehung auf

en zurückgelegten Weg ergeben, wenn man in dem End-
üncte jedes von A her auf AB aufgetragenen Weges eine
Senkrechte, derjenigen beschleunigenden Kraft proportio-
al, zeichnete, die grade am Ende dieses durchlaufenen
Beges auf den Körper wirkte.

Eine ähnliche Scale ließe sich in Beziehung auf die
erflossene Zeit denken, wenn man die Abscissen AT, AT'
en Zeiten proportional nähme, und TS, T'S' den Kräf-
n proportional, die grade am Ende dieser Zeiten auf
en Körper wirken. Endlich erhielte man eine Scale
er durchlaufenen Wege für bestimmte Zeiten,
enn man die Abscissen den Zeiten, die Ordinaten dem
i jeder dieser Zeiten durchlaufenen Wege proportional
ähme.

§. 56. Lehrsatz. Wenn man eine Scale der Ge-
hwindigkeiten in Beziehung auf die verflossenen Zeiten
ichnet, so daß (Fig. 20.) jede auf AB aufgetragene Ent-
rnung AT eine Zeit, die Senkrechte TS die am Ende
eser Zeit erlangte Geschwindigkeit darstellt: so ist der
rummlinigt begrenzte Flächenraum ACST genau dem
Wege proportional, der in jener Zeit durchlaufen wird.

Beweis. Wenn AC die anfängliche Geschwindig-
it vorstellt, und Ct mit AT parallel gezogen wird, so
t die Fläche ACtT dem Wege proportional, welchen der
Körper mit dieser anfänglichen Geschwindigkeit in der Zeit
AT = t zurücklegen würde, und diese Fläche kann uns
um Maaße bei Vergleichung andrer Bestimmungen die-
en. (§. 38.)

Stellt man sich nun die Zeit = t = AT in n gleiche
Theile zerlegt vor, von denen AD, DE, EF einige dar-
ellen: so bedeutet hier AC die anfängliche Geschwindig-
eit = v; DG = v' die Geschwindigkeit am Ende des
rsten Zeittheilchens; EH = v'' die Geschwindigkeit am
Ende des zweiten Zeittheilchens. Nun ist offenbar, wenn
ie Geschwindigkeit zunehmend ist, der durchlaufene Weg

in der Zeit $= \frac{1}{n} . t$, grösser als $\frac{1}{n} t . v$ u. kleiner als $\frac{1}{n} t . v'$;

der in der Zeit $= \frac{2}{n} t$ durchlaufene Weg

grösser als $\frac{1}{n} t . v + \frac{1}{n} t . v'$ u. kleiner als $\frac{1}{n} t . v' + \frac{1}{n} t . v''$, und so weiter, und dieses gilt, man mag die Theilchen $= \frac{1}{n} t$ so klein nehmen als man will. Und eben so ist der Flächenraum ACGD grösser als ACgD oder AC . AD $= \frac{1}{n} t . v$; u. kleiner als AcGD oder GD . AD $= \frac{1}{n} t . v'$. Der Flächenraum ACGHE grösser als

$$ACgD + DGhE \text{ oder } \frac{1}{n} t (v + v'),$$

und kleiner als AcGD + DgHE oder $\frac{1}{n} t (v' + v'')$.

Der zurückgelegte Weg in den Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$, $= \frac{2}{n} t$, und so in allen folgenden, ist also allemal zwischen Grenzen eingeschlossen, die sich zu dem mit der Geschwindigkeit $=$ AC $= v$ gleichförmig in der Zeit $= \frac{1}{n} t$ oder $= \frac{2}{n} t$ durchlaufenen Wege genau so verhalten, wie die eben erwähnten Parallelogramme und Summen von Parallelogrammen zu ACgD oder $v . \frac{1}{n} t$, zu 2ACgD oder $v . \frac{2}{n} t$ und so weiter. Da nun diese Parallelogramme und Summen von Parallelogrammen zugleich Grenzen sind, zwischen denen die krummlinigt begrenzte Fläche liegt, und dieses immer der Fall ist, man mag für t, welchen Werth man will, annehmen, und

theilchens schon die erst am Ende eintretende Kraft $= G'$, während des ganzen zweiten die Kraft $= G''$ gewirkt hätte. Die am Ende der Zeit $= \frac{2}{n} t$ erlangte Geschwindigkeit ist also größer als $2g . \frac{1}{n} t (G + G')$ und kleiner als $2g . \frac{1}{n} t (G' + G'')$; der ihr entsprechende Flächenraum also größer, als zwei Rechtecke über den Grundlinien $= \frac{1}{n} t$, von den Höhen $= G$ und $= G'$, und kleiner als zwei Rechtecke über denselben Grundlinien, deren Höhen $= G'$ und $= G''$.

Ist also unsre Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet, daß $Ag = 2g . G$; $CD = 2g . G'$; $EF = 2g . G''$ u. so ferner: so ist der Flächenraum $AgDC > 2g . G . \frac{1}{n} t$, und $< 2g . G' . \frac{1}{n} t$; der Flächenraum $AgFE > 2g . (G + G') \frac{1}{n} t$, und $< 2g . (G' + G'') \frac{1}{n} t$. Diese Flächenräume liegen also zwischen denselben Grenzen, zwischen welchen die Flächenräume liegen sollten, die wir als den Geschwindigkeiten entsprechend fanden, und da dies immer Statt findet, wie klein man auch die Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$ nehme: so erhellt deutlich genug, daß die in der Zeit $= AT = t$, vermöge der einwirkenden beschleunigenden Kräfte erlangte Geschwindigkeit, durch den von der Scale der Kräfte begrenzten Flächenraum AgGT dargestellt wird, oder daß die hier erlangte Geschwindigkeit sich zu der Geschwindigkeit, die durch eine gleichförmig beschleunigende Kraft $= G$ in eben der Zeit bewirkt wäre, verhält, wie der Flächenraum AgGT zu dem Rechtecke $2g G . t = Ag . AT$.

hältniß irgend einer andern beschleunigenden Kraft zur Schwere: so ist $v = 2g.G.t$ der allgemeine Ausdruck für die vermöge der Kraft $= G$ in der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit, wenn g den Fallraum in der ersten Secunde für die Einwirkung der Schwerkraft bezeichnet. Diese Geschwindigkeit ist also einem Rechtecke proportional, dessen eine Seite der Zeit proportional, die andre $= 2g.G$ ist. Bei unsrer jetzigen Betrachtung sehen wir die beschleunigende Kraft als veränderlich an, und folglich ist, bei wachsender beschleunigender Kraft, diese in jedem folgenden Zeittheilchen größer, als sie im vorigen war, so wie bei abnehmender Kraft das Gegentheil Statt findet. Denken wir uns also die Zeit $AT = t$ in n gleiche Theile getheilt, von denen AC, CE einige andeuten, so ist bei wachsender beschleunigender Kraft, wenn im Anfange die Kraft $= G$,

am Ende des Zeittheilchens $= \frac{1}{n}t$, die Kraft $= G'$,

am Ende des Zeittheilchens $= \frac{2}{n}t$, die Kraft $= G''$

war, die im ersten Zeittheilchen erlangte Geschwindigkeit größer als $2g.G.\frac{1}{n}t$ und kleiner als $2g.G'.\frac{1}{n}t$, weil die Beschleunigung in dieser Zeit von G auf G' stetig zunahm. Diese Geschwindigkeit wird also durch einen Flächenraum dargestellt, der größer als ein Rechteck von den Seiten $= 2gG$ und $= \frac{1}{n}t$, und kleiner als ein Rechteck von den Seiten $= 2gG'$ und $= \frac{1}{n}t$ ist. Eben so ist die in zwei Zeittheilchen oder in der Zeit $= \frac{2}{n}t$ erlangte Geschwindigkeit größer als sie sein würde, wenn während jedes Zeittheilchens die anfängliche Kraft, $= G$ im ersten, $= G'$ im zweiten gewirkt hätte; aber kleiner als sie sein würde, wenn während des ganzen ersten Zeit-

Theilchens schon die erst am Ende eintretende Kraft $= G'$, während des ganzen zweiten die Kraft $= G''$ gewirkt hätte. Die am Ende der Zeit $= \frac{2}{n} t$ erlangte Geschwindigkeit ist also größer als $2g . \frac{1}{n} t (G + G')$ und kleiner als $2g . \frac{1}{n} t (G' + G'')$; der ihr entsprechende Flächenraum also größer, als zwei Rechtecke über den Grundlinien $= \frac{1}{n} t$, von den Höhen $= G$ und $= G'$, und kleiner als zwei Rechtecke über denselben Grundlinien, deren Höhen $= G'$ und $= G''$.

Ist also unsre Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet, daß $Ag = 2g . G$; $CD = 2g . G'$; $EF = 2g . G''$ u. so ferner: so ist der Flächenraum $AgDC > 2g . G . \frac{1}{n} t$, und $< 2g . G' . \frac{1}{n} t$; der Flächenraum $AgFE > 2g . (G + G') \frac{1}{n} t$, und $< 2g . (G' + G'') \frac{1}{n} t$. Diese Flächenräume liegen also zwischen denselben Grenzen, zwischen welchen die Flächenräume liegen sollten, die wir als den Geschwindigkeiten entsprechend fanden, und da dies immer Statt findet, wie klein man auch die Zeittheilchen $= \frac{1}{n} t$ nehme; so erhellt deutlich genug, daß die in der Zeit $= AT = t$, vermöge der einwirkenden beschleunigenden Kräfte erlangte Geschwindigkeit, durch den von der Scale der Kräfte begrenzten Flächenraum AgGT dargestellt wird, oder daß die hier erlangte Geschwindigkeit sich zu der Geschwindigkeit, die durch eine gleichförmig beschleunigende Kraft $= G$ in eben der Zeit bewirkt wäre, verhält, wie der Flächenraum AgGT zu dem Rechtecke $2g G . t = Ag . AT$.

Hatte der Körper schon eine anfängliche Geschwindigkeit $= c$, so muß man diese zu der eben bestimmten erlangten Geschwindigkeit hinzurechnen, um die gesammte am Ende der Zeit $= t$ Statt findende Geschwindigkeit zu haben.

§. 59. Anmerkung. Fig. 20. und Fig. 21. b stellen ein wirkliches Beispiel zu §. 56 und 58. dar. Die Scale der Geschwindigkeiten in Fig. 20. ist nämlich so gezeichnet, daß allemal $v = c + h . t^{\frac{1}{2}}$, nämlich $AC = c$, $gG = h$ und jede Ordinate $= v$ ist, AD stellt die Zeit-Einheit vor. Fig. 21. b. zeigt diejenige Scale der Kräfte, welche die in Fig. 20 angegebnen Aenderungen der Geschwindigkeit bewirken. Hier ist nämlich für jedes $AT = t$, die Ordinate $TG = 2g . G = \frac{1}{2} h . t^{\frac{1}{2}}$ und folglich für die Zeit-Einheit $= AC$, $CD = \frac{1}{2} h$. Da die Zeichnungen denselben Bewegungsgesetzen entsprechen und $AT = AT$, $AT' = AU'$ in beiden Figuren ist: so ergiebt sich, daß

$$TS - AC : T'S' - AC = AGT : AG'T'$$

oder $gG : HH$ (Fig. 20.) $= ACD : AFE$ (Fig. 21. b.)

Auch Fig. 22. giebt ein Beispiel von Scalen der Kräfte und Geschwindigkeiten, die eben den Zeitpuncten entsprechen; AT stellt nämlich die Zeit, TG die am Ende derselben wirkende Kraft, TV die erlangte Geschwindigkeit des Körpers dar. Hier ist also $TV : T''V'' = AgGT : AgG''T''$ und so für alle Werthe von t.

§. 60. Lehrsatz. Wenn man eine krumme Linie zeichnet, deren Abscissen AS den von einem bewegten Körper durchlaufenen Wegen direct proportional, und deren Ordinaten SV den am Ende dieser Wege erlangten Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sind: so ist der von ihr begrenzte Flächenraum AUVS der während der Bewegung durch AS verflossenen Zeit proportional (Fig. 23.)

Beweis. Bei gleichförmiger Bewegung wird der Weg $= s$ in der Zeit $t = \frac{s}{c}$ durchlaufen, wenn c die immer gleiche Geschwindigkeit ist. (§. 4.) Wenn die Bewegung ungleichförmig ist, so stelle $AS = s$ den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg vor, und man theile diesen

Wenn allgemein s den am Ende der Zeit $= t$ zurückgelegten Weg bezeichnet, und v die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit: so ist $ds = vdt$. Wir dürfen nämlich es so ansehen, als ob die Geschwindigkeit, während des kleinen Zeitmomentes $= dt$, unverändert $= v$ bliebe, weil, wie die Differential-Rechnung lehrt, wir nur das erste Glied, oder dasjenige Glied, worin die erste Potenz der Differenzen vorkömmt, zu berücksichtigen brauchen. Jene Differentialgleichung giebt also $s = \int vdt$, welches Integral gefunden wird, wenn v als Function von t gegeben ist. Aus der Integral-Rechnung ist zugleich bekannt, daß $\int vdt$ die Fläche angiebt, welche durch die Curve begrenzt wird, deren Abscissen $= t$ und Ordinaten $= v$ sind; es erhellt also von selbst, wie die bildliche Darstellung in §. 56. sich hieran anschließt.

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich §. 58. mit Hülfe der Integral-Rechnung betrachten. Wenn eine unveränderliche beschleunigende Kraft $= G$ während der Zeit $= t$ auf einen bewegten Körper wirkt: so nimmt seine Geschwindigkeit um $2gGt$ zu (§. 35.). Hier, wo G eine veränderliche Kraft sein soll, können wir sie doch so ansehen, als ob sie während des kleinen Zeittheilchens $= dt$ unveränderlich bliebe, und wir sagen daher: die während dieses Zeitmomentes $= dt$ erfolgende Vermehrung der Geschwindigkeit sei $= dv = 2gG \cdot dt$, woraus $v = 2g\int Gdt$ folgt, wenn G als Function von t gegeben ist. Und hier ist das Integral $2g\int Gdt$ wieder der Inhalt einer krummlinigt begrenzten Fläche, wenn der Curve Abscissen $= t$ und Ordinaten $= 2Gg$ sind.

An diese Formeln schließen sich mit Leichtigkeit zwei andre, erstlich $ds = vdt$, giebt offenbar $\frac{ds}{v} = dt$, und folglich

$t = \int \frac{ds}{v}$, wenn etwa v als Function von s gegeben wäre, wie §. 60.; und zweitens aus $dv = 2g\,G \cdot dt$ folgt die Formel $\frac{dv}{G} = 2gdt$ und $2gt = \int \frac{dv}{G}$, die man oft gebraucht, wenn G als Function von v ausgedrückt wird. Uebrigens erhellt leicht, daß §. 60. eben das darstellt, was wir hier in der Formel $t = \int \frac{ds}{v}$ übersehen.

In unsrer jetzigen Darstellung läßt sich das, was §. 61. enthält, überaus leicht ableiten.

Wir hatten $ds = vdt$,

und $dv = 2g \cdot Gdt$,

also $2vdv = 4g \cdot Gvdt$,

$= 4g \cdot G\,ds$,

woraus sich durch die Integralrechnung ergiebt:

$$\text{Const} + v^2 = 4g\int G ds.$$

Hier ist $4g\int G ds$ die in §. 61. betrachtete Fläche, die mit $s = 0$ anfängt, also $= 0$ ist für $s = 0$. Aber für $s = 0$ soll v einen bestimmten Werth haben, den ich $v = c$ setzen will, also da $\int G ds$ mit s zugleich verschwindet,

$$\text{Const} + c^2 = 0, \text{ oder Const} = -c^2,$$

wodurch die allgemeine Gleichung in $v^2 - c^2 = 4g\int G ds$ übergeht, wie in §. 61.

Wäre G als Function von v gegeben, so hätte man auch

$$\frac{2vdv}{G} = 4gds$$

$$\text{oder} \int \frac{2vdv}{G} = 4gs.$$

§. 63. **Bemerkung.** Wenn, wie wir hier offenbar immer voraussetzen, die Richtung der beschleunigenden Kraft mit der Richtung der Bewegung zusammen fällt: so geht der Körper immer in derselben gradlinigten Richtung fort, und seine Bewegung wird nun beschleuniget, wenn die Kraft nach eben derselben, sie wird verzögert, wenn die Kraft nach der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Ein Beispiel solcher Bewegungen können wir von dem Falle eines aus großen Höhen herabfallenden Körpers hernehmen. Die Schwerkraft ist in großen Entfernungen von der Erde nicht überall gleich, sondern verhält sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen vom Centro der Erde. Nennen wir also die Schwerkraft $= 1$ in der Entfernung $= R$ vom Mittelpuncte, so ist sie $= \frac{R^2}{h^2}$ in der Entfernung $= h$ vom Mittelpuncte; und es wird folglich ein von der Entfernung $= h$ gegen den Mittelpunct herabfallender Körper, wenn er den Weg $= s$ durchlaufen hat, also sich in der Entfernung $= h - s$ vom Centro befindet, von der Kraft $= \frac{R^2}{(h-s)^2}$ beschleuniget, und diese würde ihm, wenn sie unveränderlich fortwirkte in 1 Secunde die Geschwindigkeit

$$= 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2} \text{ ertheilen.}$$

sein. Das ist $V^2 - v^2 = 4g . G (S - s)$. Eben das findet Statt, wenn der Körper schon mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ seine Bewegung anhob. Dann nämlich ist (§. 37.) $s = ct + gGt^2$ und $v = c + 2g . Gt$, also $v^2 = c^2 + 4 . g . G . ct + 4 . g . G . g . Gt^2$, oder $V^2 = 4g . G . s + c^2$ und folglich

$$v^2 - c^2 = 4g G s.$$

Auf ähnliche Art wird die am Ende des Weges $= S$ erlangte Geschwindigkeit $= V$ bestimmt und

$$V^2 - c^2 = 4g . G . S \text{ gefunden.}$$

Denken wir uns in unserm Falle, wo ungleichförmig beschleunigende Kräfte wirken, den ganzen durchlaufenen Weg $= AS = s$ in n Theile, $AB = \frac{1}{n} s$, $BD = \frac{1}{n} s$ und so ferner getheilt und nennen G, G', G'' u. s. w. die beschleunigenden Kräfte, die im Anfange der Bewegung, die nach Vollendung des ersten Theilchens, die nach Vollendung des zweiten u. s. w. wirken: so ist für die anfängliche Geschwindigkeit $= v$, für die am Ende des Weges $= \frac{1}{n} s$ Statt findende $= v'$, und die am Ende des Weges $= \frac{2}{n} s$ Statt findende $= v''$, gewiß für wachsende beschleunigende Kräfte

$$v'^2 - v^2 > 4g G \frac{s}{n} \text{ und } < 4g G' \frac{s}{n},$$

$$v''^2 - v'^2 > 4g G' . \frac{1}{n} s \text{ und } < 4g G'' \frac{1}{n} s,$$

$$v'''^2 - v''^2 > 4g G'' \frac{1}{n} s \text{ und } < 4g G''' \frac{1}{n} s,$$

also, wenn man addirt,

$$v'''^2 - v^2 > 4g . \frac{1}{n} s (G + G' + G'') \text{ und}$$

$$> 4g \frac{1}{n} s (G' + G'' + G''').$$

Eben so ist der Flächenraum

$$acdb > 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} \text{ u. } < 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2}$$

u. s. w. Der ganze Flächenraum $A\gamma GS$ ist also

$$> 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2} + \dots \dots + \frac{R^2}{(h - \frac{(n-1)}{n} s)^2} \right)$$

und

$$< 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \left(\frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{3}{n} s)^2} + \dots \dots + \frac{R^2}{(h - s)^2} \right).$$

Es läßt sich aber leicht beweisen, (vergl. §. 65.) daß $\frac{4g\,R^2\,s}{h\,(h-s)}$ immer zwischen diesen Grenzen liege, wie groß man auch n nehme, obgleich dadurch diese Grenzen nach Belieben verengert werden können, und folglich ist $A\gamma GS = \frac{4g\,R^2\,s}{h\,(h-s)}$, und $v^2 = \frac{4g\,R^2 . s}{h\,(h-s)}$, weil auch hier $SG = 4g . G$ genommen ist, wie in §. 61.

§. 65. Daß $\frac{4g\,R^2\,s}{h\,(h-s)}$ allemal zwischen den erwähnten Grenzen liege, läßt sich so erweisen.

Die Vergleichung

$$\frac{4g\,R^2 s}{h\,(h-s)} > 4g\,R^2 . \frac{s}{n} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \dots \dots + \frac{1}{(h - \frac{n-1}{n} s)^2} \right)$$

$$\text{und} < 4g\,R^2 . \frac{s}{n} \left(\frac{1}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{1}{(h - \frac{2}{n} r)^2} + \dots \dots + \frac{1}{(h-s)^2} \right)$$

Wenn allgemein s den am Ende der Zeit $= t$ zurückgelegten Weg bezeichnet, und v die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit: so ist $ds = vdt$. Wir dürfen nämlich es so ansehen, als ob die Geschwindigkeit, während des kleinen Zeitmomentes $= dt$, unverändert $= v$ bliebe, weil, wie die Differential-Rechnung lehrt, wir nur das erste Glied, oder dasjenige Glied, worin die erste Potenz der Differenzen vorkömmt, zu berücksichtigen brauchen. Jene Differentialgleichung giebt also $s = \int vdt$, welches Integral gefunden wird, wenn v als Function von t gegeben ist. Aus der Integral-Rechnung ist zugleich bekannt, daß $\int vdt$ die Fläche angiebt, welche durch die Curve begrenzt wird, deren Abscissen $= t$ und Ordinaten $= v$ sind; es erhellt also von selbst, wie die bildliche Darstellung in §. 56. sich hieran anschließt.

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich §. 58. mit Hülfe der Integral-Rechnung betrachten. Wenn eine unveränderliche beschleunigende Kraft $= G$ während der Zeit $= t$ auf einen bewegten Körper wirkt: so nimmt seine Geschwindigkeit um $2gGt$ zu (§. 55.). Hier, wo G eine veränderliche Kraft sein soll, können wir sie doch so ansehen, als ob sie während des kleinen Zeittheilchens $= dt$ unveränderlich bliebe, und wir sagen daher: die während dieses Zeitmomentes $= dt$ erfolgende Vermehrung der Geschwindigkeit sei $= dv = 2gG \cdot dt$, woraus $v = 2g\int Gdt$ folgt, wenn G als Function von t gegeben ist. Und hier ist das Integral $2g\int Gdt$ wieder der Inhalt einer krummlinigt begrenzten Fläche, wenn der Curve Abscissen $= t$ und Ordinaten $= 2Gg$ sind.

An diese Formeln schließen sich mit Leichtigkeit zwei andre, erstlich $ds = vdt$, giebt offenbar $\frac{ds}{v} = dt$; und folglich $t = \int \frac{ds}{v}$, wenn etwa v als Function von s gegeben wäre, wie §. 60.; und zweitens aus $dv = 2gG \cdot dt$ folgt die Formel $\frac{dv}{G} = 2gdt$ und $2gt = \int \frac{dv}{G}$, die man oft gebraucht, wenn G als Function von v ausgedrückt wird. Uebrigens erhellt leicht, daß §. 60. eben das darstellt, was wir hier in der Formel $t = \int \frac{ds}{v}$ übersehen.

In unsrer jetzigen Darstellung läßt sich das, was §. 61. enthält, überaus leicht ableiten.

Wir hatten $ds = vdt$,

und $dv = 2g \cdot Gdt$,

also $2vdv = 4g \cdot Gvdt$,

$= 4g \cdot G\,ds$,

woraus sich durch die Integralrechnung ergiebt:

$$\text{Const} + v^2 = 4g\int G ds.$$

Hier ist $4g\int G ds$ die in §. 61. betrachtete Fläche, die mit $s = 0$ anfängt, also $= 0$ ist für $s = 0$. Aber für $s = 0$ soll v einen bestimmten Werth haben, den ich $v = c$ setzen will, also da $\int G ds$ mit s zugleich verschwindet,

$$\text{Const} + c^2 = 0, \text{ oder Const} = - c^2,$$

wodurch die allgemeine Gleichung in $v^2 - c^2 = 4g\int G ds$ übergeht, wie in §. 61.

Wäre G als Function von v gegeben, so hätte man auch

$$\frac{2vdv}{G} = 4gds$$

$$\text{oder} \int \frac{2vdv}{G} = 4gs.$$

§. 63. Bemerkung. Wenn, wie wir hier offenbar immer voraussetzen, die Richtung der beschleunigenden Kraft mit der Richtung der Bewegung zusammen fällt: so geht der Körper immer in derselben gradlinigten Richtung fort, und seine Bewegung wird nun beschleuniget, wenn die Kraft nach eben derselben, sie wird verzögert, wenn die Kraft nach der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Ein Beispiel solcher Bewegungen können wir von dem Falle eines aus großen Höhen herabfallenden Körpers hernehmen. Die Schwerkraft ist in großen Entfernungen von der Erde nicht überall gleich, sondern verhält sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen vom Centro der Erde. Nennen wir also die Schwerkraft = 1 in der Entfernung = R vom Mittelpuncte, so ist sie $= \frac{R^2}{h^2}$ in der Entfernung = h vom Mittelpuncte; und es wird folglich ein von der Entfernung = h gegen den Mittelpunct herabfallender Körper, wenn er den Weg = s durchlaufen hat, also sich in der Entfernung = h — s vom Centro befindet, von der Kraft $= \frac{R^2}{(h-s)^2}$ beschleuniget, und diese würde ihm, wenn sie unveränderlich fortwirkte in 1 Secunde die Geschwindigkeit

$$= 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2} \text{ ertheilen.}$$

§. 64. Aufgabe. Ein von sehr großer Höhe herabfallender Körper, dem keine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt war, hat einen bestimmten Raum $= s$ durchlaufen; man verlangt die Geschwindigkeit zu bestimmen, die er grade dort erlangt hat.

Auflösung. Befand er sich im Anfange der Bewegung in der Entfernung $= h$ vom Mittelpuncte, also in dem Momente, für welchen die Bestimmung der Geschwindigkeit $= v$ verlangt wird, in der Entfernung $= h - s$, so ist $v^2 = \frac{4g R^2 s}{h(h-s)}$, wenn R den Halbmesser der Erde bedeutet, und g den der Kraft $= 1$ entsprechenden Fallraum in 1 Secunde.

Beweis. Denke ich mir (Fig. 25.) die Scale der beschleunigenden Kräfte in Beziehung auf die durchlaufenen Wege gezeichnet, so daß jedes auf der Abscissenlinie aufgetragene Stück $AS = s$ den durchlaufenen Weg darstellt, und jede zugehörige Ordinate SG der am Ende desselben wirkenden beschleunigenden Kraft, oder vielmehr derjenigen Geschwindigkeit, welche sie dem Körper in 1 Secunde mittheilen würde, wenn sie unverändert wirkte, proportional ist: so kann ich in jedem Puncte, für den $AS = s$ ist, $SG = 4g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2}$ nehmen, da die Kraft $= \frac{R^2}{(h-s)^2}$ dem Körper die Geschw. $= 2g \cdot \frac{R^2}{(h-s)^2}$ ertheilen würde.

Der Weg AS sei in n gleiche Theile getheilt, von denen Aa, ab die ersten vorstellen mögen, so ist der Flächenraum

$$Aac\gamma > 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{h^2} \text{ und } < 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2},$$

weil $A\gamma = \frac{R^2}{h^2} 4g$ und $ac = 4g \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2}$ ist.

Eben so ist der Flächenraum

$$acdb > 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} \text{ u. } < 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2}$$

u. s. w. Der ganze Flächenraum $A\gamma GS$ ist also

$$> 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{R^2}{(h - \frac{(n-1)}{n} s)^2} \right)$$

und

$$< 4g \cdot \frac{1}{n} s \cdot \left(\frac{R^2}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{2}{n} s)^2} + \frac{R^2}{(h - \frac{3}{n} s)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{R^2}{(h - s)^2} \right).$$

Es läßt sich aber leicht beweisen, (vergl. §. 65.) daß $\frac{4g\,R^2\,s}{h\,(h-s)}$ immer zwischen diesen Grenzen liege, wie groß man auch n nehme, obgleich dadurch diese Grenzen nach Belieben verengert werden können, und folglich ist $A\gamma GS = \frac{4g\,R^2\,s}{h\,(h-s)}$, und $v^2 = \frac{4g\,R^2 \cdot s}{h\,(h-s)}$, weil auch hier $SG = 4g \cdot G$ genommen ist, wie in §. 61.

§. 65. Daß $\frac{4g\,R^2\,s}{h\,(h-s)}$ allemal zwischen den erwähnten Grenzen liege, läßt sich so erweisen.

Die Vergleichung

$$\frac{4g\,R^2 s}{h\,(h-s)} > 4g\,R^2 \cdot \frac{s}{n} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{(h - \frac{n-1}{n} s)^2} \right)$$

$$\text{und} < 4g\,R^2 \cdot \frac{s}{n} \left(\frac{1}{(h - \frac{1}{n} s)^2} + \frac{1}{(h - \frac{2}{n} r)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-s)^2} \right)$$

giebt

$$\frac{n}{h(h-s)} > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-\frac{1}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{2}{n}s)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(h-\frac{n-1}{n}s)^2};$$

und

$$< \frac{1}{(h-\frac{1}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{2}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{3}{n}s)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-s)^2},$$

oder wenn ich $u = \frac{1}{n}s$ setze

$$\frac{n}{h(h-nu)} > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(h-(n-1)u)^2};$$

und

$$< \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \frac{1}{(h-3u)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-nu)^2}.$$

Diese Grenzen sind richtig für $n = 1$, da

$$\frac{1}{h(h-u)} > \frac{1}{h^2} \text{ und } < \frac{1}{(h-u)^2} \text{ ist.}$$

Sie sind noch richtig für $n = 2$, weil der vor dem Ungleichheitszeichen stehende Theil aus $\frac{1}{h(h-u)}$ in $\frac{2}{h(h-2u)}$ übergeht, wenn man statt $n = 1$, jetzt $n = 2$ setzt, dieser also um

$$\frac{2}{h(h-2u)} - \frac{1}{h(h-u)} = \frac{1}{(h-u)(h-2u)} \text{ wächst,}$$

statt daß der erste nach dem Ungleichheitszeichen stehende Ausdruck um weniger, nämlich nur um $\frac{1}{(h-u)^2}$, welches $< \frac{1}{(h-u)(h-2u)}$ ist, wächst, und der zweite

nach dem Ungleichheitszeichen stehende Ausdruck um zu viel, nämlich um $\frac{1}{(h-2u)^2} > \frac{1}{h(-u)(h-2u)}$ wächst.

Es läßt sich auch zeigen, daß diese Grenzen richtig bleiben für $n = m + 1$, wenn sie richtig waren für $n = m$. Ist nämlich wirklich

$$\frac{m}{h(h-mu)} > \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(h-(m-1)u)^2}$$

und $< \frac{1}{(h-u)^2} + \frac{1}{(h-2u)^2} + \ldots + \frac{1}{(h-mu)^2}$, so geht, indem man n um eins größer $= m + 1$ nimmt, das vor dem Ungleichheitszeichen stehende Glied in

$\frac{m+1}{h(h-(m+1)u)}$ über, oder ist um

$$\frac{m+1}{h(h-(m+1)u)} - \frac{m}{h.(h-mu)} = \frac{1}{(h-mu)(h-(m+1)u)}$$

größer geworden; die nach dem Ungleichheitszeichen stehende erste Reihe erhält dagegen nur das neue Glied $= \frac{1}{(h-mu)^2}$, welches kleiner als $\frac{1}{(h-mu)(h-(m+1)u)}$ ist, und die zweite Reihe erhält das neue Glied

$= \frac{1}{(h-(m+1)u)^2}$, welches größer als

$\frac{1}{(h-mu)(h-(m+1)u)}$ ist. War also die erste Reihe zu klein und die andre zu groß, so bleibt das auch noch jetzt der Fall. Da nun die Grenzen gelten für $n = 1$ und $n = 2$, so gelten sie für $n = 3$ u. s. f.

Aber auch das läßt sich leicht übersehen, daß der für v^2 gefundene Ausdruck $= \frac{4g\,R^2 s}{h(h-s)}$ zwischen immer engere Grenzen eingeschlossen wird, je größer man n nimmt. Denn diese Grenzen waren

und $t = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{w}{2(1 + w^2)} - \frac{1}{2} \, \text{Arc} \, . \, \text{tang} \, w \right) + \text{Const}$

$= \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{2h} - \frac{1}{2} \, \text{Arc tang} \left(\sqrt{\frac{h - s}{s}} \right) \right\} + \text{Const}$

(Pasquichs Analysis. 2. Band §. 38. 6. Zusatz.)

Soll $t = 0$ sein, für $s = 0$, so ist

$$\text{Const} = \frac{1}{2} \, \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \, . \, \text{Arc} \, . \, \text{tang} \, \infty,$$

$$\text{oder Const} = \frac{1}{2} \, \frac{h^{\frac{3}{2}}}{R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \, . \, \frac{1}{2} \pi.$$

folglich

$$t = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{h} + \frac{1}{2} \pi - \text{Arc} \, . \, \text{tang} \left(\sqrt{\frac{h - s}{s}} \right) \right\}$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{h} + \text{Arc} \, . \, \text{Cotang} \left(\sqrt{\frac{h - s}{s}} \right) \right\}$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2R \, . \, g^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\sqrt{(hs - s^2)}}{h} + \text{Arc} \, . \, \text{Cosin} \sqrt{\frac{h - s}{h}} \right\}$$

Für den Fall also, da $h = 2R$ war, oder der Körper beim Anfange seines Fallens um einen ganzen Erdhalbmesser über der Oberfläche der Erde sich befand, gebraucht er, um die Oberfläche der Erde zu erreichen, oder den Weg $= s = R$ zurück zu legen, die Zeit $= \frac{\sqrt{2R}}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} + \text{Arc Cos} \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$

$$= \sqrt{\frac{R}{2g}} + \frac{1}{4} \pi \sqrt{\frac{2R}{g}};$$

weil zum Bogen $= \frac{1}{4} \pi$ der Cosinus $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ gehört. Fiele der Körper aus der Höhe $h = 2R$ bis zum Centro selbst, so wäre $s = h$ und die Fallzeit $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$.

leicht einsehen, daß dieses hier nicht heißen kann, s könne nie größer als h werden, oder der Körper könne nicht über den Mittelpunct hinausgehen; vielmehr ist offenbar, daß seine im Mittelpuncte erlangte ungeheure Geschwindigkeit ihn über denselben hinausführt, und daß nun die Kraft, welche ihn zurück gegen den Mittelpunct treibt, seine Geschwindigkeit nach und nach eben so vermindert, wie die anziehende Kraft sie vorhin verstärkte, so daß die Geschwindigkeit vor der Ankunft im Centro und bei dem Hinausgehen über dasselbe in gleichen Entfernungen gleich ausfallen wird.

Daß dieses in der That so sei, und daß in unsrer Analysis nur darum dieses nicht hervortrete, weil in dem Ausdrucke für die Kraft das Quadrat von $(h-s)$ vorkömmt, läßt sich leicht zeigen. Die Kraft ist immer gegen den Mittelpunct wirkend, sie ist also keinesweges, wie ihr Werth $\frac{R^2}{(h-s)^2}$ anzugeben scheint, auch dann positiv oder die Bewegung beschleunigend, wenn $s > h$ oder der Körper schon über den Mittelpunct hinausgegangen ist; sondern die Natur der Sache fordert, daß wir die Kraft als negativ zu betrachten anfangen, sobald $h-s$ negativ wird. In unserer vorigen Reihen-Entwickelung läßt sich dies darstellen, wenn man die Eintheilung von s in n Theile so annimmt, daß der Mittelpunct der Kräfte mitten zwischen zwei Abtheilungen der $m$ten und der $(m+1)$ten fällt, ist nämlich $h = \frac{m+\frac{1}{2}}{n}s$ und $\frac{m+\frac{1}{2}}{n} < 1$, so würde

$$v^2 > 4gR^2 \cdot \frac{s}{n}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{(h-\frac{s}{n})^2} + \frac{1}{(h-\frac{2s}{n})^2} + \ldots \right.$$
$$\ldots + \frac{1}{(h-\frac{m-1}{n}s)^2} + \frac{1}{(h-\frac{m}{n}s)^2} - \frac{1}{(h-\frac{m+1}{n}s)^2}$$
$$\left. - \frac{1}{(h-\frac{m+2}{n}s)^2} \ldots\ldots - \frac{1}{(h-\frac{n-1}{n}s)^2}\right)$$

und auf ähnliche Weise würde die Reihe, welche $> v^2$ ist, ausgedrückt. Hier heben nun die Glieder

$$\frac{1}{(h-\frac{m}{n}s)^2} - \frac{1}{(h-\frac{m+1}{n}s)^2}$$ und eben so

nehme auf ihr $EG = gt^2$, gleich dem Raume, welchen ein frei fallender Körper in der Zeit $= t$ durchläuft: dann ist G der Punct, welchen der geworfene Körper am Ende der Zeit $= t$ erreicht hat.

Beweis. Da die Schwere, als eine nach verticaler Richtung wirkende Kraft, die horizontale Bewegung des Körpers weder beschleunigen noch verzögern kann: so ist es offenbar, daß der Körper in jeder gegebenen Zeit sich bis zu eben der Verticallinie fortbewegt hat, die er ohne Einwirkung der Schwere in eben der Zeit erreicht hätte. Seine verticale Bewegung dagegen wird durch die Schwere, welche auf bewegte und auf ruhende Körper ganz gleich einwirkt, eben so verzögert, wie es bei einem vertical aufwärts geworfenen Körper geschieht; sie zieht ihn nämlich in jedem Momente um eben so viel niederwärts, als einen ihrer Einwirkung ganz frei folgenden Körper; und der Körper befindet sich also in der verticalen Tiefe $= gt^2$ unter dem Puncte E, den er ohne Einwirkung der Schwere erreicht hätte.

§. 70. Diese geometrische Bestimmung läßt sich leicht in einer Formel darstellen, welche dann besser dient, um das Gesetz der ganzen Bewegung zu übersehen. Die Richtung der anfänglichen Bewegung sei unter dem Winkel $BAC = \alpha$ gegen den Horizont geneigt: so hat man für jede Zeit $= t$, die Entfernung $AE = c.t$, die horizontale Entfernung $AF = c.t.\text{Cos}\,\alpha$; die Höhe $FE = c.t.\text{Sin}\,\alpha$; also $FG = c.t.\text{Sin}\,\alpha - gt^2$, wenn g den Fallraum schwerer Körper in der ersten Secunde bedeutet.

§. 71. Aufgabe. Die Höhe zu bestimmen, in welcher der Körper, bei den eben angenommenen Bedingungen der Bewegung, sich befindet, wenn er eine gewisse horizontale Entfernung $= x$ vom Anfangspuncte der Bewegung erreicht hat.

Auflösung. Da die erlangte horizontale Entfernung in der Zeit $= t$, durch $= c.t.\text{Cos}\,\alpha$ ausgedrückt würde, wenn wir alle vorigen Bezeichnungen beibehalten,

so ist $c \cdot t \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = x$, oder es muß die Zeit $= t = \frac{x}{c\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$ verflossen sein, wenn der Körper eine gewisse horizontale Entfernung $= x$ soll erlangt haben. Da nun am Ende irgend einer Zeit $= t$, die erreichte Höhe des Körpers $= c.t.\mathrm{Sin}\,\alpha - g.t^2$ ist, so wird diese für $t = \frac{x}{c\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$ durch $x \tan\alpha - \frac{gx^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$ ausgedrückt.

§. 72. Aufgabe. Zu bestimmen 1, wenn und an welchem Orte der Körper seine größte Höhe erreicht, und 2, wenn und wo er zu der Horizontallinie wieder zurückkehrt, von welcher er ausgegangen war.

Auflösung. 1. Nenne ich die zu irgend einer Zeit erreichte Höhe $= y$, so ist $y = ct\,\mathrm{Sin}\,\alpha - gt^2$, oder $y = x.\tan\alpha - \frac{gx^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$, woraus, wenn man die quadratischen Gleichungen auflöset,

umgekehrt $t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g^2} - \frac{y}{g}\right)}$

$$\text{und } x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}{4g^2} - \frac{c^2\,y\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}{g}\right)}$$

folgt. Es würden also t sowohl als x unmögliche Werthe erhalten, wenn man $y > \frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g}$ setzen wollte, und folglich ist $y = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g}$ die größte Höhe, die der Körper erreicht. Wann er diese Höhe erreicht hat, wird durch $t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2g}$ bestimmt, und seine horizontale Entfernung von A ist, indem er diese Höhe erreicht, durch $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g}$ oder $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,2\alpha}{4g}$ ausgedrückt.

2. Wenn der Körper sich wieder in derselben Horizontallinie befinden soll, von welcher er ausgegangen war, so muß $y = 0$ sein. Aber $y = 0$ giebt

$$0 = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2\alpha},$$ also entweder $x = 0$, oder

$$\tan\alpha = \frac{gx}{c^2 \operatorname{Cos}^2\alpha},$$ das ist $$x = \frac{c^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha}{g}$$

$$= \frac{c^2 . \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g}.$$

In den beiden Puncten, welche durch diese Werthe von x bestimmt werden, schneidet die Curve die Horizontallinie AC, und diese Entfernungen $= x$ hat der Körper erreicht, die erste, wenn $t = 0$ ist, oder im Anfange der Bewegung; die andre, wenn $t = \frac{c \operatorname{Sin}\alpha}{g}$ ist; letzteres ist also die Zeit, welche der Körper gebrauchen würde, um wieder bis auf die Erde zu fallen, wenn er sich in A an der Oberfläche der Erde befand.

§. 73. Die größte Höhe, und die Zeit, wenn sie erreicht wird, hätte sich auch dadurch finden lassen, daß man bestimmte, wenn die immer verminderte verticale Geschwindigkeit ganz verschwindet; denn dann muß, indem der Körper zu steigen aufhört, sein Fallen wieder anfangen. Des Körpers verticale Geschwindigkeit ist $= c \operatorname{Sin}\alpha$ und diese wird eben so wie bei verticaler Bewegung in der Zeit $= t$ um $2gt$ vermindert, sie wird also durch $= c \operatorname{Sin}\alpha - 2g.t$ am Ende der Zeit $= t$, ausgedrückt, und verschwindet folglich, wenn $t = \frac{c \operatorname{Sin}\alpha}{2g}$, welches mit dem Vorigen übereinstimmt.

§. 74. Wir fanden die Weite des Wurfes auf der Horizontal-Ebne $= AC = \frac{c^2 . \operatorname{Sin} 2\alpha}{2g}$. Diese wird bei gleichen Werthen von c am größesten, wenn $\alpha =$ 45 Grade ist, indem dann $\operatorname{Sin} 2\alpha = 1$ wird. Für

Sechster Abschnitt.

Von der Bahn geworfener Körper, auf welche die Schwere wirkt.

§. 68. **Bemerkung.** Wenn ein Körper nach der Richtung AB geworfen wird, (Fig. 26.) und es wirkt auf ihn eine beschleunigende Kraft nach einer Richtung, die nicht mit AB übereinstimmt: so kann der Körper nicht der graden Linie AB folgen, sondern, indem die beschleunigende Kraft ihn nöthiget, von ihr abzuweichen, zwingt sie ihn, in einer gekrümmten Bahn fortzugehen.

Sind die Richtungen der beschleunigenden Kraft in allen den Orten, die der Körper bei seiner Bewegung erreicht, unter sich parallel: so ist es hier am bequemsten, die anfängliche Geschwindigkeit nach Richtungen, mit der Richtung der beschleunigenden Kraft parallel und auf die senkrecht, zu zerlegen, indem es einleuchtend ist, daß die beschleinigende Kraft nur eine Geschwindigkeit nach der Richtung hervorbringen oder zerstören kann, nach welcher sie wirkt, und folglich die auf die Richtung senkrechte Geschwindigkeit ganz ungeändert läßt.

§. 69. **Aufgabe.** Ein der Schwere unterworfener Körper wird mit einer Geschwindigkeit $= c$, nach der Richtung AB (Fig. 26.), die unter dem Winkel BAC gegen den Horizont geneigt ist, geworfen: man sucht eine Bestimmung für den Ort, welchen der Körper am Ende der Zeit $= t$ erreicht hat.

Auflösung. Man trage auf der anfänglichen Richtungslinie den Weg $= c.t = AE$ auf, den der Körper vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit ohne Einwirkung der Schwere würde durchlaufen haben; durch den so bestimmten Punct E ziehe man eine Verticallinie EF und

denn $\frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g}$ ist die Zeit, welche verflossen ist, indem der Körper im höchsten Puncte der Bahn ankömmt.

§. 76. Beispiele. Nach diesen Formeln sollte eine mit 2000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit $= c$ unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad abgeschossene Canonenkugel eine Höhe von 33112 Fuß erreichen, oder etwa $1\frac{1}{3}$ Meile steigen, und erst in einer Entfernung $= 132450$ Fuß oder $5\frac{1}{2}$ Meilen wieder auf die Erde fallen. Bei 3000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit und eben dem Richtungswinkel würde die größte Schußweite 298013 Fuß oder $12\frac{1}{2}$ Meilen betragen und die Kugel ginge bis zu 74500 Fuß oder 3 Meilen Höhe.

Anmerkung. Es ist bekannt, daß wir so große Entfernungen und Höhen bei weitem nicht mit unsern Canonenschüssen erreichen können. Der Widerstand der Luft ist die einzige Ursache dieser so stark verminderten Wirkung unsrer Schüsse.

§. 77. Aufgabe. Es ist die Entfernung $AD = a$ (Fig. 26.) und Höhe $DP = b$ nebst der anfänglichen Wurfgeschwindigkeit $= c$ gegeben; man sucht den Winkel $BAC = \alpha$, unter welchem der Körper muß geworfen werden, damit er den Punct P treffe.

Auflösung. Allgemein war (§. 72. 1.)

$$y = x \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha},$$ also hier, wo $y = b$ und $x = a$ gegeben ist,

$$b = a \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} = a \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2 \operatorname{Sec}^2 \alpha}{c^2}$$

$$= a \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2}{c^2}(1 + \operatorname{tang}^2 \alpha).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die unbekannte Größe $\operatorname{tang} \alpha$, durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\operatorname{tang}^2 \alpha - \frac{c^2}{ga} \cdot \operatorname{tang} \alpha = -1 - \frac{bc^2}{ga^2},$$

so ist $c \cdot t \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = x$, oder es muß die Zeit $= t = \frac{x}{c\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$ verflossen sein, wann der Körper eine gewisse horizontale Entfernung $= x$ soll erlangt haben. Da nun am Ende irgend einer Zeit $= t$, die erreichte Höhe des Körpers $= c \cdot t \cdot \mathrm{Sin}\,\alpha - g \cdot t^2$ ist, so wird diese für $t = \frac{x}{c\,\mathrm{Cos}\,\alpha}$ durch $x \,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$ ausgedrückt.

§. 72. Aufgabe. Zu bestimmen 1, wenn und an welchem Orte der Körper seine größte Höhe erreicht, und 2, wenn und wo er zu der Horizontallinie wieder zurück kehrt, von welcher er ausgegangen war.

Auflösung. 1. Nenne ich die zu irgend einer Zeit erreichte Höhe $= y$, so ist $y = ct\,\mathrm{Sin}\,\alpha - gt^2$, oder $y = x \cdot \mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$, woraus, wenn man die quadratischen Gleichungen auflöset,

umgekehrt $t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g^2} - \frac{y}{g}\right)}$

und $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}{4g^2} - \frac{c^2\,y\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}{g}\right)}$

folgt. Es würden also t sowohl als x unmögliche Werthe erhalten, wenn man $y > \frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g}$ setzen wollte, und folglich ist $y = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}^2\,\alpha}{4g}$ die größte Höhe, die der Körper erreicht. Wann er diese Höhe erreicht hat, wird durch $t = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{2g}$ bestimmt, und seine horizontale Entfernung von A ist, indem er diese Höhe erreicht, durch $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{2g}$ oder $x = \frac{c^2\,\mathrm{Sin}\,2\alpha}{4g}$ ausgedrückt.

2. Wenn der Körper sich wieder in derselben Hori-
ntallinie befinden soll, von welcher er ausgegangen war,
muß y = o sein. Aber y = o giebt

$$= x \tan\alpha - \frac{gx^2}{c^2 \cos^2\alpha}, \text{ also entweder } x = o, \text{ oder}$$

$$\text{ng}\,\alpha = \frac{gx}{c^2 \cos^2\alpha}, \text{ das ist } x = \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$= \frac{c^2 . \sin 2\alpha}{2g}.$$

In den beiden Puncten, welche durch diese Werthe
n x bestimmt werden, schneidet die Curve die Horizon-
llinie AC, und diese Entfernungen = x hat der Körper
reicht, die erste, wenn t = o ist, oder im Anfange
r Bewegung; die andre, wenn $t = \frac{c \sin\alpha}{g}$ ist; letz-
res ist also die Zeit, welche der Körper gebrauchen
ürde, um wieder bis auf die Erde zu fallen, wenn er
h in A an der Oberfläche der Erde befand.

§. 73. Die größte Höhe, und die Zeit, wenn sie
reicht wird, hätte sich auch dadurch finden lassen, daß
an bestimmte, wenn die immer verminderte verticale
eschwindigkeit ganz verschwindet; denn dann muß, in-
m der Körper zu steigen aufhört, sein Fallen wie-
r anfangen. Des Körpers verticale Geschwindigkeit ist
= c Sin α und diese wird eben so wie bei verticaler Be-
egung in der Zeit = t um 2gt vermindert, sie wird
so durch = c Sin α − 2g.t am Ende der Zeit = t
isgedrückt, und verschwindet folglich, wenn $t = \frac{c \sin\alpha}{2g}$,
elches mit dem Vorigen übereinstimmt.

§. 74. Wir fanden die Weite des Wurfes auf der
orizontal-Ebne $= AC = \frac{c^2 . \sin 2\alpha}{2g}$. Diese wird
i gleichen Werthen von c am größesten, wenn α =
5 Grade ist, indem dann Sin 2α = 1 wird. Für

andre Werthe von α wird diese Weite des Wurfes auf der horizontalen Ebne kleiner; erhält aber für die Winkel $= \alpha$ und $= 90^\circ - \alpha$ gleiche Werthe, oder erhält gleiche Werthe, wenn man den Winkel um gleich viel über oder unter 45 Grad nimmt.

§. 75. Wenn man (§. 72. 1.) t und x durch y bestimmt, so erhalten jene Größen einen doppelten Werth, weil das irrationale Glied das positive Zeichen so gut als das negative haben kann. Der kleinere dieser Werthe ergiebt, wenn und wo der Körper vor seinem höchsten Steigen die bestimmte Höhe erreicht, der größere, wenn und wo der Körper nach seinem höchsten Steigen wieder zu jener Höhe zurückkehrt.

Will man aus der Gleichung (§. 72.)

$$x = \frac{c^2 \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \alpha}{2g} \pm \frac{c \operatorname{Cos} \alpha}{2g} \sqrt{(c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha - gy)}$$

den Punct auftragen, über welchem sich der Körper befindet, indem er die gegebene Höhe $= y$ erreicht hat oder fallend zum zweiten Male erreicht; so muß man auf AC zuerst $AI = \frac{c^2 \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \alpha}{2g} = \frac{1}{2} AC$ oder gleich der Entfernung, in welcher der höchste Punct H der Bahn liegt, nehmen, und von da an

$IO = \frac{c \operatorname{Cos} \alpha}{2g} \sqrt{(c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha - 4g y)}$ vorwärts oder $IF = IO$ rückwärts auftragen. Hieraus ergiebt sich, daß die gleich hohen Puncte G, N in gleicher horizontaler Entfernung von dem höchsten Puncte liegen, und daß folglich die durch den höchsten Punct der Bahn gezogne Verticallinie HI die Curve in zwei symmetrische Hälften theilt.

Eben so zeigt der Werth für t

$$t = \frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}{4g^2} - \frac{y}{g}\right)},$$ an, daß die bestimmte Höhe $= y$, um eben so lange vor, als nach dem Eintreffen im höchsten Puncte erreicht wird,

denn $\frac{c \operatorname{Sin} \alpha}{2g}$ ist die Zeit, welche verflossen ist, indem der Körper im höchsten Puncte der Bahn ankömmt.

§. 76. Beispiele. Nach diesen Formeln sollte eine mit 2000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit = c unter dem Winkel α = 45 Grad abgeschossene Canonenkugel eine Höhe von 33112 Fuß erreichen, oder etwa $1\frac{1}{3}$ Meile steigen, und erst in einer Entfernung = 132450 Fuß oder $5\frac{1}{2}$ Meilen wieder auf die Erde fallen. Bei 3000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit und eben dem Richtungswinkel würde die größte Schußweite 298013 Fuß oder $12\frac{1}{2}$ Meilen betragen und die Kugel ginge bis zu 74500 Fuß oder 3 Meilen Höhe.

Anmerkung. Es ist bekannt, daß wir so große Entfernungen und Höhen bei weitem nicht mit unsern Canonenschüssen erreichen können. Der Widerstand der Luft ist die einzige Ursache dieser so stark verminderten Wirkung unsrer Schüsse.

§. 77. Aufgabe. Es ist die Entfernung AD = a (Fig. 26.) und Höhe DP = b nebst der anfänglichen Wurfgeschwindigkeit = c gegeben; man sucht den Winkel BAC = α, unter welchem der Körper muß geworfen werden, damit er den Punct P treffe.

Auflösung. Allgemein war (§. 72. 1.)

$$y = x \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha},$$ also hier, wo y = b und x = a gegeben ist,

$$b = a \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} = a \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2 \operatorname{Sec}^2 \alpha}{c^2}$$

$$= a \cdot \operatorname{tang} \alpha - \frac{ga^2}{c^2} (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die unbekannte Größe tang α, durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\operatorname{tang}^2 \alpha - \frac{c^2}{ga} \cdot \operatorname{tang} \alpha = -1 - \frac{bc^2}{ga^2},$$

welche $\tang\alpha = \frac{c^2}{2ga} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{4g^2 a^2} - 1 - \frac{bc^2}{ga^2}\right)}$
giebt.

Diese Formel findet auch da Anwendung, wo P tiefer als A oder unterhalb AC liegt, wo also b negativ ist.

§. 78. Die gefundenen zwei Werthe für $\tang\alpha$ zeigen, daß man den Punct P bei zwei verschiedenen Richtungen des anfänglichen Wurfs treffen kann.

Der Werth von $\tang\alpha$ wird unmöglich, wenn $\frac{c^4}{4g^2 a^2} < 1 + \frac{c^2 b}{g a^2}$; oder $c^4 < 4g^2 a^2 + 4gbc^2$ ist,
oder wenn $c^4 - 4gbc^2 < 4g^2 a^2$,

oder $c^4 - 4gbc^2 + 4g^2 b^2 < 4g^2 (a^2 + b^2)$

oder $c^2 - 2gb < 2g\sqrt{(a^2 + b^2)}$

oder $c^2 < 2g(b + \sqrt{(a^2 + b^2)})$ ist. Dieses hat darin seinen Grund, weil Höhe und Entfernung des gegebenen Punctes so groß sein könnten, daß sie bei der gegebenen Geschwindigkeit $= c$ unter keinem Neigungswinkel erreicht werden könnte.

Setzt man $c^2 = 2gb + 2g\sqrt{(a^2 + b^2)}$, so ist

$$\tang\alpha = \frac{b}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}.$$

Bei kleinern Werthen von c wird die Gleichung unmöglich.

Wir werden die Umstände, wenn dieses Unmöglich werden eintritt, noch näher untersuchen. (§. 88.)

§. 79. Aufgabe. Außer der Entfernung $AD = a$ und Höhe $DP = b$, wo der beim Wurfe zu treffende Gegenstand liegt, ist der Neigungswinkel $= \alpha$ der anfänglichen Richtung gegeben; man sucht, wie groß die Geschwindigkeit $= c$ sein müsse, damit der Gegenstand getroffen werde.

Auflösung. Die Gleichung §. 77.

$$b = a\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{g\,a^2}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\alpha}, \text{ giebt}$$

$$c^2 = \frac{g\,a^2}{a\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha - b\,\mathrm{Cos}^2\alpha}, \text{ wodurch}$$

bestimmt ist.

§. 80. c wird nur dann unmöglich, wenn $b\,\mathrm{Cos}\,\alpha > a\,\mathrm{Sin}\,\alpha$, oder $b > a\,\mathrm{tang}\,\alpha$; das ist, wenn der zu treffende Punct oberhalb der anfänglichen Richtungslinie liegt, in welchem Falle er freilich, wenn man den Werth von α nicht ändert, nicht kann getroffen werden.

§. 81. Bemerkung. Obgleich diese Sätze hinreichen, um alle Fragen zu beantworten, die hier vorzukommen pflegen, so zeigen sie uns doch noch nicht in der leichtesten Form das Gesetz, nach welchem die Wurflinie, — denn so können wir diese Curve am besten nennen, bestimmt wird.

Wir haben schon gesehen (§. 75.), daß die Verticallinie HI durch den höchsten Punct der Wurflinie, diese in zwei symmetrische Hälften theilt, und daraus läßt sich schon schließen, daß es eine bequemer zu übersehende Bestimmung der Curve giebt, wenn wir die horizontalen Entfernungen jedes Punctes in ihr von der verticalen Axe HI an rechnen. Die Angaben werden noch bequemer, wenn wir zugleich die Höhenbestimmung auf den höchsten Punct H zurück führen.

§. 82. Lehrsatz. Wenn man durch den höchsten Punct H der Wurflinie (Fig. 26.) eine Verticallinie zieht, und jedes andern Punctes P verticale Tiefe HL unter H und horizontalen Abstand = LP von HI bestimmt: so ist das Quadrat, welches diesen horizontalen Abstand LP zur Seite hat, allemal der verticalen Tiefe HL proportional.

Beweis. Da der Abstand des Anfangspunctes A

von der Verticallinie HI, oder $AI = \frac{c^2 \, \text{Sin}\, 2\alpha}{4g}$ (in §. 72. 1.), gefunden ist, so wird für irgend einen Punct P, dessen Abscisse AD = x war, $ID = x - \frac{c^2 \, \text{Sin}\, 2\alpha}{4g}$, welches ich = z nennen will. Die Höhe IH wurde $= \frac{c^2 \text{Sin}^2 \alpha}{4g}$ (in §. 72. 1.) gefunden, also ist eines Punctes P, dessen Höhe über I, = y war, Tiefe unter $H = \frac{c^2 \text{Sin}^2 \alpha}{4g} - y$; nennen wir dieses = u, so ist

$$u = \frac{c^2 \, \text{Sin}^2 \alpha}{4g} - y, \text{ also } y = \frac{c^2 \, \text{Sin}^2 \alpha}{4g} - u,$$

und da allgemein (§. 71.) die Höhe durch

$$y = x \,.\, \text{tang}\, \alpha - \frac{g\, x^2}{c^2 \, \text{Cos}^2 \alpha}$$ ausgedrückt wurde,

oder umgekehrt (§. 72.) die horizontale Entfernung durch

$$x = \frac{c^2 \, \text{Sin}\, 2\alpha}{4g} \pm \frac{c\, \text{Cos}\, \alpha}{\sqrt{g}} \sqrt{\left(\frac{c^2 \, \text{Sin}^2 \alpha}{4g} - y\right)},$$

$$\text{so ist } x - \frac{c^2 \, \text{Sin}\, 2\alpha}{4g} = z = \pm \frac{c\, \text{Cos}\, \alpha}{\sqrt{g}} \,.\, \sqrt{u},$$

$$\text{das ist } z^2 = \frac{c^2 \, u \, \text{Cos}^2 \alpha}{g}.$$

§. 83. Das Quadrat des horizontalen Abstandes z von der Axe HI ist also für alle Puncte der Curve gleich einem Rechteck aus der Tiefe = u unter dem höchsten Puncte und aus einer für alle Puncte gleich bleibenden Linie $= \frac{c^2 \, \text{Cos}^2 \alpha}{g}$.

§. 84. Erklärung. Die Curve, deren Abscissen HL auf der Axe HI vom Scheitel H an gerechnet, den Quadrate der auf sie senkrechten Ordinaten LP proportional sind, heißt die Parabel; die für alle Puncte gleich bleibende Linie $= \frac{c^2 \, \text{Cos}^2 \alpha}{g}$ heißt ihr Parameter.

§. 85. Bei der Wurflinie ist also der Parameter $= \frac{c^2 \cdot Cos^2 \alpha}{g}$ gleich der vierfachen Höhe, welche der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit, die $= c\, Cos\, \alpha$ war, gehören würde. (§. 33.)

§. 86. Anmerkung. Die Parabel ist eine von den Linien, die als Durchschnittslinien der Kegel-Oberfläche mit einer Ebne entstehen können. Zieht man nämlich in des graden Kegels Oberfläche eine grade Linie von der Spitze nach einem Puncte der Grundfläche, und legt mit ihr eine Ebne parallel: so ist dieser Ebne Durchschnittslinie mit der Kegelfläche eine Parabel.

§. 87. Bemerkung. Um die Wurflinie in allen Fällen zu zeichnen, dienen also folgende Regeln (Fig. 27.). Man trägt auf der durch A gezogenen Horizontallinie, wenn A der Punct ist, von wo aus mit der Geschwindigkeit $= c$ unter dem Neigungswinkel $= \alpha$ der Körper geworfen wird, die Entfernung $AI = \frac{c^2\, Sin\, \alpha \cdot Cos\, \alpha}{2g}$ auf, errichtet dort die Senkrechte $IH = \frac{c^2\, Sin^2\, \alpha}{4g}$ $= \frac{1}{2} \cdot AI \cdot tang\, \alpha$, oder zeichnet $MAI = \alpha$, und halbirt MI in H, um den höchsten Punct der Bahn zu finden. Ist so die Axe HI der Bahn und ihr höchster Punct bestimmt: so berechnet man den Parameter $= \frac{c^2\, Cos^2\, \alpha}{g} = p$, trägt auf die Axe von H her die Abscissen $Hd = p$, $Hh = 2p$; $Hp = 3p$ und die zugehörigen Ordinaten $dn = p$, $hr = p \cdot \sqrt{2}$, $pt = p \cdot \sqrt{3}$, $qv = 2p$ u. s. w. auf; oder zu den Abscissen $= \frac{1}{4}\, p$, $= \frac{1}{9}\, p$; $= \frac{4}{9}\, p$; die Ordinaten $= \frac{1}{2}\, p$; $= \frac{1}{3}\, p$; $= \frac{2}{3}\, p$ u. s. w.

§. 88. Bemerkung. Hier läßt sich nun auch etwas Näheres über die Umstände sagen, unter welchen es unmöglich wird, den in der Entfernung $= a$ und in der Höhe $= b$ liegenden Punct zu treffen, wenn die Geschwindigkeit gegeben ist. Wir fanden oben (§. 77.),

$\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} - FG$; oder da $FG = \frac{c^2 \, Sin^2 \alpha}{4g} - HN$

war (§. 72.), $\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2 \, Cos^2 \alpha}{4g} + HN$.

§. 91. Die Richtung der Bewegung in jedem Puncte G ist offenbar die Tangente der Wurflinie in diesem Puncte; denn sie ist diejenige Linie, auf welcher der Körper gradlinigt fortgehen würde, wenn die Kraft der Schwere in G aufhörte, auf ihn zu wirken. Die Tangente der Parabel an irgend einem Puncte schneidet also die Axe eben so hoch über dem Scheitel, als der Punct selbst unterhalb liegt, indem seine Tiefe = HN ist.

Siebenter Abschnitt.

Von der Bewegung im Kreise und von der Schwungkraft.

§. 92. Aufgabe. Ein Körper, der sich (Fig. 30.) auf der graden Linie ab mit der Geschwindigkeit = c fortbewegt, trifft in b auf die Ebne bc und ist genöthiget dieser zu folgen; eben so trifft er in c auf die Ebne cd, in d auf die Ebne de u. s. w.; welche Geschwindigkeit wird er auf jeder dieser Ebnen, deren Neigungswinkel gegen einander bekannt sind, haben.

Auflösung. Es sei cbf = α der Winkel, unter welchem die zweite Ebne gegen die erste geneigt ist, und eben so sei dcg = β, edh = γ für die folgenden Ebnen. Indem der Körper auf ab mit der Geschwindigkeit = c fortgeht, hat er eine mit bc parallele Geschwindigkeit = c Cos α und eine auf bc senkrechte Geschwindigkeit = c . Sin α. Die letztere wird, indem der Körper in b auf die Ebne bc übergeht, völlig aufgehoben, und der

Körper geht auf dieser Ebne mit der Geschwindigkeit $= c \, Cos \, \alpha$ fort. Zerlegt man diese Bewegung wieder nach Richtungen mit cd parallel und darauf senkrecht: so ist die mit cd parallele Geschwindigkeit $= c \, Cos \, \alpha . Cos \, \beta$; und da bei dem Uebergange auf die Ebne cd die gegen diese senkrechte Geschwindigkeit zerstört wird, so ist die Geschwindigkeit auf der Ebne cd nur noch $= c . Cos \, \alpha . Cos \, \beta$. Aus ähnlichen Gründen ist die Geschwindigkeit auf de noch $= c . Cos \, \alpha . Cos \, \beta . Cos \, \gamma$ u. s. w.

Wären alle Neigungswinkel gleich $= \alpha$, so würde die Geschwindigkeit auf der zweiten Ebne $= c . Cos \, \alpha$; auf der dritten $= c . Cos^2 \, \alpha$, auf der nten $= c . Cos^{n-1} \, \alpha$ sein, oder nach n Ablenkungen $= c . Cos^n \, \alpha$.

§. 93. Lehrsatz. Wenn (Fig. 31.) der Körper, auf den übrigens keine beschleunigenden Kräfte wirken, sich auf den Seiten eines gleichwinklichten Polygones fortbewegt, und bei dem Uebergange auf jede neue Seitenlinie den eben betrachteten Verlust an Geschwindigkeit leidet: so ist, bei gleicher gesammter Ablenkung von der anfänglichen Richtung, die Abnahme der Geschwindigkeit desto kleiner, je vielseitiger das Polygon ist, oder je mehr die Ablenkung allmählig hervorgebracht wird.

Beweis. Wenn die gesammte Ablenkung von der anfänglichen Richtung $= \beta$ heißt, oder der Winkel, welchen die erste und letzte Seite des polygonischen Bogens mit einander machen, $= \beta$ ist: so kann man sich immer ein gleichseitiges oder ungleichseitiges Polygon gezeichnet denken, dessen Seiten gegen einander unter gleichen Winkeln $= \frac{1}{n} \beta$ geneigt sind. Zeichnet man mehrere solche Polygone, wie ABCCCD., AEFFFGD (Fig. 31.), deren letzte Seiten dieselben sind: so ist die Geschwindigkeit in GD allemal $= c . Cos^n \frac{1}{n} \beta$, und fällt also verschieden aus für verschiedene Werthe von n, wenn sie in AE, $= c$ war. Die Abnahme der Geschwindigkeit ist also

$= c\,(1 - \mathrm{Cos}^n \frac{1}{n}\beta)$, und diese ist desto kleiner, je grösser n ist, indem $\mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta > \mathrm{Cos}\,\beta$, weil $\mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,\beta$, $\mathrm{Cos}^4 \frac{1}{4}\beta > \mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta$ u. s. w.

Um sich zu überzeugen, daß diese Verminderung der Abnahme der Geschwindigkeit, so weit als man verlangt, getrieben werden kann, braucht man nur zu überlegen, daß für den Neigungswinkel $= \frac{1}{n}\beta$ die Geschwindigkeit um $c\,(1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$ abnimmt, indem der Körper von der ersten Seite auf die zweite übergeht. Die jetzt noch übrige Geschwindigkeit $= c\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta$ geht in $= c\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{n}\beta$ über, indem der Körper auf die dritte Seite gelangt, und offenbar ist die jetzt erlittene Verminderung der Geschwindigkeit $= c\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta\,(1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$, geringer, als bei der ersten eben so starken Ablenkung, und folglich die Verminderung bei zwei Ablenkungen kleiner als $2.c.(1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$. So erhellt, daß, nach n Ablenkungen von der ersten Richtung, die Verminderung der Geschwindigkeit kleiner als $n.c.(1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$ ist, da bei jedem folgenden Winkel die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit immer kleiner wird. Bekanntlich ist (Fig. 32.) $\frac{ad}{ac} = 1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta$, wenn bd auf ac senkrecht und $acb = \frac{1}{n}\beta$. Zugleich ergiebt die Aehnlichkeit der Dreiecke abd, aeb, daß

$$ad : ab = ab : ae,$$

oder $ad : ab = ab : 2ac$,

das ist $ad = \frac{ab^2}{2ac}$ oder $\frac{ad}{ac} = \frac{ab^2}{2ac^2}$.

Die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit nach n Ablenkungen ist also kleiner als

$n.c.\frac{ad}{ac}$ oder kleiner als $n.c.\frac{ab^2}{2ac^2}$, folglich gewiß

$x = ct\ \mathrm{Cos}\,\alpha$, also $t = \frac{x}{c\ \mathrm{Cos}\,\alpha}$ und folglich

$$\mathrm{tang}\ oGn = \frac{c\ \mathrm{Sin}\,\alpha - \frac{2gx}{c\ \mathrm{Cos}\,\alpha}}{c\ \mathrm{Cos}\,\alpha} = \frac{c^2\ \mathrm{Sin}\,\alpha . \mathrm{Cos}\,\alpha - 2gx}{c^2\ \mathrm{Cos}^2\,\alpha}.$$

In §. 82. aber fanden wir für jeden Punct G der Bahn $GN^2 = \frac{c^2 . HN . \mathrm{Cos}^2\,\alpha}{g}$, wenn H der höchste Punct der Bahn, HN vertical und GN horizontal ist. Diese Gleichung giebt $\frac{HN}{GN}$ oder $\mathrm{tang}\ HGN = \frac{g . GN}{c^2\ \mathrm{Cos}^2\,\alpha}$; aber GN ist $= \frac{c^2\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} - x$ (nach §. 72., wo AI (Fig. 29.) $= \frac{c^2\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\alpha}{2g}$ ist), also

tang HGN

$$= \frac{g . \left(\frac{c^2\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\alpha}{2g} - x\right)}{c^2\ \mathrm{Cos}^2\,\alpha} = \frac{\frac{1}{2} c^2\ \mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Cos}\,\alpha - gx}{c^2\ \mathrm{Cos}^2\,\alpha}$$

das ist, wenn man den obigen Werth für tang oGn vergleicht, tang oGn = 2 . tang HGN oder wenn O der Einschnittspunct von Go auf der Axe ist, NO = 2 . HN.

Die Geschwindigkeit selbst war $= \sqrt{(c^2 - 4gct . \mathrm{Sin}\,\alpha + 4g^2 t^2)}$, das ist $= c\ \mathrm{Cos}\,\alpha . \mathrm{Sec}\ OGN$, indem

$$\mathrm{Sec}\ oGn = \frac{\sqrt{(c^2 - 4gt\ c\ \mathrm{Sin}\,\alpha + 4g^2 t^2)}}{c\ \mathrm{Cos}\,\alpha}$$ ist, also ist die Geschwindigkeit = Go, wenn $Gn = c\ \mathrm{Cos}\,\alpha$.

§. 90. Die Geschwindigkeit $= \sqrt{(c^2 - 4gct\ \mathrm{Sin}\,\alpha + 4g^2 t^2)}$ läßt sich, da (§. 71.) $FG = ct\ \mathrm{Sin}\,\alpha - gt^2$ ist, auch durch $v = \sqrt{(c^2 - 4g . FG)}$ ausdrücken, oder die Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit in jedem Puncte zugehört, ist

$\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} - FG$; oder da $FG = \frac{c^2 \,Sin^2 \alpha}{4g} - HN$ war (§. 72.), $\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2 \,Cos^2 \alpha}{4g} + HN$.

§. 91. Die Richtung der Bewegung in jedem Puncte G ist offenbar die Tangente der Wurflinie in diesem Puncte; denn sie ist diejenige Linie, auf welcher der Körper gradlinigt fortgehen würde, wenn die Kraft der Schwere in G aufhörte, auf ihn zu wirken. Die Tangente der Parabel an irgend einem Puncte schneidet also die Axe eben so hoch über dem Scheitel, als der Punct selbst unterhalb liegt, indem seine Tiefe = HN ist.

Siebenter Abschnitt.

Von der Bewegung im Kreise und von der Schwungkraft.

§. 92. **Aufgabe.** Ein Körper, der sich (Fig. 30.) auf der graden Linie ab mit der Geschwindigkeit = c fortbewegt, trifft in b auf die Ebne bc und ist genöthiget dieser zu folgen; eben so trifft er in c auf die Ebne cd, in d auf die Ebne de u. s. w.; welche Geschwindigkeit wird er auf jeder dieser Ebnen, deren Neigungswinkel gegen einander bekannt sind, haben.

Auflösung. Es sei $cbf = \alpha$ der Winkel, unter welchem die zweite Ebne gegen die erste geneigt ist, und eben so sei $dcg = \beta$, $edh = \gamma$ für die folgenden Ebnen. Indem der Körper auf ab mit der Geschwindigkeit = c fortgeht, hat er eine mit bc parallele Geschwindigkeit $= c \,Cos \,\alpha$ und eine auf bc senkrechte Geschwindigkeit $= c \,.\, Sin \,\alpha$. Die letztere wird, indem der Körper in b auf die Ebne bc übergeht, völlig aufgehoben, und der

Körper geht auf dieser Ebne mit der Geschwindigkeit $= c \operatorname{Cos} \alpha$ fort. Zerlegt man diese Bewegung wieder nach Richtungen mit cd parallel und darauf senkrecht: so ist die mit cd parallele Geschwindigkeit $= c \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$; und da bei dem Uebergange auf die Ebne cd die gegen diese senkrechte Geschwindigkeit zerstört wird, so ist die Geschwindigkeit auf der Ebne cd nur noch $= c . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta$. Aus ähnlichen Gründen ist die Geschwindigkeit auf de noch $= c . \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta . \operatorname{Cos} \gamma$ u. s. w.

Wären alle Neigungswinkel gleich $= \alpha$, so würde die Geschwindigkeit auf der zweiten Ebne $= c . \operatorname{Cos} \alpha$; auf der dritten $= c . \operatorname{Cos}^2 \alpha$, auf der nten $= c . \operatorname{Cos}^{n-1} \alpha$ sein, oder nach n Ablenkungen $= c . \operatorname{Cos}^n \alpha$.

§. 93. Lehrsatz. Wenn (Fig. 31.) der Körper, auf den übrigens keine beschleunigenden Kräfte wirken, sich auf den Seiten eines gleichwinklichten Polygones fortbewegt, und bei dem Uebergange auf jede neue Seitenlinie den eben betrachteten Verlust an Geschwindigkeit leidet: so ist, bei gleicher gesammter Ablenkung von der anfänglichen Richtung, die Abnahme der Geschwindigkeit desto kleiner, je vielseitiger das Polygon ist, oder je mehr die Ablenkung allmählig hervorgebracht wird.

Beweis. Wenn die gesammte Ablenkung von der anfänglichen Richtung $= \beta$ heißt, oder der Winkel, welchen die erste und letzte Seite des polygonischen Bogens mit einander machen, $= \beta$ ist: so kann man sich immer ein gleichseitiges oder ungleichseitiges Polygon gezeichnet denken, dessen Seiten gegen einander unter gleichen Winkeln $= \frac{1}{n} \beta$ geneigt sind. Zeichnet man mehrere solche Polygone, wie ABCCCD., AEFFFGD (Fig. 31.), deren letzte Seiten dieselben sind: so ist die Geschwindigkeit in GD allemal $= c . \operatorname{Cos}^n \frac{1}{n} \beta$, und fällt also verschieden aus für verschiedene Werthe von n, wenn sie in AE, $= c$ war. Die Abnahme der Geschwindigkeit ist also

$= c\,(1 - \mathrm{Cos}^n \frac{1}{n}\beta)$, und diese ist desto kleiner, je grösser n ist, indem $\mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta > \mathrm{Cos}\,\beta$, weil $\mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\beta$, $\mathrm{Cos}^4 \frac{1}{4}\beta > \mathrm{Cos}^2 \frac{1}{2}\beta$ u. s. w.

Um sich zu überzeugen, daß diese Verminderung der Abnahme der Geschwindigkeit, so weit als man verlangt, getrieben werden kann, braucht man nur zu überlegen, daß für den Neigungswinkel $= \frac{1}{n}\beta$ die Geschwindigkeit um $c\,(1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$ abnimmt, indem der Körper von der ersten Seite auf die zweite übergeht. Die jetzt noch übrige Geschwindigkeit $= c\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta$ geht in $= c\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{n}\beta$ über, indem der Körper auf die dritte Seite gelangt, und offenbar ist die jetzt erlittene Verminderung der Geschwindigkeit $= c\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta\,(1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$, geringer, als bei der ersten eben so starken Ablenkung, und folglich die Verminderung bei zwei Ablenkungen kleiner als $2 . c . (1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta)$. So erhellt, daß, nach n Ablenkungen von der ersten Richtung, die Verminderung der Geschwindigkeit kleiner als $n . c . (1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta$ ist, da bei jedem folgenden Winkel die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit immer kleiner wird. Bekanntlich ist (Fig. 32.) $\frac{ad}{ac} = 1 - \mathrm{Cos}\,\frac{1}{n}\beta$, wenn bd auf ac senkrecht und $acb = \frac{1}{n}\beta$. Zugleich ergiebt die Aehnlichkeit der Dreiecke abd, aeb, daß

$$ad : ab = ab : ae,$$

$$\text{oder } ad : ab = ab : 2ac,$$

$$\text{das ist } ad = \frac{ab^2}{2ac} \text{ oder } \frac{ad}{ac} = \frac{ab^2}{2ac^2}.$$

Die gesammte Verminderung der Geschwindigkeit nach n Ablenkungen ist also kleiner als

$$n . c . \frac{ad}{ac} \text{ oder kleiner als } n . c . \frac{ab^2}{2ac^2}, \text{ folglich gewiß}$$

-iner als $\frac{n.c.(\text{Bogen ab})^2}{2.ac^2}$. Da der Bogen ab zu -m Winkel $= \frac{1}{n}\beta$ gehört, so ist seine Länge $\frac{ac.\frac{1}{n}\beta.\pi}{180^\circ}$, wenn $\frac{1}{n}\beta$ in Graden ausgedrückt und die bekannte Zahl $= 3,14159$ ist; also die Verminde-ung der Geschwindigkeit $< \frac{n.c}{2} \cdot \frac{ac^2.\frac{1}{n^2}\beta^2\pi^2}{180^2.ac^2}$ oder $\frac{c.\beta^2\pi^2}{2.n.180^2}$ und diese Verminderung kann offenbar bis jeder gegebenen Grenze und über sie hinaus verkleinert -erden, wenn man n immer mehr vermehrt.

Zusatz für geübtere Leser.

Die Analysis lehrt, daß $\text{Cos}\frac{1}{n}\beta =$

$$1 - \frac{\frac{1}{n^2}\beta^2}{2} + \frac{\frac{1}{n^4}\beta^4}{2.3.4} - \frac{\frac{1}{n^6}.\beta^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc. und nach}$$

-m Polynomischen Lehrsatze ergiebt sich daraus $\left(\text{Cos}\frac{1}{n}\beta\right)^n =$

$$1 - \frac{\beta^2}{2n} + \left(\frac{1}{n^3.2.3.4} + \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{8}\right)\beta^4 + \text{etc.}$$

-o alle folgende Glieder eine höhere als die zweite Potenz von n -n Nenner haben. Hieraus ergiebt sich

$1 - \text{Cos}^n.\frac{1}{n}\beta = \frac{\beta^2}{2n}$, wenn man Glieder, die höhere -otenzen von n im Nenner enthalten, weg läßt. Daraus er-ellt, daß für immer größere Werthe von n $1 - \text{Cos}^n.\frac{1}{n}\beta$ -mmer kleiner wird, und $= 0$ wird, für $n = \infty$, wie es bei -etiger Krümmung der Fall ist.

§. 94. Lehrsatz. Wenn ein Körper sich ohne Ein-wirkung fremder Kräfte auf der stetig gekrümmten Linie

AB (Fig. 33.) fortbewegt: so bleibt seine Geschwindigkeit ungeändert.

Beweis. Wenn man sich an zwei Puncte A, C der Curve Tangenten AD, CD gezogen denkt, so giebt der Winkel CDE an, um wie viel sich die Richtung des Körpers auf seiner ganzen Bahn AC geändert hat. Denkt man sich um den Bogen AC ein Polygon gezeichnet, dessen n Seiten unter den gleichen Winkeln $= \frac{1}{n}$ CDE gegen einander geneigt wären, so daß die erste mit der Tangente AD, die letzte mit der Tangente DC zusammenfiele: so würde die Geschwindigkeit, welche Anfangs = c war, sich bis auf $= c . \mathrm{Cos}^n \frac{1}{n}$ CDE vermindert haben. Diese Verminderung wird immer unbedeutender, je größer die Anzahl der Polygonseiten ist, und durch Vermehrung der Seitenzahl kann man die Verminderung bis über jede gegebne Grenze verkleinern. Aber wie groß man auch die Anzahl der Seiten des Polygons nehmen mag, so ist doch immer ein vielseitigeres möglich, und die zwischen den Tangenten AD, CD liegende Curve, die sich an beide anschließt, wird immer noch eine geringere Verminderung der Geschwindigkeit geben, indem sie über jedes, wenn gleich noch so vielseitige Polygon, hinaus liegt, und auf ihr die Aenderungen der Richtung noch in unmerklichern Abstufungen erfolgen, als in irgend einem Polygone. Der Körper also, welcher die Curve selbst durchläuft, leidet gar keine Verminderung der Geschwindigkeit; denn da diese Verminderung schon auf den Polygonen von einer bestimmteren Anzahl Seiten kleiner werden kann, als irgend eine bestimmte Größe; so muß sie auf der Curve ganz verschwinden.

§. 95. Bemerkung. Wenn ein Körper auf der stetig gekrümmten Linie ACB (Fig. 33.) fortgeht, so behält er also seine Geschwindigkeit ungeändert; zugleich aber übt er einen Druck, der in jedem Puncte der Curve senkrecht gegen diese ist, aus, weil er immerfort das Be-

(§. 97.) $p = \frac{P}{M}$ und folglich $P = \frac{c^2 M}{2 g r}$, und dieses ist die gesammte Kraft, welche den Faden zu zerreißen strebt.

§. 101. Aufgabe. Auf einem Kreise von gegebenem Halbmesser $= r$, bewegt sich ein Körper; wie groß muß seine Geschwindigkeit $= c$ sein, damit die Beschleunigung durch die Schwungkraft, gleich der Beschleunigung durch die Schwere sei.

Auflösung. Da hier $p = 1$ sein soll, so muß $c^2 = 2 g r$ sein.

§. 102. Wenn ein Körper sich in einem Kreise bewegte, dessen Halbmesser $= r$ dem Halbmesser der Erde gleich ist: so wäre $c = \sqrt{2g.r}$ die erforderliche Geschwindigkeit, damit die Schwungkraft der Schwere gleich sei. Es wäre nicht grade nöthig, daß dieser Körper durch einen Faden festgehalten würde, sondern wenn er sich über einem größten Kreise der Erde frei fliegend fortbewegte, so würde die Schwere ihn in jedem Augenblicke gegen den Mittelpunct zu herabziehen, die Schwungkraft aber mit eben so vieler Gewalt ihn davon zu entfernen streben. Der Körper würde also mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{2g r}$, über einem größten Kreise der Erde fortfliegend, seinen Kreislauf um die Erde unaufhörlich fortsetzen, ohne auf die Erde zu fallen.

Da r ohngefehr $= 19630000$ Fuß ist, u. $g = 15,1$, so müßte die Geschwindigkeit $c = 24360$ Fuß in 1 Secunde sein, damit ein solcher nahe an der Oberfläche der Erde hinfliegender Körper nicht auf sie herabfalle.

§. 103. Lehrsätze. 1. Die Schwungkraft verhält sich direct wie das Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt wie der Halbmesser des durchlaufenen Kreises.

2. Die Schwungkraft wird ausgedrückt durch den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die der Ge-

Denn wenn man von E aus die zweite Tangente zieht, so ist gewiß der Bogen ABD kleiner als AE + oder 2AB < 2AE. (vergl. Geom. §. 258. 259.)

2. Wenn man vom einen Endpuncte B des Bo AB eine Senkrechte BF auf den nach dem andern puncte gezognen Radius AC zieht: so ist AF = wenn man hier unter AB die Sehne und unter r den messer des Kreises versteht.

Es ist nämlich $FC = r - AF$;

$$BF^2 = r^2 - FC^2 = 2r . AF - AF^2,$$

und $AB^2 = BF^2 + AF^2 = 2r . AF$,

oder $AF = \frac{AB^2}{2r}$.

3. Hieraus folgt, daß $AF < \frac{(\text{Bogen } AB)^2}{2r}$, der Bogen AB größer als seine Sehne ist.

4. Wenn man an einem Endpuncte A des Bo die Tangente AE zieht, und diese durch den nach dem dern Endpuncte des Bogens gezognen, verlängerten dius abschneidet: so ist das zwischen B und der Tang abgeschnittene Stück BE kleiner als $\frac{AE^2}{2r}$.

Es ist $CE^2 = r^2 + AE^2$, also $BE = \sqrt{(r^2 + AE^2)}$- nun ist $\sqrt{(r^2 + AE^2)} < r + \frac{1}{2}\frac{AE^2}{r}$, indem, w man die Quadrate nimmt,

$$r^2 + AE^2 < r^2 + AE^2 + \frac{1}{4}\frac{AE^4}{r^2}, \text{ ist;}$$

$$\text{also } BE < \frac{1}{2}\frac{AE^2}{r}.$$

§. 99. Lehrsatz. Wenn (Fig. 34.) ein Kör der durch den Faden AC genöthiget wird, in der un änderlichen Entfernung = AC vom Mittelpuncte C bleiben, sich auf dem Kreise ABD mit der Geschwind

it = c fortbewegt: so verhält sich die beschleunigende raft der Schwungkraft zur beschleunigenden Kraft der schwere, wie $\frac{c^2}{2gr}$ zu 1, wenn r des Kreises Halbmes- r und g den Fallraum in der ersten Secunde für einen r Schwere frei folgenden Körper bezeichnet.

Beweis. Wenn der Körper in einem kleinen Zeit- eile = t den Kreisbogen AB durchläuft, so ist dieser = c.t, weil die Bewegung gleichförmig ist, indem (§. 4.) die Geschwindigkeit des, bloß vermöge der Trägheit rtgehenden Körpers keine Aenderung leidet.

In A hatte der Körper die Richtung der Tangente E, und würde auf dieser fortgegangen sein, wenn nicht ie gegen den Mittelpunct ziehende Kraft ihn genöthiget ätte, der Kreislinie zu folgen. Diese Kraft hat also urch ihre, während der ganzen Zeit = t thätige Einwir- ung, ihn um so viel als die nach der Richtung der Kraft enommene Entfernung des Punctes B von der Tangente eträgt, von seinem Wege abgelenkt. Mißt man diese Entfernung, um welche der Körper von der Tangente ab- elenkt ist, nach der Richtung AC der im Anfange wir- enden Kraft, so wird sie durch = AF angegeben; mißt nan dagegen den Abstand von der Tangente nach der Richtung EC der am Ende wirkenden Kraft, so ist sie = EB. Da nun die Kraft während der verschiedenen Momente der Zeit = t immer gegen C gerichtet ist, so ist s irrig, wenn man jene Ablenkung ganz auf die anfäng- ich wirkende, aber auch irrig, wenn man sie ganz auf die am Ende wirkende Kraft bezieht, und wir müssen daher den Weg, um welchen diese während der Zeit = t wir- kende Kraft den Körper von seiner ursprünglichen Rich- tung abgelenkt hat, oder den Weg, den er vermöge die- ser Kraft in der Zeit = t durchlaufen hat, größer als AF und kleiner als EB ansehen.

Nenne ich die gegen den Mittelpunct treibende beschleu- igende Kraft, welcher offenbar die Schwungkraft gleich

ist, = p, oder setze ihr Verhältniß zur Schwere p : 1, so ist der Weg, durch welchen sie den Körp der Zeit = t treibt = $p.g.t^2$, weil die Schwere i eben der Zeit durch den Raum = $g.t^2$ treibt. (§. Dieser Weg ist aber > AF und < EB, wie klein auch die Zeit = t und folglich den Bogen AB m mag.

Da man (§. 98. No. 2. 3. 4.) $AF = \frac{(\text{Sehne}}{2r}$

und $EB < \frac{AE^2}{2r}$,

so ist $pgt^2 > \frac{(\text{Sehne AB})^2}{2r}$

und $pgt^2 < \frac{AE^2}{2r}$. Es ist aber auch

$$\frac{(\text{Bogen AB})^2}{2r} > \frac{(\text{Sehne AB})^2}{2r},$$

und $\frac{(\text{Bogen AB})^2}{2r} < \frac{AE^2}{2r}$, und folglich liegen p.

und $\frac{(\text{Bogen AB})^2}{2r}$ immer zwischen denselben Grenzen, klein man auch die Zeit und den Bogen nehme. E Größen, die allemal zwischen einerlei, einander so als man will rückenden Grenzen liegen, sind gleich; es ist folglich $p.g.t^2 = \frac{(\text{Bogen AB})^2}{2r} = \frac{c^2 t^2}{2r}$,

$p = \frac{c^2}{2gr}$, gleich der beschleunigenden Kraft, w auf jedes Theilchen des Körpers wirkt, um ihn unveränderlicher Entfernung von C zu halten, gleich der Schwungkraft, die als Gegenwirkung j gleich ist.

§. 100. Wenn man unter P die bewegen Kraft versteht, die bei der Schwungkraft wirksam und unter M die Masse des bewegten Körpers: so

(. 47.) $p = \frac{P}{M}$ und folglich $P = \frac{c^2 M}{2gr}$, und dies ist die gesammte Kraft, welche den Faden zu zerreißen strebt.

§. 101. Aufgabe. Auf einem Kreise von gegebenem Halbmesser $= r$, bewegt sich ein Körper; wie groß muß seine Geschwindigkeit $= c$ sein, damit die Beschleunigung durch die Schwungkraft, gleich der Beschleunigung durch die Schwere sei.

Auflösung. Da hier $p = 1$ sein soll, so muß $c^2 = 2gr$ sein.

§. 102. Wenn ein Körper sich in einem Kreise bewegte, dessen Halbmesser $= r$ dem Halbmesser der Erde gleich ist: so wäre $c = \sqrt{2g.r}$ die erforderliche Geschwindigkeit, damit die Schwungkraft der Schwere gleich sei. Es wäre nicht grade nöthig, daß dieser Körper durch einen Faden festgehalten würde, sondern wenn er sich über einem größten Kreise der Erde frei fliegend fortbewegte, so würde die Schwere ihn in jedem Augenblicke gegen den Mittelpunct zu herabziehen, die Schwungkraft aber mit eben so vieler Gewalt ihn davon zu entfernen streben. Der Körper würde also mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.r}$, über einem größten Kreise der Erde fortfliegend, seinen Kreislauf um die Erde unaufhörlich fortsetzen, ohne auf die Erde zu fallen.

Da r ohngefehr $= 19630000$ Fuß ist, u. $g = 15,1$, so müßte die Geschwindigkeit $c = 24360$ Fuß in 1 Secunde sein, damit ein solcher nahe an der Oberfläche der Erde hinfliegender Körper nicht auf sie herabfalle.

§. 103. Lehrsätze. 1. Die Schwungkraft verhält sich direct wie das Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt wie der Halbmesser des durchlaufenen Kreises.

2. Die Schwungkraft wird ausgedrückt durch den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die der Ge-

schwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{c^2}{g4}$ mit dem Halbmesser des Kreises dividirt.

3. Wenn ein Körper, dessen Masse $= M$ i mit der Geschwindigkeit $= c$ auf einem Kreise von messer $= r$ fortbewegt, und M', c', r' haben für andern Körper eben die Bedeutungen, so ist das V niß der den Faden spannenden Kräfte oder das V niß der gesammten bewegenden Kräfte, zusamme aus dem directen Verhältnisse der Massen, dem t Verhältnisse des Quadrates der Geschwindigkeiten dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser, ode Kräfte verhalten sich wie $\frac{M\,c^2}{r}$ zu $\frac{M'\,c'^2}{r'}$.

Die Beweise sind schon im Vorigen enthalten.

§. 104. Lehrsatz. Wenn zwei Körper sich in sen von ungleichen Halbmessern bewegen, so sind t wegenden Kräfte P, P' der Schwungkraft, dire Massen, direct den Halbmessern der Kreise, und kehrt den Quadraten der Umlaufszeiten proportional.

Beweis. Es sei T die Umlaufszeit des Kö der mit der Geschwindigkeit $= c$ den Kreis vom messer $= r$ durchläuft, so ist der in der Zeit $= T$ laufene Weg $= 2r \cdot \pi$, also $T = \frac{2r \cdot \pi}{c}$, oder

$c = \frac{2r \cdot \pi}{T}$ und (§. 100.) $\frac{c^2\,M}{2r\,g} = \frac{2r \cdot \pi^2\,M}{g\,T^2} =$

Eben so ist für den andern Körper, wenn M', r', ' übereinstimmende Bedeutung haben, $P' = \frac{2 \cdot r' \cdot \pi^2}{g \cdot T'}$ woraus die Richtigkeit des Lehrsatzes hervorgeht.

§. 105. Sollte hier $\frac{P}{M} = 1$ sein, so wäre

$T^2 = \frac{2r\pi^2}{g}$. Ein Körper also, der nahe über der fortfliegend frei seinen Kreis durchlaufen, oder durch

hwungkraft grade genau am Fallen gehindert werden
te, müßte eine Umlaufszeit $= T = \pi \sqrt{\frac{2r}{g}}$ haben,
n man für r den Halbmesser der Erde setzte. Da der
rchmesser des Aequators = 6543210 Toisen, also sein
lbmesser = 19629630 Fuß ist, wofür ich 19630000
, so ist $T = \pi . \sqrt{\frac{39260000}{15,1}} = 5034$ Secunden,
r ohngefehr = 1 Stunde 24 Min., und in so kurzer
t müßte ein nahe über der Oberfläche der Erde hin-
fender Mond einen Umlauf vollenden, wenn nicht die
aft der Schwere ihn aus seiner Bahn herabziehen und
die Erde fallend machen sollte.

Achter Abschnitt.

Vom einfachen Pendel.

106. Erklärung. Wenn ein der Schwere unter-
rfener Körper A (Fig. 34.) vermittelst eines Fadens
er dünner Stange an den festen Mittelpunct C geknüpft
, so daß der Körper, indem die Schwere ihn herab-
rts treibt, wenn er von der Verticallinie CG entfernt
r, genöthigt ist, auf dem Kreisbogen ABG fortzu-
gen, so heißt diese Vorrichtung ein Pendel.

§. 107. Wenn das Pendel von der Verticallinie
G, in welcher es ruhen würde, entfernt und in eine
ge, wie CA gebracht wird: so wird der Körper A, ver-
öge seiner Schwere, mit beschleunigter Bewegung auf
G herabfallen; er wird in G mit einer gewissen Ge-
schwindigkeit ankommen und vermöge dieser Geschwindig-
keit über G hinaus nach H zu gehen, wo er aber, weil
die Schwere seiner Bewegung entgegen wirkt, nach und
nach seine Geschwindigkeit verliert, gegen G zurück zu ge-

hen anfängt, und so seine Bewegung in abwechselnden Hingängen und Rückgängen fortsetzt.

§. 108. Erklärung. Diese Bewegung heißt die Schwingungsbewegung des Pendels; ein einzelner solcher Hingang oder ein einzelner Rückgang heißt eine ganze Pendel-Schwingung, oder wenn sie sehr klein ist, wenn nämlich das Pendel nur wenig aus der verticalen Lage gerückt war und folglich sehr kleine Hin- und Hergänge macht, eine Oscillation des Pendels.

§. 109. Erklärung. Das Pendel heißt ein einfaches Pendel, wenn bloß ein Punct A desselben als der Schwere unterworfen betrachtet wird. Die in der Wirklichkeit vorkommenden Pendel, bei denen nicht bloß jeder Punct des Körpers A, sondern auch der Faden oder die Stange CA der Schwere unterworfen ist, heißen zusammengesetzte Pendel.

Wir sehen für jetzt das Pendel als ein einfaches an, indem wir bloß A als einen schweren Punct, und die übrigen Puncte dagegen als der Schwere nicht unterworfen betrachten.

§. 110. Bemerkung. Wenn ein der Schwere unterworfener Körper auf der Ebne ab (Fig. 35.) ohne anfängliche Geschwindigkeit herabsinkt: so erlangt er (§. 49.) in b eben die Geschwindigkeit, die er bei freiem Falle in e, welcher Punct mit b in einerlei Horizontale liegt, erlangt hätte. Ginge er nun mit dieser schon erlangten unverminderten Geschwindigkeit $= 2 \cdot \sqrt{g \cdot ae}$ auf die Ebne bc über, so hätte er in c die Geschwindigkeit $= v = 2\sqrt{g \cdot ae} + 2gt \cdot \text{Sin}\, bcf$, wenn cf horizontal und t die zu dem Falle durch bc verwandte Zeit ist. In dieser Zeit ist der durchlaufene Weg

$$bc = 2t\sqrt{g \cdot ae} + gt^2\, \text{Sin}\, bcf,$$

$$\text{also}\quad t^2 + \frac{2t\sqrt{\frac{ae}{g}}}{\text{Sin}\, bcf} = \frac{bc}{g \cdot \text{Sin}\, bcf}.$$

$$\text{s ist } t = -\frac{\sqrt{\frac{ae}{g}}}{\text{Sin bcf}} + \sqrt{\left(\frac{bc \,.\, \text{Sin bcf} + ae}{g \,.\, \text{Sin}^2 \text{bcf}}\right)},$$

$$\text{oder } t = -\frac{\sqrt{ae}}{\sqrt{g} \,.\, \text{Sin bcf}} + \sqrt{\left(\frac{ef + ae}{g \,.\, \text{Sin}^2 \text{bcf}}\right)}$$

glich $v = 2\sqrt{g} \,.\, \sqrt{(ef + ae)} = 2\sqrt{g \,.\, af}$.

ie Geschwindigkeit würde also in e eben so groß sein, die, welche ein von a bis zu der Horizontallinie fe frei abfallender Körper in f erlangt hätte. Und so läßt sich ner zeigen, daß der auf den aneinander gefügten Ebnen abfallende Körper in jedem Puncte d die seiner vertica- Tiefe unter dem Anfangspuncte entsprechende Ge- windigkeit $= 2\sqrt{g \,.\, ag}$ würde erreicht haben, wenn er e Verlust an Geschwindigkeit von einer Ebne zur an- n hinüberginge.

§. 111. Lehrsatz. Wenn ein schwerer Körper auf stetig gekrümmten Linie AC (Fig. 36.) vom Puncte A sich ohne anfängliche Geschwindigkeit herabbewegt: so t er in jedem Puncte C völlig eben die Geschwindigkeit angt, die er bei freiem Falle von A aus, in dem, mit auf einerlei Horizontallinie liegenden Puncte D erlangt tte.

Beweis. Da bei der krummlinigten Bewegung . 94.) kein Verlust an Geschwindigkeit Statt findet, ob- ich der bewegte Körper seine Richtung ändert: so ist r, daß der im letzten §. als hypothetisch gesetzte Fall, e wirklich eintritt. Der Körper erlangt also in jedem uncte C die Geschwindigkeit oder geht in C auf der mmen Linie mit der Geschwindigkeit fort, die er bei dem Falle bis zu dieser Tiefe unter dem Anfangspuncte rde erreicht haben.

§. 112. Bemerkung. Dieser Satz könnte in nchen Fällen zu sehr bequemer Darstellung der Zeit die- n, die der Körper gebraucht, um gewisse Theile seines eges zu durchlaufen.

Zeichnet man nämlich, so wie in §. 60. (Fig. 36.), e Curve, deren Abscissen ac gleich den vom fallenden

Fläche aghc der auf dem Wege = ac verwend
proportional.

Wenn ich die anfängliche Geschwindigkeit in
Höhe = GA = $\frac{c^2}{4g}$ zugehörend ansetze, so w
die Geschwindigkeit (§. 50.) = $2\sqrt{g.GD}$; in
schwindigkeit = $2\sqrt{g.GF}$ sein; und die Curve
völlig bestimmt, wenn man die Abscissen ac = 2
die Ordinaten aber als der Geschwindigkeit
proportional auftrüge. Aber hier entstände
Schwierigkeit, wenn die anfängliche Gesch
= o ist; denn dann müßte ag = $\frac{a^2}{o}$ = unen
(vergl. Trig. §. 43.) und es würde nun nicht n
lich sein, den Flächenraum (Fig. 37.) mit ein
tigkeit auszurechnen. Es ist zwar einleuchtend,
ser Flächenraum, obgleich er sich unendlich in
ausdehnt, doch nicht grade ungeheuer groß zu sei
Denn befolgte zum Beispiel die Curve das Gesetz
ap = ai = ki = kl = der Linie a, der Flä
iknm = $\frac{2}{3}a^2$; klon = $\frac{4}{9}a^2$ u. s. w. jeder
folgende = $(\frac{2}{3})^n a^2$ wäre: so ist einleuchtend,
ins Unendliche sich ausdehnende Flächenraum

angt ist, leicht bestimmen können, um wieviel er vermöge einer Geschwindigkeit in einer Secunde nach einer dem Halbmesser AC parallelen Richtung fortrücken würde. Da der Körper in P die Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.a.p}$ hat, so würde er, wenn er nicht genöthigt wäre, der Kreisbahn zu folgen, auf der Tangente PQ den Raum $PQ = \sqrt{2g.a.p}$ in 1 Secunde zurücklegen, und folglich nach einer mit AC parallelen Richtung um PR fortgerückt sein. Es ist aber

$$PQ : PR = PC : PM,$$

$$\text{oder } \sqrt{2g.a.p} : PR = a : PM,$$

$$\text{folglich } PR = PM . \sqrt{\frac{2gp}{a}},$$

also die mit AC parallele Geschwindigkeit des im Kreise bewegten Körpers allemal $= v$, derjenigen Geschwindigkeit gleich, die der auf AC fortgehende angezogene Körper hat. Wenn also beide Körper zugleich von A ausgehen, so werden sie, weil ihr mit AC paralleles Fortrücken immer gleich viel beträgt, so mit einander fortgehen, daß sie sich immer beide in derselben gegen AC senkrechten Linie PM, QS u. s. w. befinden.

§. 118. Lehnsatz. Wenn ein Körper durch eine, den Abständen von C proportionale Kraft gegen C hin angezogen wird, und von A an, ohne anfängliche Geschwindigkeit, seine Bewegung anfängt: so ist, wenn alle Bezeichnungen so bleiben, wie im vorigen §., die Zeit, in welcher der Körper von A nach C gelangt,

$$= \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2gp}}, \text{ wenn } \pi \text{ die bekannte Zahl} = 3,14159\ldots$$

bedeutet.

Beweis. Wir haben eben gesehen, daß der Körper, welcher von A nach C angezogen wird, den Weg AC in eben der Zeit durchläuft, in welcher ein mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.a.p}$ auf dem Kreise fortgehende Körper den Quadranten APD durchläuft. Der letztere macht den Weg $= APD = \tfrac{1}{2} a \pi$ in der Zeit

$t = \frac{\frac{1}{2} a \pi}{\sqrt{2g \cdot ap}} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2g \cdot p}}$; in eben der Zeit gelangt also der angezogne Körper von A nach C.

§. 119. Jener angezogene Körper geht mit beschleunigter Bewegung bis in C fort; bei seinem Fortgange über C hinaus, nimmt seine Geschwindigkeit ab, und verschwindet in B, wo CB = AC ist. Die gegen C anziehende Kraft treibt dann den Körper wieder gegen C zu, und er wird unaufhörlich zwischen A und B hin und hergehen. Stellen wir uns zugleich den im Kreise mit der vorhin erwähnten Geschwindigkeit gehenden Körper vor, so gehen beide zugleich von A aus, gelangen am Ende der Zeit $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ nach C und nach D, und kommen am Ende der Zeit $= \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ wieder in B zusammen. Dann geht der im Kreise laufende auf dem andern Halbkreise BEA und der angezogne Körper auf dem Durchmesser BA in gleicher Zeit nach A zurück, und dieser Kreislauf des einen könnte, so wie das Hin- und Hergehen des andern unaufhörlich fortdauern.

§. 120. Diese Sätze zeigen, woher es kömmt, daß die zu bestimmten Wegen verwandte Zeit bei einer Kraft, die immer dem bis an C noch übrigen Wege proportional ist, mit der Zeit, die ein im Kreise laufender Körper gebraucht, kann verglichen werden. Es kömmt nämlich daher, weil die Geschwindigkeit der Ordinate dieses Kreises proportional ist.

§. 121. Lehrsatz. Die Zeit einer halben Pendelschwingung, oder die Zeit, in welcher das Pendel den Weg AB durchläuft, wenn in A die Geschwindigkeit = 0 war, ist sehr nahe $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$, wenn der Bogen AB sehr klein und die Länge des Pendels = a ist. (Fig. 38.)

Beweis. Indem der Körper sich in c befindet, übt die Schwere, deren Kraft ich = 1 setze, eine nach der

Dieser Formel kann, da sie nicht negativ werden darf, Genüge geschehen, wenn zugleich $\text{Cos}^2 \varphi > \frac{1}{4}$
und $\text{Cos}^2 \varphi < \frac{1}{2}$ ist, oder
φ zwischen 45 Graden und 60 Graden liegt.

Wäre z. B. $\text{Cos}^2 \varphi = \frac{1}{3}$, so würde der Körper auf ABC schneller als auf AC nach C gelangen, wenn
$a < \frac{w \cdot \sqrt{3}}{4}$ ist.

§. 116. Hieraus erhellt die Möglichkeit, daß vielleicht der auf dem Kreisbogen AB herabgehende Körper schneller nach B gelangen könne, als der auf der Sehne AB herabfallende Körper.

§. 117. Lehnsatz. Wenn ein Körper (Fig. 40.) gegen den Mittelpunct C mit einer Kraft angezogen wird, die der Entfernung vom Mittelpuncte direct proportional, und $= p$ ist in der Entfernung $CA = a$, so bewegt er sich, wenn die Bewegung gegen den Mittelpunct, in A ohne anfängliche Geschwindigkeit begann, auf dem Durchmesser AB so fort, daß ein den Kreis ADB durchlaufender Körper ihn immer begleiten, oder sich mit ihm in einerlei Ordinate PM befinden würde, wenn das letztern Geschwindigkeit immer gleich und so groß wäre, als diejenige, welche der andre Körper im Centro erlangt hat.

Beweis. Wenn der von A gegen C angezogene Körper in der Zeit $= t$ von A nach M gelangt ist: so behauptet der Lehrsatz, daß der im Kreise gleichförmig bewegte Körper allemal von A nach P, als dem in der senkrechten Ordinate durch M liegenden Puncte gekommen sei, und so den auf AB fortgehenden Körper während seiner ganzen Bewegung begleite.

Ist der angezogene Körper nach M gekommen, und nenne ich den durchlaufenen Weg $AM = s$, AC aber $= a$: so ist $CM = a - s$, und die in M auf ihn wirkende Kraft verhält sich zu p, wie die Entfernung $= (a - s)$: a, weil die Kräfte den Entfernungen direct proportional sind, und in der Entfernung $= a$ die Kraft $= p$ ist.

In M also ist die beschleunigende Kraft $= \frac{p \cdot (a-s)}{a}$, und hiernach könnte die Scale der wirkenden Kräfte amC gezeichnet werden. Man zeichnet diese am besten so (§. 61.), daß man die Ordinaten Aa, Mm doppelt so groß als die Geschwindigkeiten nimmt, welche von den darzustellenden Kräften in einer Secunde hervorgebracht würden. Diese Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde würde $= 2gp$ sein, für die Kraft $= p$, sie würde $= 2g \cdot \frac{p \cdot (a-s)}{a}$ sein für die Kraft $= \frac{p \cdot (a-s)}{a}$ u. s. w. Nimmt man also die Abscissen AM $= s$, und zeichnet die Ordinaten Aa $= 4gp$; Mm $= \frac{4gp(a-s)}{a}$, so erhält man die Scale amC der beschleunigenden Kräfte, die hier eine grade Linie wird, und der trapezische Raum AamM ist (§. 61.) AamM $= v^2$, wenn v die in M erlangte Geschwindigkeit bedeutet. Es ist also

$$v^2 = 4gp\left(\frac{1 + \frac{a-s}{a}}{2}\right)s = \frac{2gp}{a}(2a-s)\,s.$$

Zeichnet man mit dem Halbmesser CA um C einen Kreis APDB, so ist bekanntlich

AM : MP = MP : MB,

oder S : MP = MP : 2a — s,

also $v^2 = \frac{2gp}{a} \cdot MP^2$, oder $v = MP \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot p}{a}}$, welche im Mittelpuncte $= a\sqrt{\frac{2gp}{a}}$ wird, und hier ihren größten Werth erreicht, weil, wenn der Körper über C hinausgeht, die nach C ziehende Kraft seine Geschwindigkeit vermindert.

Denken wir uns nun einen mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $= a\sqrt{\frac{2gp}{a}} = \sqrt{2gap}$ auf dem Kreise ADB fortgehenden Körper, so werden wir, wenn er in P ange-

ingt ist, leicht bestimmen können, um wieviel er vermöge iner Geschwindigkeit in einer Secunde nach einer dem Halbmesser AC parallelen Richtung fortrücken würde. Da er Körper in P die Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.a.p}$ hat, so würde er, wenn er nicht genöthigt wäre, der Kreisbahn u folgen, auf der Tangente PQ den Raum $PQ = \sqrt{2g.a.p}$ n 1 Secunde zurücklegen, und folglich nach einer mit AC parallelen Richtung um PR fortgerückt sein. Es ist aber

$$PQ : PR = PC : PM,$$

oder $\sqrt{2g.a.p} : PR = a : PM,$

folglich $PR = PM . \sqrt{\frac{2gp}{a}},$

also die mit AC parallele Geschwindigkeit des im Kreise bewegten Körpers allemal = v, derjenigen Geschwindigkeit gleich, die der auf AC fortgehende angezogene Körper hat. Wenn also beide Körper zugleich von A ausgehen, so werden sie, weil ihr mit AC paralleles Fortrücken immer gleich viel beträgt, so mit einander fortgehen, daß sie sich immer beide in derselben gegen AC senkrechten Linie PM, QS u. s. w. befinden.

§. 118. Lehnsatz. Wenn ein Körper durch eine, den Abständen von C proportionale Kraft gegen C hin angezogen wird, und von A an, ohne anfängliche Geschwindigkeit, seine Bewegung anfängt: so ist, wenn alle Bezeichnungen so bleiben, wie im vorigen §., die Zeit, in welcher der Körper von A nach C gelangt,

$= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$, wenn π die bekannte Zahl $= 3,14159\ldots$ bedeutet.

Beweis. Wir haben eben gesehen, daß der Körper, welcher von A nach C angezogen wird, den Weg AC in eben der Zeit durchläuft, in welcher ein mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{2g.a.p}$ auf dem Kreise fortgehender Körper den Quadranten APD durchläuft. Der letztere macht den Weg $= APD = \frac{1}{2} a \pi$ in der Zeit

$t = \frac{\frac{1}{2} a \pi}{\sqrt{2g \cdot ap}} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2g \cdot p}}$; in eben der Zeit gelangt also der angezogne Körper von A nach C.

§. 119. Jener angezogene Körper geht mit beschleunigter Bewegung bis in C fort; bei seinem Fortgange über C hinaus, nimmt seine Geschwindigkeit ab, und verschwindet in B., wo CB = AC ist. Die gegen C ziehende Kraft treibt dann den Körper wieder gegen C zu, und er wird unaufhörlich zwischen A und B hin und hergehen. Stellen wir uns zugleich den im Kreise mit der vorhin erwähnten Geschwindigkeit gehenden Körper vor, so gehen beide zugleich von A aus, gelangen am Ende der Zeit $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ nach C und nach D, und kommen am Ende der Zeit $= \pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ wieder in B zusammen. Dann geht der im Kreise laufende auf dem andern Halbkreise BEA und der angezogne Körper auf dem Durchmesser BA in gleicher Zeit nach A zurück, und dieser Kreislauf des einen könnte, so wie das Hin- und Hergehen des andern unaufhörlich fortdauern.

§. 120. Diese Sätze zeigen, woher es kömmt, daß die zu bestimmten Wegen verwandte Zeit bei einer Kraft, die immer dem bis an C noch übrigen Wege proportional ist, mit der Zeit, die ein im Kreise laufender Körper gebraucht, kann verglichen werden. Es kömmt nämlich daher, weil die Geschwindigkeit der Ordinate dieses Kreises proportional ist.

§. 121. Lehrsatz. Die Zeit einer halben Pendelschwingung, oder die Zeit, in welcher das Pendel den Weg AB durchläuft, wenn in A die Geschwindigkeit = 0 war, ist sehr nahe $= \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$, wenn der Bogen AB sehr klein und die Länge des Pendels = a ist. (Fig. 38.)

Beweis. Indem der Körper sich in c befindet, übt die Schwere, deren Kraft ich = 1 setze, eine nach der

digkeit $= 2\sqrt{g.LB}$, so ist die auf den Bogen KB verwandte Zeit $= \frac{\frac{1}{2}\pi \text{ Bogen KB}}{2\sqrt{g.LB}}$, oder da Bogen KB $= 2\sqrt{2r.LB}$ ist, die Zeit $= \frac{\pi\sqrt{2r.LB}}{2\sqrt{g.LB}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$. Diese Zeit ist also immer gleich, man mag den Körper von A an, von K an oder von P an auf der Cycloide herablaufen lassen, denn die Formel für die Zeit hängt gar nicht von der Länge des Bogens ab.

Die Cycloide heißt um dieser Eigenschaft willen eine tautochronische Curve, das ist eine Curve von immer gleicher Fallzeit, der Bogen sei welcher er wolle.

Diese Gleichheit der Zeiten hängt davon ab, daß, wenn der Körper von A an zu fallen anfängt, er wegen der starken Neigung der Curve sogleich eine erhebliche Geschwindigkeit erlangt, also den folgenden Bogen z. B. KB mit weit größerer Schnelligkeit durchläuft, als er ihn durchlaufen würde, wenn er erst in K seine Bewegung anfinge. Diese größere Schnelligkeit ersetzt grade die Zeit, welche zum ersten Theile des Bogens verwandt ist.

§. 126. Die eben angeführten Eigenschaften der Cycloide ließen sich auch hier wohl strenge beweisen, wenn ich nicht fürchtete, zu ausführlich zu werden. Schwerer mögte es sein, hier die Gründe anzugeben, warum die Cycloide auch die Linie des schnellsten Falles oder die Brachystochrone ist. Verlangt man nämlich für zwei in derselben Vertical-Ebne liegende Puncte, die weder vertical über, noch horizontal neben einander liegen, die Linie zu bestimmen, auf welcher der fallende Körper am schnellsten vom einen zum andern gelangt: so ist auch diese Linie die Cycloide.

Zusätze für geübtere Leser.

Die Gleichung für die Cycloide war (Statik. §. 220.)

$y = r \cdot \text{Arc. Sin}\left(\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}\right) - \sqrt{(2rx - x^2)}$ und

die dem Körper, da wo die Kraft = o wird, die Geschwindigkeit = $2 . \sqrt{g . dB}$ (Fig. 38. wo dB die Tiefe des Falles ist) ertheilt. Die Zeit des Falles durch AC Fig. 40. ist nun so groß als die Zeit des Laufes durch den Quadranten mit der Geschwindigkeit, die in C erlangt war u. s. w.

§. 123. Die Zeit, in welcher das Pendel sich an der andern Seite wieder erhebt, ist eben so groß, als die Zeit seines Fallens, und folglich die ganze Zeit eines Pendelschwunges $= \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$,
wenn der Bogen, um welchen das Pendel aus der verticalen Lage gerückt war, so klein ist, daß man Sehne, Sinus und Bogen mit einander vertauschen darf.

§. 124. Eigentlich ist dieses nur die Grenze, welcher die Schwingungszeit des Pendels desto näher kömmt, je kleiner die Schwingung ist. Größere Schwingungen erfordern etwas längere Zeiten. Wir wollen jene Zeit, die **Zeit einer Oscillation** nennen.

Zusätze für geübtere Leser.

Wenn das Pendel CA (Fig. 38.) in A ohne anfängliche Geschwindigkeit seine Bewegung angefangen hatte, und nun in F angekommen ist: so ist, wenn ich ACB = α, ACF = φ AC = a nenne, die Kraft, welche in F den Körper forttreibt = $\mathrm{Sin}(\alpha - \varphi)$. Die in F schon erlangte Geschwindigkeit = v nimmt also in der kleinen Zeit dt, in welcher die wirkende Kraft als unveränderlich angesehen wird, um

$$dv = 2g . \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi) . dt$$

zu. Multiplicire ich hier an beiden Seiten mit 2v und überlege, daß vdt der kleine, mit der Geschwindigkeit = v in der Zeit = dt zurückgelegte Weg ist, dieser aber offenbar dem Bogen adφ gleich ist weil das Fortrücken des Pendels eine Aenderung = dφ des Winkels φ oder = adφ des Bogens AF = aφ hervorbringt: so erhalte ich $2vdv = 4gad\varphi . \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi)$

oder $2vdv = - 4ga . d(\alpha - \varphi) . \mathrm{Sin}(\alpha - \varphi)$.

Hieraus folgt $v^2 = \mathrm{Const} + 4ga\ \mathrm{Cos}(\alpha - \varphi)$,
oder da für $\varphi = o$, $v = o$ war, welches

$$o = \mathrm{Const} + 4ga\ \mathrm{Cos}\,\alpha, \text{ giebt,}$$

$$v^2 = 4ga\,(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha),$$

das ist $\frac{v^2}{4g} = a\,(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha) = CG - CE = EG$ als die Höhe, welche der in F erlangten Geschwindigkeit zugehört. (wie in §. 110. 111.)

Auch für dt können wir jetzt einen Ausdruck finden; denn da

$$v\,dv = 2ga\,d\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi),$$

v aber $= 2\,.\sqrt{(ga\,(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha))}$

also $dv = \frac{2ga\,d\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)}{v} = \frac{d\varphi\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)\sqrt{ag}}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha)}}$

ist, so wird aus $dv = 2g\,.\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)\,.\,dt$, nun

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi\,\sqrt{\frac{a}{g}}}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha)}}.$$

Diese Formel ist allgemein; wollte man sie in völliger Allgemeinheit integriren, so müßte man $(\mathrm{Cos}\,(\varphi-\alpha) - \mathrm{Cos}\,\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe verwandeln, was mit Hülfe der bekannten Reihen für die Kreisfunctionen und mit Hülfe des Polynomischen Lehrsatzes eben nicht schwer ist.

Hier will ich mich begnügen, das Integral für sehr kleine Werthe von α und φ zu suchen.

Für sehr kleine Winkel ist nahe genug (Pasquich Anal. 1. Theil. §. 158.)

$$\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) = 1 - \tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

also $\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \mathrm{Cos}\,\alpha = \alpha\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2.$

In diesem Falle also ist

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi\,.\sqrt{\frac{a}{g}}}{\sqrt{(\alpha\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2)}};$$

oder $dt = \frac{d\varphi\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{(2\alpha\varphi-\varphi^2)}} = \frac{d\varphi\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{(\alpha^2-(\alpha-\varphi)^2)}}$

$$= \frac{\frac{d\varphi}{\alpha}\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)^2\right)}} = \frac{-\frac{d\,.(\alpha-\varphi)}{\alpha}\,.\sqrt{\frac{a}{2g}}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)^2\right)}},$$

woraus $t = \mathrm{Const} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\,.\,\mathrm{Arc.Sin}\left(\frac{\alpha-\varphi}{\alpha}\right)$, (Pasquich Analys. 2. Theil. §. 22.) folgt. Wir wissen, daß $t = 0$ für $\varphi = 0$, also $\mathrm{Const} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\,.\,\mathrm{Arc}\,.\,\mathrm{Sin}\,1 = 0$, oder die zum

Sin = 1. Der Bogen $= \frac{1}{2}\pi$ gehört, Const $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$

und $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \left\{ \frac{1}{2}\pi - \text{Arc.Sin}\left(\frac{\alpha - \varphi}{\alpha}\right) \right\}$.

Wenn $\varphi = \alpha$ wird, oder das Pendel die verticale Lage erreicht hat; ist $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, wie wir es vorhin fanden. Die allgemeine Integration erfordert eine weitläuftige Rechnung, zu der hier nicht der Ort ist.

§. 125. Bemerkung. Kennte man eine Curve, deren Krümmung so wäre, daß genau (Fig. 41.) für jeden vom niedrigsten Puncte B an gerechneten Bogen BA, die Neigung der am Endpuncte A des Bogens gezogenen Berührungslinie durch Sin AFG $= \frac{BA}{b}$ gegeben würde, so fände hier für Bogen von jeder Größe die vorige Betrachtung ihre genaue Anwendung. Eine solche Linie ist die Cycloide, die wir schon in der Statik §. 220. 221. kennen gelernt haben. Wird die dortige 81te Figur so gezeichnet, daß das Oberste zu unterst gekehrt ist, so würde sie so wie Fig. 42. aussehen, und es läßt sich ziemlich leicht zeigen, daß jeder Bogen BK

BK $= 2\sqrt{2r.BL}$ ist, wenn r der Halbmesser des wälzenden Kreises ist (Statik §. 221.), die Lage der Berührungslinie in K ist aber dadurch bestimmt, daß

$$\text{Sin KMN} = \sqrt{\frac{BL}{2r}},$$

oder da $\sqrt{BL} = \frac{\frac{1}{2}BK}{\sqrt{2r}}$; Sin KMN $= \frac{\frac{1}{2}\text{Bogen BK}}{2r}$

$$= \frac{\text{Bogen BK}}{4r}.$$

Bewegt sich ein schwerer Körper auf der Cycloide AKB herab, so ist in jedem Puncte K die beschleunigende Kraft, welche ihn hier nach der Richtung der Tangente oder des Bogens forttreibt, dem noch zu durchlaufenden Bogen BK proportional. War also in K der Anfang der Bewegung, und folglich in B, im tiefsten Puncte die Geschwin-

gkeit $= 2\sqrt{g.LB}$, so ist die auf den Bogen KB verandte Zeit $= \frac{\frac{1}{2}\pi \text{ Bogen KB}}{2\sqrt{g.LB}}$, oder da Bogen KB $= 2\sqrt{2r.LB}$ ist, die Zeit $= \frac{\pi\sqrt{2r.LB}}{2\sqrt{g.LB}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$, diese Zeit ist also immer gleich, man mag den Körper on A an, von K an oder von P an auf der Cycloide herblaufen lassen, denn die Formel für die Zeit hängt gar icht von der Länge des Bogens ab.

Die Cycloide heißt um dieser Eigenschaft willen eine autochronische Curve, das ist eine Curve von imer gleicher Fallzeit, der Bogen sei welcher er wolle.

Diese Gleichheit der Zeiten hängt davon ab, daß, enn der Körper von A an zu fallen anfängt, er wegen er starken Neigung der Curve sogleich eine erhebliche Gehwindigkeit erlangt, also den folgenden Bogen z. B. B mit weit größerer Schnelligkeit durchläuft, als er ihn urchlaufen würde, wenn er erst in K seine Bewegung aninge. Diese größere Schnelligkeit ersetzt grade die Zeit, elche zum ersten Theile des Bogens verwandt ist.

§. 126. Die eben angeführten Eigenschaften der Cyoide ließen sich auch hier wohl strenge beweisen, wenn h nicht fürchtete, zu ausführlich zu werden. Schwerer ögte es sein, hier die Gründe anzugeben, warum die ycloide auch die Linie des schnellsten Falles der die Brachystochrone ist. Verlangt man nämlich für vei in derselben Vertical-Ebne liegende Puncte, die weer vertical über, noch horizontal neben einander liegen, ie Linie zu bestimmen, auf welcher der fallende Körper m schnellsten vom einen zum andern gelangt: so ist auch iese Linie die Cycloide.

Zusätze für geübtere Leser.

Die Gleichung für die Cycloide war (Statik. §. 220.)

$= r \,.\, \text{Arc. Sin}\left(\frac{\sqrt{(2rx - x^2)}}{r}\right) - \sqrt{(2rx - x^2)}$ und

Hier bedeutet (Fig. 42.), $x = PL$, $y = LK$, $r = \frac{1}{2} BP$ den Halbmesser des wälzenden Kreises. Die Neigung der Tangente MK gegen LK wird gefunden durch $\frac{dx}{dy} = \text{tang } KMN$,

oder $\text{Cotang } KMN = \frac{(r-x)}{\sqrt{(2rx-x^2)}\ \frac{(r-x)}{r}} - \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$,

denn wenn ich $\text{Sin}\,\varphi = \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r}$ setze,

also $y = r\varphi - r\,\text{Sin}\,\varphi$,

so ist $dy = r\,d\varphi - r\,d\varphi\,\text{Cos}\,\varphi$

aber $d\varphi = \frac{d.\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi} = \frac{d.\,\text{Sin}\,\varphi}{\frac{r-x}{r}} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} \cdot \frac{1}{r-x}$;

also $\frac{dy}{dx} = \text{Cotang } KMN = \frac{r}{\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$

$= \frac{x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$,

und $\text{Sin } KMN = \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{\sqrt{2rx}} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$.

Das Differential des Bogens AK wird

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

$$ds = dx\,\frac{\sqrt{2rx}}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = dx\,\sqrt{\frac{2r}{2r-x}}$$ gefunden,

oder $ds = \frac{-d.(2r-x)}{\sqrt{(2r-x)}}\,\sqrt{2r}$;

woraus $s = \text{Const} - 2\sqrt{2r}\,.\,\sqrt{(2r-x)}$ folgt.

Soll der Bogen nicht von A an gerechnet werden, sondern von B an, wo $x = 2r$ ist, so kömmt keine beständige Größe hinzu, und es ist $s = 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)} = 4.r\,\text{Sin } KMN$,

oder $\text{Sin } KMN = \frac{s}{4r}$.

Die Gleichung $dv = 2g\,.\,\text{Sin } KMN\,.\,dt$ giebt also nun

$$2vdv = 4g\,.\,\text{Sin } KMN\,.\,dS,$$

wenn ich unter S den in der Zeit $= t$ durchlaufenen Weg verstehe. Nenne ich a den ganzen Bogen BO, um welchen für $t = o$ der Körper von B entfernt war, so ist $s = a - S$, also

$$dS = -ds \text{ und } 2vdv = -\frac{4gs\,ds}{4r},$$

$$v^2 = \text{Const} - \frac{gs^2}{2r} = \frac{g}{2r}(a^2 - s^2), \text{ weil } v = o$$

[illegible] $s = a$. Wir erhalten also $dt = \frac{dS}{v} = \frac{-ds}{\sqrt{(a^2 - s^2)}} \sqrt{\frac{2r}{g}}$,

$$t = \text{Const} - \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{g}} \cdot \text{Arc} \cdot \text{Sin} \frac{s}{a},$$

$t = \left(\frac{1}{2}\pi - \text{Arc Sin} \frac{s}{a}\right) \sqrt{\frac{2r}{g}}$, weil t verschwinden [illegible] für $s = a$ oder $S = o$. Die ganze Fallzeit bis an B ist also $= \frac{1}{2} \pi . \sqrt{\frac{2r}{g}}$, unabhängig von der Größe des durchlau[illegible] [illegible]nen Bogens a.

§. 127. Lehrsatz. Die Oscillationszeiten zweier Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen, wenn beide derselben beschleunigende Kraft der Schwere unterworfen sind.

Der Beweis liegt in der Formel §. 123., wo die ganze Oscillationszeit $= T = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$ und a die Länge des Pendels war.

Das Pendel, welches Secunden schlägt, ist also [illegible]mal so lang, als das, welches halbe Secunden schlägt.

§. 128. Lehrsatz. Wenn auf zwei Pendel ungleiche beschleunigende Kräfte wirken, so läßt sich das Verhältniß dieser Kräfte aus den Längen der Pendel und ihren Oscillationszeiten bestimmen; die Kräfte verhalten sich nämlich direct wie die Längen der Pendel, und umgekehrt wie die Quadrate ihrer Oscillationszeiten.

Beweis. Wenn auf zwei Pendel von den Längen $= a$ und $= a'$ verschiedene beschleunigende Kräfte wirken, nämlich auf das erste eine Kraft, die den fallenden Körper in der ersten Secunde durch den Raum $= g$ treibt, auf das zweite eine beschleunigende Kraft, für welche dieser Raum $= g'$ ist: so verhalten sich diese Kräfte wie $g : g'$ (§. 35.), und die Oscillationszeiten T und T' der beiden Pendel würden sein

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}} \text{ und } T' = \pi \sqrt{\frac{a'}{2g'}};$$

$$\text{also } g = \frac{\pi^2 a}{2 T^2} \text{ und } g' = \frac{\pi^2 a'}{2 T'^2}.$$

§. 129. Hieraus erhellt, wie die Pendellänge dazu dienen konnte, zu entdecken, daß die Schwere am Aequator schwächer wirke, als in größern Breiten. Die Oscillationszeit eines Pendels wird nämlich durch die, vermittelst der Uhr abgezählten Oscillationen während eines ganzen Sterntages, der auf der ganzen Erde gleich ist, sehr genau angegeben; mißt man die Länge des Pendels gleichfalls mit großer Genauigkeit, so findet man, ob der Quotient $\frac{a}{T^2}$ unter allen Breiten gleich, oder wie er verschieden ist.

§. 130. Anmerkung. Da sich für größere Schwingungen des Pendels die Schwingungszeiten nicht ohne Integralrechnung bestimmen lassen, so will ich hier nur die Formel dafür hersetzen, damit man allenfalls darnach rechnen könne. Behalten a, g, π ihre vorigen Bedeutungen und ist = b die verticale Tiefe, um welche der schwere Punct vom Anfange der Bewegung bis zu seiner größten Tiefe sinkt, wo $b = a - a \operatorname{Cos} \varphi$, wenn φ der Bogen ist, um welchen das Pendel beim Anfange der Bewegung gehoben war: so ist die Zeit eines ganzen Schwunges oder die Zeit der ganzen Schwingung durch AD (Fig. 38.)

$$= \pi . \sqrt{\frac{a}{2g}} . \left\{ 1 + (\tfrac{1}{2})^2 . \frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^4 + + \ldots \right\}$$

Eine Reihe, deren folgende Glieder bald ziemlich klein werden, zumal wenn b nur klein ist.

Neunter Abschnitt.

Von den Centralkräften und der Bewegung der Körper um anziehende Mittelpuncte.

§. 131. Erklärung. Centralkräfte sind alle die, deren Richtungen gegen einen bestimmten, unveränderlichen Mittelpunct gehen, welche also die ihrer Wirkung unterworfenen Körper entweder gegen diesen Mittelpunct anziehen, oder davon zu entfernen streben.

In der Natur kommen uns meistens nur anziehende Kräfte vor.

§. 132. Bemerkung. Wenn ein ruhender Körper durch eine Centralkraft in Bewegung gesetzt wird: so erhält er eine gradlinigte, gegen den Mittelpunct der Anziehung (wenn es eine anziehende Kraft ist,) gerichtete Bewegung, deren Untersuchung (wie die Beyspiele §. 64. bis 7. zeigen,) nicht so sehr schwierig ist. Wird aber der Körper durch einen seitwärts gerichteten Stoß in Bewegung gesetzt, so daß die anfängliche Richtung seiner Bewegung nicht mit der Richtung gegen den anziehenden Punct hin, oder mit der grade entgegengesetzten Richtung übereinstimmt: so muß er eine krummlinigte Bewegung anfangen, und die Betrachtung wird nun deswegen schwieriger, weil die Richtungen, nach welchen die anziehende Kraft in verschiedenen Zeitpuncten auf den Körper wirkt, nicht unter sich parallel sind.

§. 133. Bemerkung. Die in der Natur vorkommenden anziehenden Kräfte hängen immer auf gewisse Weise von der Entfernung vom anziehenden Mittelpuncte ab, so daß der bewegte Körper gleich stark angezogen

wird, wenn er in verschiedenen Puncten seiner Bahn gleiche Entfernungen von demselben erreicht. Geht er daher im Kreise um den anziehenden Mittelpunct herum, so ist für ihn die anziehende Kraft eine unveränderliche, in jedem Puncte der Bahn senkrecht gegen die Richtung der Bewegung wirkende Kraft.

§. 134. Aufgabe. Ein Körper (Fig. 43.) der sich in A befindet und mit der beschleunigenden Kraft $= p$ gegen den Mittelpunct C angezogen wird, hat in A eine auf AC senkrechte Bewegung; wie groß muß die Geschwindigkeit $= v$ sein, damit der Körper auf einem Kreise fortgehe.

Auflösung. Da die Richtung der Bewegung in A senkrecht gegen AC ist: so hat der Körper ein Bestreben, sich nach der Richtung AB von C zu entfernen. Soll also die Bahn des Körpers ein Kreis sein, so muß seine, vermöge der Geschwindigkeit entstehende Schwungkraft, gleich der anziehenden Kraft sein, also $= p$. Wenn der Abstand AC des Körpers vom anziehenden Mittelpuncte $= a$ heißt, so ist die Schwungkraft $= \frac{v^2}{2ga}$ (§. 99.) und diese muß $= p$ sein, also $v^2 = 2gap$. Es bedeutet nämlich hier p eine beschleunigende auf jedes Theilchen des Körpers wirkende Kraft, die hierin mit der Schwerkraft übereinstimmt.

§. 135. Wenn die Kraft p von der Entfernung nach einem bestimmten Gesetze abhängt, so lassen sich also die Geschwindigkeiten bestimmen, mit welchen Körper in verschiedenen Entfernungen vom anziehenden Mittelpuncte ihre Umläufe vollenden müssen, und es lassen sich folglich auch ihre Umlaufszeiten bestimmen. Bei der Kreisbewegung nämlich wird die Geschwindigkeit weder vermehrt noch vermindert, sondern bleibt, weil die anziehende Kraft immer senkrecht gegen die Richtung der Bewegung ist, unverändert. Die Umlaufszeit $= T$ durch einen Kreis vom Halbmesser $= a$ ist also für die Geschwindig-

eit $= v$, durch $T = \frac{2a\pi}{v}$ ausgedrückt, weil in der Zeit $= T$ der Weg $= 2a\pi$ mit der Geschwindigkeit $= v$ zurückgelegt wird. Unsre vorige Gleichung giebt also $T^2 = \frac{a\pi^2 a}{gp}$ als Werth des Quadrates der Umlaufszeit.

§. 136. Lehrsatz. Wenn um einen anziehenden Mittelpunct, dessen anziehende Kraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, sich mehrere Körper auf kreisförmigen Bahnen in ungleichen Entfernungen bewegen: so verhalten sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten, wie die Cubi ihrer Abstände vom anziehenden Mittelpuncte.

Beweis. Wenn sich die anziehende Kraft $= p$ umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom anziehenden Mittelpuncte verhält; so ist sie in der Entfernung $= a$, $= \frac{b^2}{a^2}$, wenn sie in der Entfernung $= b$, $= 1$ ist, oder derjenigen beschleunigenden Kraft gleich ist, die wir als Einheit der Kräfte ansehen, und welche den ihr frei folgenden Körper durch den Raum $= g$ in der ersten Secunde treibt. Befinden sich also Körper in den Entfernungen $= a$, $= a'$, $= a''$ vom Mittelpuncte der Anziehung, so ist die anziehende Kraft für den ersten $= p = \frac{b^2}{a^2}$, für den zweiten $= \frac{b^2}{a'^2}$, für den dritten $= \frac{b^2}{a''^2}$, und folglich sind die Umlaufszeiten durch folgende Gleichungen bestimmt.

Für den ersten $T^2 = \frac{2\pi^2 a^3}{g b^2}$;

für den zweiten $T'^2 = \frac{2\pi^2 a'^3}{g b^2}$

für den dritten $T''^2 = \frac{2\pi^2 a''^3}{g b^2}$.

Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich also wie die Cubi der Abstände.

§. 137. Kepler hatte in den Bewegungen der Planeten, deren Bahnen man beinahe als Kreise ansehen kann, das Gesetz entdeckt, daß die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Cubi der Entfernungen von der Sonne verhalten. Aus diesem, durch Beobachtung gefundenen Gesetze ergab sich also $T^2 = \frac{a^3}{f^3}$, wo f eine beständige Linie bedeutet, indem die Gleichung $T^2 = \frac{a^3}{f^3}$ nur das Verhältniß andeuten soll, in welchem die Zeiten mit den Entfernungen zunehmen. Da nun auch $T^2 = \frac{2\pi^2 a}{g p}$ sein muß (§. 135.), also $\frac{2\pi^2 a}{g p} = \frac{a^3}{f^3}$, so ist $2\pi^2 f^3 = g p a^2$,

oder $p = \frac{2\pi^2 f^3}{g \cdot a^2}$, die Kraft p dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional, indem f und g gegebne unveränderliche Linien bedeuten.

So ließ sich also aus jenem Keplerschen Gesetze finden, nach welchem Gesetze die anziehende Kraft der Sonne in größeren Entfernungen abnehme.

§. 138. Dieses Gesetz ist nun richtig für die anziehende Kraft der Sonne, indem die Umlaufszeiten aller Planeten sich demselben gemäß finden; es ist richtig für die Planeten Jupiter, Saturn und Uranus, deren Monde, wenn man die Umlaufszeiten der verschiedenen Monde desselben Planeten vergleicht, eben das ergeben; es ist auch richtig für die Erde; denn die Schwungkraft des Mondes in seiner Bahn ist genau so groß, als erfordert wird, um einer anziehenden Kraft das Gleichgewicht zu halten, die sich zur Schwere auf der Erde verhält, wie das Quadrat des Erdhalbmessers zum Quadrate des Halbmessers der Mondbahn.

§. 139. Aufgabe. Wenn um zwei anziehende

Mittelpuncte A und B sich Körper, C und D in Kreisbahnen bewegen, C nämlich um den ersten, D um den zweiten; aus den Entfernungen dieser Körper von ihrem anziehenden Mittelpuncte und aus den Umlaufszeiten beider zu bestimmen, wie sich die anziehenden Kräfte der Puncte A und B in bestimmter gleicher Entfernung verhalten werden, wenn die Kräfte dem Quadrate der Abstände umgekehrt proportional sind.

Auflösung. Es sei a die Entfernung des Körpers C von A, a′ die Entfernung des Körpers D von B; T sei des ersten, T′ sei des zweiten Umlaufszeit; man verlangt zu bestimmen, wie sich die anziehende Kraft von A in der Entfernung = a, zu der anziehenden Kraft von B in der Entfernung = a verhalte.

Da $T^2 = \frac{2\pi^2 a}{g p}$ sein muß (§. 135.),

so ist $p = \frac{2\pi^2 a}{g T^2}$ die anziehende Kraft des ersten Körpers in der Entfernung = a. Eben so ist $p' = \frac{2\pi^2 a'}{g T'^2}$ des zweiten Körpers anziehende Kraft in der Entfernung = a′, und seine anziehende Kraft = q in der Entfernung = a, wird $q = \frac{p' \cdot a'^2}{a^2}$, das ist

$$= \frac{2\pi^2 a'^3}{g a^2 T'^2} \text{ sein.}$$

Die anziehenden Kräfte beider Körper in gleichen Entfernungen = a verhalten sich also wie

$$\frac{2\pi^2 a}{g T^2} \text{ zu } \frac{2\pi^2 a'^3}{g a^2 T'^2},$$

oder wie $\frac{a^3}{T^2}$ zu $\frac{a'^3}{T'^2}$, das ist, direct wie die Cubi der Entfernungen und umgekehrt, wie die Quadrate der Umlaufszeiten.

§. 140. Hieraus wird klar, wie man die anziehende Kraft der Sonne mit der der Erde, des Jupiters

u. s. w. vergleichen kann, da diese Planeten Monde um sich haben, deren Entfernungen und Umlaufszeiten sich mit den Entfernungen und Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne vergleichen lassen.

§. 141. Bemerkung. Nicht bloß bei der Bewegung im Kreise findet eine Schwungkraft Statt, sondern bei jeder Bewegung in einer gekrümmten Bahn, denn die Schwungkraft entstand ja nur aus dem Bestreben des Körpers, nach der Tangente der Bahn fortzugehen, und dieses Bestreben ist bei jeder krummlinigten Bewegung da. Je kleiner der Halbmesser des Kreises war, in welchem der Körper sich mit bestimmter Geschwindigkeit bewegt, desto größer war die Schwungkraft, und eben so wird sie für andre Curven desto größer sein, je stärker diese gekrümmt sind. Um aber die Krümmung einer Curve an jeder gegebenen Stelle bestimmt auszudrücken, können wir uns einen Kreis denken, der eben so stark gekrümmt wäre. Wir könnten dann die Bewegung in jener Curve für einen kurzen Zeitraum so betrachten, als ob es eine Bewegung auf dem eben so gekrümmten Kreise wäre, und darnach die Schwungkraft bestimmen.

Bewegt sich ein Körper frei auf einer Curve, das heißt, wird er nicht durch einen festen Widerstand oder einen Faden und dergleichen fest gehalten: so muß die aus den wirkenden Kräften entstehende senkrecht gegen eine bestimmte Stelle der Bahn gerichtete Kraft, genau der Schwungkraft das Gleichgewicht halten, und hierin liegt eine der Bestimmungen, deren wir bedürfen, um entweder bei gegebener Kraft zu bestimmen, in welcher Bahn der Körper sich bewegen wird, oder bei gegebner Bahn des Körpers eine Vergleichung zwischen der Geschwindigkeit des Körpers und der Größe der wirkenden Kraft anzustellen.

§. 142. Bemerkung. Wenn die Richtung BC der Centralkraft (Fig. 44.) nicht senkrecht auf die Bahn in demjenigen Puncte B ist, wo sich der Körper befindet: so wird offenbar, wenn der Körper sich gegen D zu be-

wegt, oder seine Richtung mit der Richtung der Kraft einen spitzen Winkel macht, die Geschwindigkeit des Körpers durch die Centralkraft vermehrt, wenn diese anziehend gegen C zu wirkt. Wir müßten uns hier die Kraft nach Richtungen BE, BF, mit der Tangente übereinstimmend, und auf sie senkrecht zerlegt denken; die nach der Richtung der Tangente würde die Geschwindigkeit des Körpers vermehren oder vermindern; die auf die Tangente senkrechte Kraft würde den Körper in seiner Bahn erhalten, oder hindern, daß er nicht dem Antriebe der Schwungkraft Folge leistend sich von ihr entferne.

§. 143. Erklärung. Die vom Mittelpuncte der anziehenden Kräfte nach irgend einem Puncte der Bahn gezogne grade Linie heißt ein Radius Vector der Bahn. Stellt man sich den Radius Vector gegen den Punct hin, wo der bewegte Körper ist, gezogen, und mit diesem fortrückend vor: so beschreibt er eine gewisse Fläche, z. B. den Sector BCD (Fig. 44.), während der Körper von B nach D fortgeht. Die Größe dieses Flächenraumes hängt von der Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers, aber auch von der anziehenden Kraft ab.

§. 144. Lehrsatz. Wenn auf den bewegten Körper A keine andre als die gegen den Mittelpunct C (Fig. 45.) gerichtete Kraft wirkt: so sind die in gleichen Zeiten vom Radius Vector beschriebenen Flächenräume gleich.

Beweis. Obgleich die anziehenden Kräfte als stetig wirkende zu betrachten sind, so können wir sie uns hier doch wohl so vorstellen, als ob ihre Wirkung in einzelnen Stößen im Anfange jedes Zeittheilchens geschehe. Diese Vorstellung nähert sich desto mehr der Wahrheit, je kleiner wir die Zeittheilchen ansetzen.

Der Körper komme also in B mit einer Geschwindigkeit an, die ihn in einem Zeittheilchen nach der Richtung BD bis D fortführen würde, wenn keine fremde Kraft auf ihn wirkte. Aber im Anfange dieses Zeittheilchens ertheilt ihm die nach C hin anziehende Kraft einen Stoß,

der ihn bis nach F in einem Zeittheilchen treiben würde, wenn nicht seine schon erlangte Geschwindigkeit ihn fortrisse. Vermöge der gleichzeitigen Einwirkung der schon erlangten Geschwindigkeit und der anziehenden Kraft durchläuft also der Körper die Diagonale BE eines Parallelogramms, dessen Seiten BD, BF sind. Der Raum BCE, welchen hier der Radius Vector beschreibt, ist eben so groß als der BCD, welchen er beschrieben hätte, wenn keine anziehende Kraft den Körper von seiner Richtung abgelenkt hätte; denn die Dreiecke BCD, BCE haben einerlei Grundlinie BC und ihre Spitzen liegen in einerlei zu BC parallel gezognen Linie DE.

Im zweiten Zeittheilchen würde der Körper auf der Verlängerung von BE nach G fortgehen, und einen Weg EG = BE durchlaufen, wenn nicht die anziehende Kraft abermals auf den Körper wirkte. Ertheilt sie ihm also hier einen Stoß, der ihn durch EI in einem Zeittheilchen triebe, wenn er keine Geschwindigkeit gehabt hätte: so durchläuft er die Diagonale EH des Parallelogramms EGHI, und es ist wieder der vom Radius Vector beschriebene Flächenraum ECH = ECG, aber zugleich ECG = BCE, weil diese Dreiecke gleiche Grundlinien EG = BE und in C zusammenfallende Spitzen haben. Der im zweiten Zeittheilchen vom Radius Vector beschriebene Raum ist also eben so groß als der im ersten Zeittheilchen. Und so läßt sich ferner zeigen, daß im dritten Zeittheilchen der Körper auf der verlängerten EH nach K, wo HK = EH, gelangen würde, wenn nicht die anziehende Kraft ihn in eben der Zeit durch HL führte, daß er also die Diagonale HM durchlaufen wird, und daß dann der vom Radius Vector beschriebene Flächenraum HCM = HCK = ECH = BCE auch in diesem Zeittheilchen eben so groß ist, als in jedem der vorigen.

Da diese Betrachtungen ganz dieselben bleiben, wenn man die Zeittheilchen auch noch so sehr verkleinert: so gilt offenbar auch bei der stetigen Einwirkung der Centralkraft

das Gesetz, daß diese Flächenräume in gleichen Zeittheilchen gleich, oder daß sie der Zeit proportional sind.

§. 145. Da die Größe dieser Sectoren BEC, HCM u. s. w., ausgedrückt wird durch ein Product aus dem in einem Zeittheilchen durchlaufenen Wege BE oder HM in die von C auf diesen Weg gezogne Senkrechte CP, CQ; so verhält sich BE : HM = CQ : CP, oder die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die von C auf die Richtungslinien gezogenen Senkrechten.

§. 146. Ist die nach dem Mittelpuncte C ziehende Kraft eine stetig wirkende, so beschreibt der Körper statt des bisher betrachteten Polygons eine Curve BEMN (Fig. 46.). Die Richtung der Bewegung in B oder in M wird hier durch die Tangenten BP, MH bestimmt. Durchläuft also der Körper in gleichen Zeiten die Wege BE, MN, so müssen die Sectoren BCE und MCN gleich sein; also, wenn CP, CQ die Senkrechten auf die Tangenten sind,

$$MN \cdot CQ = BE \cdot CP,$$

oder $MN : BE = CP : CQ$,

und auch hier stellen die Bogen BE, MN die Geschwindigkeiten oder die in einem als Einheit betrachteten Zeitraume durchlaufenen Räume dar.

§. 147. Auch der umgekehrte Schluß würde nun gelten, nämlich daß C der Mittelpunct der Kräfte sein müsse, wenn sich aus der Betrachtung der Bahn zeigte, daß die Flächenräume, die ein von C ausgehender Radius Vector beschreibt, der Zeit proportional sind.

Diese Betrachtung war es grade, die in Beziehung auf die anziehende Kraft der Sonne Statt fand. Kepler hatte aus den beobachteten Bewegungen der Planeten die Gleichheit der Sectoren oder derjenigen Flächenräume gefunden, die ein von der Sonne nach dem Planeten gezogener und mit dem Planeten fortrückender Radius Vector in gleichen Zeiten durchläuft; hier also mußte nun die Sonne der Mittelpunct der anziehenden Kräfte sein,

durch welche die Planeten in ihren Bahnen erhalten werden.

§. 148. Bemerkung. Schon diese Betrachtungen geben einige Bestimmungen für die Geschwindigkeit des um einen anziehenden Mittelpunct sich bewegenden Körpers; wir können indeß diese Bestimmung auf einem andern Wege vollständiger erhalten, wenn wir uns zugleich einen Körper denken, der auf der gekrümmten Bahn fortgeht, und einen zweiten, der von eben der Kraft angezogen, in grader Richtung gegen den Mittelpunct der Kräfte zu fällt. Hat nämlich (Fig. 47.) ein auf der Bahn AK bewegter, gegen C angezogener Körper in K eine gewisse Geschwindigkeit erreicht: so können wir uns einen eben so weit von C entfernten Körper P denken, der durch gradliniges Fallen gegen C zu in P eben die Geschwindigkeit erlangt hätte, und es wird eine bestimmte Höhe BP geben, von welcher der in B ruhende Körper müßte gegen C herabgefallen sein, um in P jene Geschwindigkeit zu erreichen. Wir werden sehn, welche Bestimmungen in Beziehung auf die Bewegung beider Körper Statt finden.

§. 149. Lehrsatz. Wenn zwei Körper K und P von derselben anziehenden Kraft gegen C getrieben werden, so daß in gleichen Entfernungen von C die Kraft auf beide gleich wirkt: so erhält K, indem er sich frei auf seiner Bahn nach L fortbewegt, eben die Vermehrung seiner Geschwindigkeit, welche ein von P nach Q frei gegen C fallender Körper erhält, wenn dieser in P eben die Geschwindigkeit hatte, wie jener in K, und die Puncte K, P, so wie L, Q gleich entfernt vom Centro C sind.

Beweis. In K wirkt die beschleunigende Kraft eben so stark als in dem eben so entfernten Puncte P; aber da die Richtung der Bewegung des Körpers in K von der Richtung gegen den Mittelpunct hin abweicht; so muß man diese nach KN wirkende Kraft gehörig zerlegen. Es stelle KN = PR den Raum vor, welchen die Körper K und P in einem Zeittheilchen durchlaufen würden, wenn

sie bloß der anziehenden Kraft folgten: so wird, wenn KM die Tangente der Bahn in K ist, durch die auf KM senkrechte Linie NO eine Linie KO abgeschnitten, welche angiebt, wie weit jene Kraft den Körper nach der Richtung der Tangente forttreiben würde. Die zur Beschleunigung von K wirkende Kraft verhält sich also zu der zur Beschleunigung von P wirkenden Kraft, wie KO zu KN, oder wie KN . Cos NKO zu KN.

Diese Kraft, die wir für den ganzen Raum PR oder KN oder KM als unveränderlich annehmen können, ertheilt dem Körper eine Vermehrung der Geschwindigkeit, die der Kraft und zugleich der Zeit, während welcher sie wirkt, proportional ist. War nun die Geschwindigkeit beider Körper $= v$, so gebraucht der Körper P, um von P nach R zu gelangen, eine Zeit $= \frac{PR}{v} = \frac{KN}{v}$, u. folglich ist die Zunahme der Geschwindigkeit, indem der frei fallende Körper bis R gelangt, $= 2g \cdot \frac{KN}{v} \cdot P$, wenn g den Weg bedeutet, welchen ein Körper, vermöge der Kraft $= 1$, in der Zeit-Einheit durchläuft, und wenn P die beschleunigende Kraft bedeutet. Der Körper k, welcher in K die Geschwindigkeit $= v$ hatte, gebraucht, um nach M zu gelangen, die Zeit

$$\frac{KM}{v} = \frac{KN}{v \, . \, Cos \, MKN},$$

und die Zunahme seiner Geschwindigkeit ist dem Producte aus der ihn beschleunigenden Kraft $= P \, . \, Cos \, MKN$ in diese Zeit proportional, oder $= 2g \cdot \frac{KN}{v} \cdot P$.

Beide Körper also erhalten, während sie sich dem Mittelpuncte um gleich viel nähern, einen gleichen Zuwachs der Geschwindigkeit, weil die Geschwindigkeit des in der gekrümmten Bahn fortgehenden Körpers zwar durch eine schwächere beschleunigende Kraft, die aber längere Zeit durch wirkt, vermehrt wird.

Es ist klar, daß sich dies von einem Puncte der Bahn zum andern so fort beweisen läßt; daß also die Geschwindigkeit des in der Bahn KL laufenden Körpers immerfort derjenigen gleich sein wird, die ein von dem Puncte B gegen C herabfallender Körper in eben den Entfernungen von C erlangt hätte, wenn man nämlich B so angenommen hat, daß für CP = CK die in P erlangte Geschwindigkeit so groß sei, als die gegebene Geschwindigkeit in K.

Zusatz für geübtere Leser.

Wenn in P sowohl als in K die erlangte Geschwindigkeit = v ist, und PR = ds in der Zeit = dt,

KM = dS in der Zeit = dT durchlaufen wird: so ist, vermöge der beschleunigenden Kraft = P, die auf P wirkt,

$$dv = 2g\,P\,dt = 2g\,P\,.\frac{ds}{v}.$$

Da nun in K die Kraft = P . Cos NKO zur Beschleunigung der Bewegung wirkt, so ist für K die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit dT, $= 2g\,.\,P\,.\,\text{Cos NKO}\,.\,dT$

$$= 2g\,.\,P\,.\,\text{Cos NKO}\,.\frac{dS}{v}$$

$$= 2g\,.\,P\,.\,\text{Cos NKO}\,.\frac{ds}{v\,.\,\text{Cos NKO}}$$

$$= \frac{2g\,ds}{v}\,.\,P,$$

weil $dS = \frac{ds}{\text{Cos NKO}}$ ist.

Die Geschwindigkeit beider Körper, die mit gleicher Schnelligkeit in K und P ankamen, nimmt also um gleich viel zu, während sie sich dem Mittelpuncte um gleich viel nähern; diese Zunahme geht folglich nach eben dem Gesetze immer fort, und es wird also der krummlinigt bewegte Körper in L eben die Geschwindigkeit erlangt haben, welche der grade gegen C herabfallende Körper in Q erlangt hatte, wofern CL = CQ ist.

Daß hiebei vorausgesetzt wird, daß irgend einmal für gleiche Entfernungen CK = CP die Geschwindigkeit gleich gewesen sei, versteht sich von selbst; denn sonst wäre die Zunahme der Geschwindigkeit des einen, anders als die Zunahme der Geschwindigkeit des andern ausgefallen.

Zehnter Abschnitt.

Von der elliptischen Bewegung der Planeten.

Hülfssätze von der Ellipse.

§. 150. Erklärung. Wenn man in der Ebne, in welcher sich die beiden Puncte A, B befinden (Fig. 48.), eine Curve so zeichnet, daß für jeden Punct D ihres Umfanges, die Summe der Entfernungen von jeden beiden Puncten immer gleich groß sei, also DA + DB = EA + EB und so in allen Puncten der Curve: so ist diese Curve eine Ellipse, und A, B heißen ihre Brennpuncte.

§. 151. Aufgabe. Wenn man die eben erwähnte Eigenschaft der Ellipse zum Grunde legt, durch eine allgemeine Gleichung zu bestimmen, wie groß für irgend einen Punct im Umfange der Ellipse der senkrechte Abstand von der durch beide Brennpuncte gehenden Axe AG ist.

Auflösung. Nenne ich die Entfernung beider Brennpuncte von einander = 2f, und die immer gleiche Summe der Abstände irgend eines Punctes der Ellipse von beiden Brennpuncten = 2a, so ist für jeden Punct D im Umfange der Ellipse die Senkrechte HD = y, durch $y^2 = \frac{a^2 - f^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ bestimmt, wenn CA = CB = f und CH = x ist.

Beweis. Theile ich AB in C in zwei gleiche Hälften = f, und nenne CH = x: so ist AH = f — x und HB = f + x. Die in dem willkürlichen Puncte H er-

Beweis. Offenbar ist $BV = BT \cdot \text{Sin}\, BTM$ Aber BTM ist der Winkel, der in §. 156. μ hieß, und für den dort

$$\text{tang}\,\mu = \text{tang}\,BTM = \frac{b}{\sqrt{(u^2 - a^2)}},$$

also $\text{Sin}\,BTM = \frac{b}{\sqrt{(u^2 - (a^2 - b^2))}}$.

Da nun $BT = u - \sqrt{(a^2 - b^2)}$,
$DT = u + \sqrt{(a^2 - b^2)}$,
$BT \cdot DT = u^2 - \sqrt{(a^2 - b^2)}$,

so ist auch $\text{Sin}\,BTM = \frac{b}{\sqrt{(BT \cdot DT)}}$,

also die Senkrechte $BV = \frac{b \cdot BT}{\sqrt{(BT \cdot DT)}} = b\sqrt{\frac{BT}{DT}}$,

welches nach §. 158. mit $b\sqrt{\frac{BM}{DM}}$ einerlei ist.

§. 162. Lehrsatz. Wenn man an irgend einen Punct M der Ellipse die Tangente MT zieht, und auf diese von einem der Brennpuncte B aus die Senkrechte BV, welche die Tangente in V trifft: so ist allemal dieser Punct V um $CV = a = CA$ vom Mittelpuncte C entfernt (Fig. 49.).

Beweis. Im Dreiecke CBV ist $CB = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. als Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte, ferner

$$BV = b\sqrt{\frac{BT}{DT}} \text{ (§. 159.), und}$$

$$CBV = 180° - TBV = 90° + MTB,$$

also $\text{Cos}\,CBV = -\text{Sin}\,BTM = -\frac{b}{\sqrt{(BT \cdot DT)}}$

Die dritte Seite CV ist

$$= \sqrt{(CB^2 + BV^2 - 2CB \cdot BV \cdot \text{Cos}\,CBV)},$$

$$= \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2 \cdot BT}{DT} + 2\sqrt{(a^2 - b^2)} \cdot b\frac{\sqrt{BT}}{\sqrt{DT}} \cdot \frac{b}{\sqrt{(BT \cdot DT)}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(a^2 - b^2 + \frac{b^2 \cdot BT}{DT} + \frac{2b^2 \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}}{DT}\right)},$$

r Ellipse; die durch den Mittelpunct C auf sie senkrecht gezogne und bis an die Ellipse verlängerte Linie LM ist die kleine Axe der Ellipse. Die durch einen r Brennpuncte gezogne auf die große Axe senkrechte iehne NO heißt der Parameter der Ellipse.

§. 154. Die halbe große Axe ist also $= a$, die halbe eine Axe $= \sqrt{(a^2 - f^2)}$, wofür ich $= b$ setze.

Der halbe Parameter BN ist der Werth, den y erält für $x = + f$ oder $x = - f$, aber für $x = f$ ist

$$= \frac{(a^2 - f^2)^2}{a^2}, \text{ also der Parameter}$$

$$= 2\left(\frac{a^2 - f^2}{a}\right) \text{ oder } = \frac{2b^2}{a}.$$

§. 155. Die Gleichung für die Ellipse (§. 149.) ist so $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ oder $= b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$.

§. 156. Lehrsatz. Wenn man um den Mittelunct C der Ellipse mit dem Halbmesser $= a$ einen Kreis schreibt, und in irgend einem Puncte der großen Axe r Ellipse eine senkrechte Ordinate errichtet: so verhält h die Ordinate HP des Kreises (Fig. 48.) zur Ordinate D der Ellipse wie $a : b$.

Beweis. Bekanntlich ist im Kreise $PH^2 = PC^2 - CH^2 = a^2 - x^2$;

$$\text{also } HP^2 : HD^2 = 1 : \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{oder } HP : HD = a : b.$$

§. 157. Diese Vergleichung giebt uns ein leichtes Mittel, um so viele Puncte der Ellipse, als man will, zu ichnen, indem man nur den Kreis über der großen Axe u ziehen, und alle seine Ordinaten in bestimmtem gleihem Verhältnisse $DH : PH = SR : SQ = b : a$ zu heilen braucht, um Puncte D, R im Umfange der Ellipse zu haben.

§. 158. Aufgabe. Eine Tangente an einen bestimmten Punct M der Ellipse zu ziehn (Fig. 49.)

Auflösung. In der verlängerten großen Axe nimmt man einen Punct T so an, daß

$CP : CA = CA : CT$, und zieht MT, welches die verlangte Tangente ist, wenn nämlich $CP = x$ die Abscisse des Punctes M oder der Abstand der Senkrechten PM vom Mittelpuncte, und CA die halbe Axe ist.

Beweis. Wenn man nach dieser Regel

$CT = \frac{CA^2}{CP} = \frac{a^2}{x}$, also $PT = CT - x$, oder

$PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ nimmt: so erhält der Winkel PTM grade den Werth, den er für den Punct M haben muß, damit MT eine Tangente werde.

Zieht man nämlich von M aus nach einem willkürlichen Puncte Q der großen Axe oder ihrer Verlängerung die grade Linie MQ, die mit CQ den Winkel $= PQM = \mu$ macht, so ist, wenn ich $CQ = u$ setze und $MQ = v$, $x = u - v \operatorname{Cos}\mu$ und $y = v . \operatorname{Sin}\mu$; also, wenn ich in §. 153. diese Werthe substituire,

$$v^2 \operatorname{Sin}^2\mu = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - (u - v \operatorname{Cos}\mu)^2);$$

$$a^2 v^2 \operatorname{Sin}^2\mu = a^2 b^2 - b^2 u^2 + 2 b^2 u v \operatorname{Cos}\mu - b^2 v^2 \operatorname{Cos}^2\mu,$$

oder

$$v^2 (a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu) - 2 b^2 u v \operatorname{Cos}\mu = b^2 (a^2 - u^2),$$

$$v^2 - \frac{2 b^2 u v \operatorname{Cos}\mu}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu} = \frac{b^2 (a^2 - u^2)}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu},$$

endlich

$$v = \frac{b^2 u \operatorname{Cos}\mu}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 (a^2 - u^2)}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu} + \frac{b^4 u^2 \operatorname{Cos}^2\mu}{(a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu)^2}\right)},$$

oder $v =$

$$\frac{b^2 u \operatorname{Cos}\mu \pm \sqrt{(a^2 b^2 (a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu) - b^2 a^2 u^2 \operatorname{Sin}^2\mu)}}{a^2 \operatorname{Sin}^2\mu + b^2 \operatorname{Cos}^2\mu}.$$

Hier erhält offenbar v zwei ungleiche Werthe, die durch das doppelte Zeichen der Wurzel angedeutet werden.

Trägt man nämlich den rationalen Theil des Werthes von v auf, der $= \frac{b^2 u \, Cos \mu}{a^2 Sin^2 \mu + b^2 Cos^2 \mu}$ ist, so reicht dieser = QR bis in die Mitte der Sehne MS und man bestimmt die Endpuncte M, S der Sehne, indem man den irrationalen Theil des Werthes von v, nämlich

$$\frac{a b \, . \, \sqrt{(a^2 Sin^2 \alpha + b^2 Cos^2 \mu - u^2 Sin^2 \mu)}}{a^2 Sin^2 \mu + b^2 Cos^2 \mu}$$

einmal von R vorwärts nach RM, das andre Mal von R rückwärts nach RS aufträgt. Die beiden Puncte M, S an der Ellipse liegen also desto näher zusammen, je kleiner jener irrationale Theil wird, und fallen ganz zusammen, wenn der irrationale Theil verschwindet. Da wo das letzte der Fall ist, hat die Linie QM oder TM nicht mehr zwei verschiedene Durchschnittspuncte mit der Ellipse gemein, sondern nur einen Berührungspunct M, oder die Linie wird eine Tangente. Aber der irrationale Theil des Werthes von v verschwindet, wenn

$$a^2 Sin^2 \mu - u^2 Sin^2 \mu + b^2 Cos^2 \mu = 0$$

oder $tang^2 \mu = \frac{b^2}{u^2 - a^2}$ ist.

Für diesen Werth von μ ist $v = \frac{b^2 u \, Cos \mu}{a^2 Sin^2 \mu + b^2 Cos^2 \mu}$, weil der irrationale Theil des Werthes von v verschwindet; also da $a^2 Sin^2 \mu + b^2 Cos^2 \mu = u^2 Sin^2 \mu$ war,

$$v = \frac{b^2 Cos \mu}{u \, Sin^2 \mu} = \text{QM oder vielmehr} = \text{TM},$$

also ist $v = \frac{b^2}{u \, tang \mu \, . \, Sin \mu} = \frac{b^2}{u \, Sin \mu \, . \, \sqrt{\frac{b^2}{u^2 - a^2}}}$,

$$= \frac{b \sqrt{(u^2 - a^2)}}{u \, Sin \mu}.$$

Da nun $y = v \, Sin \mu$ und zugleich $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ ist, so ergiebt sich für den Werth von MT, wo diese zur

Tangente wird, $v \sin\mu$ oder $\frac{b}{u}\sqrt{(u^2-a^2)} =$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{b}{u}\sqrt{(u^2-a^2)},$$

das ist $u^2(a^2-x^2) = a^2(u^2-a^2)$,

oder $u^2 = \frac{a^4}{x^2}$;

$$u = \frac{a^2}{x},$$

so groß ist also u oder CT, wenn für den bestimmten Punct M der Winkel μ den Werth haben soll, der der Berührung entspricht.

§. 159. Liegt der Brennpunct in B, so daß $CB = f = \sqrt{(a^2-b^2)}$ ist: so findet man die Entfernung vom einen Brennpuncte B bis zum Einschnitte T der Berührungslinie MT in die große Axe,

$BT = u - \sqrt{(a^2-b^2)} = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2-b^2)}$; und die Entfernung desselben Punctes T vom andern Brennpuncte D ist $DT = \frac{a^2}{x} + \sqrt{(a^2-b^2)}$ (Fig. 49.).

§. 160. Lehrsatz. Wenn man von beiden Brennpuncten D, B grade Linien DM, BM nach irgend einem Puncte M im Umfange der Ellipse zieht, an welchen die Berührungslinie MT gezogen worden ist: so machen DM, BM mit dieser die gleichen Winkel DMU = BMT (Fig. 49.).

Beweis. Ist MP = y die von M auf die große Axe gezogne Senkrechte, also, wenn CP = x,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

so ist $BP = f - x = \sqrt{(a^2-b^2)} - x$,

$DP = \sqrt{(a^2-b^2)} + x$,

$BM^2 = y^2 + BP^2$; $DM^2 = y^2 + DP^2$,

oder $BM = \sqrt{(y^2 + a^2 - b^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2-b^2)})}$;

oder, wenn ich für y^2 seinen Werth setze,

$$BM = \sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - b^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2-b^2)}\right)},$$

$$= \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2x\sqrt{(a^2-b^2)}\right)},$$

oder da sich hieraus die Wurzel wirklich ziehen läßt,

$$BM = a - \frac{x.\sqrt{(a^2-b^2)}}{a},$$

Und eben so ergiebt sich

$$DM = \sqrt{(y^2 + a^2 - b^2 + x^2 + 2x\sqrt{(a^2-b^2)})},$$

$$= \sqrt{\left(a^2 + \frac{(a^2-b^2)x^2}{a} + 2x.\sqrt{(a^2-b^2)}\right)},$$

$$= a + \frac{x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a},$$

Da nun $BT = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2-b^2)}$,

$DT = \frac{a^2}{x} + \sqrt{(a^2-b^2)}$,

so ist allemal $BM : BT = DM : DT$,

indem $BT = \frac{a}{x}.BM$ und $DT = \frac{a}{x}.DT$ ist.

Aber in den Dreiecken BMT, DMT ist

$$\text{Sin } BMT = \frac{\text{Sin } BTM . BT}{BM} = \frac{a}{x}.\text{Sin } BTM,$$

$$\text{Sin } DMT = \frac{\text{Sin } BTM . DT}{DM} = \frac{a}{x}.\text{Sin } BTM,$$

also Sin BMT = Sin DMT, und

$BMT = 180^\circ - DMT = DMU$.

Anmerkung. Dieses ist der Satz, auf den in der Statik §. 232. hingedeutet wurde.

§. 161. Lehrsatz. Wenn man an irgend einen Punct M der Ellipse eine Berührungslinie MT zieht, und auf diese aus dem einen Brennpuncte B eine Senkrechte BV: so ist $BV = b\sqrt{\frac{BT}{DT}}$ oder $= b\sqrt{\frac{BM}{DM}}$.

Ferner ist $k . \text{Cos}\lambda = \left\{\frac{b^2 - N^2}{N}\right\}$,

und $k . \text{Sin}\lambda = \frac{a^2 y}{b^2 x}\left\{\frac{b^2 - N^2}{N}\right\}$.

§. 170. Aufgabe. Für irgend einen durch Abscissen $CP = x$ und Ordinaten $PM = y$ bestimmten Punct M der Ellipse ist die Normallinie NM bestimmt: man sucht eine Gleichung, welche eines andern Punctes U der Ellipse senkrechten Abstand UX von der Normallinie durch MX oder NX ausdrückt.

Auflösung. Es sei des Punctes U Lage zuerst durch Abscissen auf der Hauptaxe $CW = u$, und darauf senkrechte Ordinaten $WU = w$ gegeben; auch sei Lage und Größe der Normallinie durch die gegebnen Größen $CN = k$, $NNP = \lambda$, $MN = N$ bestimmt.

Da U in der Ellipse Umfange liegt, so ist
$w^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$, und man kann nun eine Gleichung zwischen $NX = U$ und der Senkrechten $UX = W$ finden. Es ist nämlich

$$u = CW = CN + NY - XZ = k + U\,\text{Cos}\lambda - W\,\text{Sin}\lambda;$$

und $w = WU = WZ + ZU = U\,\text{Sin}\lambda + W\,\text{Cos}\lambda$,
folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichung

$w^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$ setzt,

$$U^2\,\text{Sin}^2\lambda + 2WU\,\text{Sin}\lambda . \text{Cos}\lambda + W^2\,\text{Cos}^2\lambda = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(k + U . \text{Cos}\lambda)^2 + \frac{2b^2}{a^2} W\,\text{Sin}\lambda\,(k + U\,\text{Cos}\lambda) - \frac{b^2}{a^2} W^2\,\text{Sin}^2\lambda;$$

oder besser geordnet

$$W^2(a^2\,\text{Cos}^2\lambda + b^2\,\text{Sin}^2\lambda) + 2W\,\text{Sin}\lambda\,(U\,\text{Cos}\lambda\,(a^2 - b^2) - b^2 k) = b^2(a^2 - k^2) - 2b^2 k\,U\,\text{Cos}\lambda - U^2(b^2\,\text{Cos}^2\lambda + a^2\,\text{Sin}^2\lambda).$$

Die im vorigen §. gefundenen Werthe für die einzelnen Coefficienten geben nun:

$$W^2 . \frac{b^4}{N^2} + \frac{2Wy}{N}\left\{\frac{Ub^2x}{a^2N}(a^2-b^2) - \frac{a^2}{x}(b^2-N^2)\right\}$$

$$= b^2(a^2-k^2) - 2b^2U\frac{(b^2-N^2)}{N} - \frac{b^2U^2}{N^2}\left\{a^2-x^2\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)\right\}$$

oder $W^2 + 2Wy\left\{\frac{Ux}{a^2b^2}(a^2-b^2) - \frac{a^2N}{b^4x}(b^2-N^2)\right\}$

$$= \frac{N^2}{b^2}(a^2-k^2) - \frac{2N.U}{b^2}(b^2-N^2) - \frac{U^2}{b^2}\left\{a^2-x^2\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)\right\}.$$

Um hieraus W zu entwickeln muß bekanntlich an beiden Seiten des Gleichheitszeichens

$$y^2\left\{\frac{Ux(a^2-b^2)}{a^2b^2} - \frac{a^2N(b^2-N^2)}{b^4x}\right\}^2$$

addirt werden, wodurch man hinter dem Gleichheitszeichen folgendes erhält:

$$\frac{(a^2-k^2)N^2}{b^2} + \frac{y^2a^4N^2(b^2-N^2)^2}{b^8x^2} - 2U\left\{\frac{N(b^2-N^2)}{b^2} + \frac{y^2(a^2-b^2)N(b^2-N^2)}{b^6}\right\}$$

$$- \frac{U^2}{b^2}\left\{a^2-x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2 - \frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2}{a^4b^2}\right\}.$$

Hier läßt sich jedes einzelne Glied noch bequemer ausdrücken; denn es ist

$$\frac{(a^2-k^2)N^2}{b^2} + \frac{y^2a^4N^2(b^2-N^2)^2}{b^8x^2} =$$

$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{a^2 - \frac{a^4}{b^4x^2}(b^2-N^2)^2 + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^4(a^2-x^2)(b^2-N^2)^2}{b^6x^2}\right\}$$

$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{a^2 - (b^2-N^2)^2\left(\frac{a^4}{b^4x^2} - \frac{a^2}{b^4x^2}(a^2-x^2)\right)\right\}$$

$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{a^2 - \frac{a^2(b^2-N^2)^2}{b^4}\right\};$$

ferner $\frac{N}{b^2}(b^2-N^2) + \frac{y^2(a^2-b^2)N(b^2-N^2)}{b^6}$

$$= \frac{N(b^2-N^2)}{b^2}\left\{1 + \frac{(a^2-x^2)(a^2-b^2)}{a^2b^2}\right\}$$

3. die Länge der Normallinie

$$MN = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - x^2\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{\left(a^2 - \frac{(a^2-b^2)}{a^2}x^2\right)}$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{(BM \, . \, DM)},$$

wenn alle Buchstaben ihre vorige Bedeutung behalten.

Beweis. Da der Punct M, für welchen die Normallinie gesucht wird, durch die Coordinaten $CP = x$, $PM = y$ bestimmt ist: so wird (§. 156.) die Lage der Tangente durch $CT = \frac{a^2}{x}$ angegeben.

1. Da das Dreieck NMT bei M rechtwinklicht ist, also $\text{Cotang}\, MNP = \text{tang}\, MTP$,

so ist $\text{Cotang}\, MNP = \frac{y}{PT} = \frac{y}{\frac{a^2}{x} - x} = \frac{xy}{a^2 - x^2}$,

oder weil $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, das ist $(a^2 - x^2) = \frac{a^2 y^2}{b^2}$

$\text{Cotang}\, MNP = \frac{b^2 x}{a^2 y}$.

2. Die Dreiecke NMP, MTP sind ähnlich, also $NP : y = y : PT$, das ist, da $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$,

$NP = \frac{y^2 x}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} x (a^2 - x^2)}{a^2 - x^2} = \frac{b^2 x}{a^2}$, woraus

$CN = x - \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{x(a^2 - b^2)}{a^2}$ folgt.

3. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt auch $MN : MP = TM : PT$,

$MN : y = \sqrt{\left(y^2 + \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2}\right)} : \frac{a^2 - x^2}{x}$,

oder da $y^2 + \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2} = (a^2 - x^2) . \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2 - x^2}{x^2}\right)$,

$MN : \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2 - x^2}{x^2}\right)} : \frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$,

also, da $\tang \varphi = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

$$d.\tang\varphi = \frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\,dx\left(y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y}\right)}{y^2},$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\,dx\,\frac{\left(y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)}{y^3} = \frac{b^2\,dx}{y.(a^2 - x^2)}$$

also $d\varphi = \frac{d\tang\varphi}{1 + \tang^2\varphi} = \frac{b^2\,dx\,.\,a^4\,y^2}{y\,(a^2 - x^2)\,(a^4 y^2 + b^4 x^2)},$

$$= \frac{b^2\,dx\,.\,a^4\,y}{(a^2 - x^2)\,(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)}.$$

Wir finden $ds = dx\,\sqrt{\left\{1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right\}} = dx\,\sqrt{\left\{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right\}}$

$$= dx\,.\,\frac{\sqrt{(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)}}{a^2\,y},$$

und daher $\frac{ds}{d\varphi} = R = \frac{(a^2 - x^2)\,(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2\,a^6\,y^2}$

$$= \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^4\,a^4} = \frac{b^3\,(a^4 - x^2\,(a^2 - b^2))^{\frac{3}{2}}}{b^4\,a^4}$$

also $R = \frac{a^2\,N^3}{b^4}$, wie in §. 172.

Betrachtung der Bewegung in der Ellipse.

§. 173. Bemerkung. Da aus Keplers Vergleichung der vorhandenen Beobachtungen schon bekannt war, daß die Planeten in Ellipsen, in deren einem Brennpuncte die Sonne steht, um die Sonne laufen, und daß der von der Sonne aus zu einem Planeten hingezogne Radius Vector Flächenräume beschreibt, welche den Zeiten proportional sind: so konnte man zuerst (§. 147.) mit Sicherheit schließen, daß die Sonne der Mittelpunct der Kräfte sei, und es ließ sich dann das Gesetz bestimmen, nach welchem in verschiedenen Entfernungen von der Sonne diese Kräfte wirken.

Die Planeten bewegen sich frei in ihren Bahnen, also muß die aus der anziehenden Kraft der Sonne entsprin-

ist aber $MD = a - x$, $LM = 2R - (a - x)$ und

$$EM^2 = v^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$\text{also } \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (a - x)(2R - (a - x)),$$

$$\text{oder } \frac{b^2}{a^2}(a + x) = 2R - a + x,$$

$$\text{oder } 2R = \frac{b^2}{a} + a - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}x.$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Kreise, die in D die Ellipse berühren, und außerdem noch in einem andern Puncte die Ellipse schneiden. Je näher dieser Durchschnittspunct E nach D zu rückt, desto weniger ist x von a verschieden; es sei also $x = a - \frac{1}{u}a$, also

$$2R = \frac{b^2}{a} + a - \frac{(a^2 - b^2)}{a} + \frac{1}{u}\frac{(a^2 - b^2)}{a}$$

$$\text{oder } 2R = \frac{2b^2}{a} + \frac{1}{u}\left\{\frac{a^2 - b^2}{a}\right\}.$$

Da hier $\frac{1}{u}$ so klein werden kann, als man will, oder über jede bestimmte Grenze hinaus abnehmen kann, so nähert R sich der Grenze

$R = \frac{b^2}{a}$, und dieses ist der Halbmesser des Krümmungskreises. Der Kreis von diesem Halbmesser nämlich entfernt sich nicht mehr außerhalb bei D von der Ellipse, um sie in einem andern Puncte E zu schneiden; er entfernt sich aber auch innerhalb weniger als jeder andre Kreis von der Ellipse; denn es ist leicht zu übersehn, daß es Kreise von kleinerm Halbmesser giebt, die sich mehr von der Ellipse entfernten, und daß dieser den Uebergang zu den größern Kreisen macht, die noch einen andern, von D entfernten, Durchschnittspunct mit der Ellipse haben.

§. 169. Bemerkung. Um für einen andern Punct der Ellipse den Krümmungshalbmesser zu finden,

üßte man offenbar den Mittelpunct auf der Normallinie IN (Fig. 51.) suchen, und könnte auf ähnliche Weise, e im vorigen §. bestimmen, welcher Grenze der Halbesser des in M berührenden und durch U gehenden Kreis sich nähert, wenn man U immer näher an M rücken ßt.

Die hiebei vorkommenden Rechnungen werden etwas rwickelter, obgleich sie zu einem sehr einfachen Resultate hren; ich will daher, um nachher die Formeln bequemer zu machen, hier einige vereinfachte Formeln hersetzen, ren wir bedürfen werden.

Nenne ich die Normallinie MN = N, so war in 163. Nr. 3.

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{\left\{a^2 - \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2}\right\}},$$

$$\text{so } \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2} = a^2 - \frac{a^2 N^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - N^2),$$

nd CN, welches ich = k setze, war (§. 163. Nr. 2.),

$$CN = k = \frac{(a^2-b^2)x}{a^2} = \frac{a^2}{b^2}\left\{\frac{b^2-N^2}{x}\right\}.$$

Eben dort fanden wir

$$\text{Cotang } MNB = \frac{b^2 x}{a^2 y}; \text{ also tang } MNB = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

nd daher (Trigon. §. 42.);

$$\text{Sin } MNB = \frac{a^2 y}{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)}} = \frac{a^2 y}{b.\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)}}$$

$$\text{as ist Sin } MNB = \frac{y}{N}; \text{ und auf ähnliche Weise}$$

$$\text{Cos } MNB = \frac{b\,x}{\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)}} = \frac{b^2 x}{a^2 N}.$$

Nenne ich MNB = λ, so ergeben diese Formeln

$$a^2 \text{Cos}^2\lambda + b^2 \text{Sin}^2\lambda = \frac{b^2}{N^2}\left\{\frac{b^2 x^2}{a^2} + y^2\right\} = \frac{b^4}{N^2};$$

$$\text{nd } a^2 \text{Sin}^2\lambda + b^2 \text{Cos}^2\lambda = \frac{b^2}{N^2}\left\{a^2 - x^2\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)\right\};$$

Ferner ist $k \,.\, \mathrm{Cos}\lambda = \left\{ \frac{b^2 - N^2}{N} \right\}$

und $k \,.\, \mathrm{Sin}\lambda = \frac{a^2 y}{b^2 x} \left\{ \frac{b^2 - N^2}{N} \right\}$

§. 170. **Aufgabe.** Für irgend einen durch Absciſſen CP = x und Ordinaten PM = y beſtimmten Punct M der Ellipſe iſt die Normallinie NM beſtimmt: man ſucht eine Gleichung, welche eines andern Punctes U der Ellipſe ſenkrechten Abſtand UX von der Normallinie durch MX oder NX ausdrückt.

Auflöſung. Es ſei des Punctes U Lage zuerſt durch Abſciſſen auf der Hauptaxe CW = u, und darauf ſenkrechte Ordinaten WU = w gegeben; auch ſei Lage und Größe der Normallinie durch die gegebnen Größen CN = k, NNP = λ, MN = N beſtimmt.

Da U in der Ellipſe Umfange liegt, ſo iſt

$w^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$, und man kann nun eine Gleichung zwiſchen NX = U und der Senkrechten UX = W finden. Es iſt nämlich

$u = CW = CN + NY - XZ = k + U \mathrm{Cos}\lambda - W \mathrm{Sin}\lambda;$
und $w = WU = WZ + ZU = U \mathrm{Sin}\lambda + W \mathrm{Cos}\lambda,$
folglich, wenn man dieſe Werthe in die Gleichung

$w^2 = b^2 - \frac{b^2 u^2}{a^2}$ ſetzt,

$$U^2 \mathrm{Sin}^2\lambda + 2WU \mathrm{Sin}\lambda \,.\, \mathrm{Cos}\lambda + W^2 \mathrm{Cos}^2\lambda =$$
$$b^2 - \frac{b^2}{a^2}(k + U \,.\, \mathrm{Cos}\lambda)^2 + \frac{2b^2}{a^2} W \mathrm{Sin}\lambda\, (k + U \mathrm{Cos}\lambda)$$
$$- \frac{b^2}{a^2} W^2 \mathrm{Sin}^2\lambda;$$

oder beſſer geordnet

$$W^2 (a^2 \mathrm{Cos}^2\lambda + b^2 \mathrm{Sin}^2\lambda) + 2W \mathrm{Sin}\lambda\, (U \mathrm{Cos}\lambda\, (a^2 - b^2) - b^2 k)$$
$$= b^2 (a^2 - k^2) - 2b^2 k\, U \mathrm{Cos}\lambda - U^2 (b^2 \mathrm{Cos}^2\lambda + a^2 \mathrm{Sin}^2\lambda).$$

Die im vorigen §. gefundenen Werthe für die einzelnen Coefficienten geben nun:

$$W^2 . \frac{b^4}{N^2} + \frac{2Wy}{N}\left\{\frac{Ub^2x}{a^2N}(a^2-b^2) - \frac{a^2}{x}(b^2-N^2)\right\}$$
$$= b^2(a^2-k^2) - 2b^2U\frac{(b^2-N^2)}{N} - \frac{b^2U^2}{N^2}\left\{a^2 - x^2\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)\right\}$$

oder $W^2 + 2Wy\left\{\frac{Ux}{a^2b^2}(a^2-b^2) - \frac{a^2N}{b^4x}(b^2-N^2)\right\}$
$$= \frac{N^2}{b^2}(a^2-k^2) - \frac{2N.U}{b^2}(b^2-N^2) - \frac{U^2}{b^2}\left\{a^2-x^2\left(\frac{a^4-b^4}{a^4}\right)\right\}.$$

Um hieraus W zu entwickeln muß bekanntlich an beiden Seiten des Gleichheitszeichens

$$y^2\left\{\frac{Ux(a^2-b^2)}{a^2b^2} - \frac{a^2N(b^2-N^2)}{b^4x}\right\}^2$$

addirt werden, wodurch man hinter dem Gleichheitszeichen folgendes erhält:

$$\frac{(a^2-k^2)N^2}{b^2} + \frac{y^2a^4N^2(b^2-N^2)^2}{b^8x^2} - 2U\left\{\frac{N(b^2-N^2)}{b^2} + \frac{y^2(a^2-b^2)N(b^2-N^2)}{b^6}\right\}$$
$$- \frac{U^2}{b^2}\left\{a^2-x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2 - \frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2}{a^4b^4}\right\}.$$

Hier läßt sich jedes einzelne Glied noch bequemer ausdrücken; denn es ist

$$\frac{(a^2-k^2)N^2}{b^2} + \frac{y^2a^4N^2(b^2-N^2)^2}{b^8x^2} =$$
$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{a^2 - \frac{a^4}{b^4x^2}(b^2-N^2)^2 + \frac{b^2}{a^2}.\frac{a^4(a^2-x^2)(b^2-N^2)^2}{b^6x^2}\right\}$$
$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{a^2 - (b^2-N^2)^2\left(\frac{a^4}{b^4x^2} - \frac{a^2}{b^4x^2}(a^2-x^2)\right)\right\}$$
$$= \frac{N^2}{b^2}\left\{a^2 - \frac{a^2(b^2-N^2)^2}{b^4}\right\};$$

ferner $\frac{N}{b^2}(b^2-N^2) + \frac{y^2(a^2-b^2)N(b^2-N^2)}{b^6}$
$$= \frac{N(b^2-N^2)}{b^2}\left\{1 + \frac{(a^2-x^2)(a^2-b^2)}{a^2b^2}\right\}$$

und folglich ist der doppelte Krümmungshalbmesser

$$2R = \frac{2a^2 N^3}{b^4},$$

$$\text{oder } R = \frac{a^2 N^3}{b^4},$$

oder auch nach §. 165. Fig. 49. $R = \frac{BM^{\frac{3}{2}} . DM^{\frac{3}{2}}}{a . b}$.

Zusätze für geübtere Leser.

Mit welcher Leichtigkeit die Differentialrechnung alle hier gefundenen Ausdrücke ergiebt, ist bekannt genug.

Wenn die Gleichung $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ für die Ellipse gegeben und (Fig. 52.) $CP = x$, $PM = y$ ist: so ist für die Lage der Berührungslinie MT,

$$\text{tang } MTP = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ daraus folgt}$$

$$PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{a^2}{x} - x, \text{ also } CT = \frac{a^2}{x}, \text{ wie in}$$

§. 158.

Hieraus folgt auch

$$PN = \frac{y^2}{PT} = \frac{b^2 x}{a^2};$$

$$CN = x - PN = \frac{x (a^2 - b^2)}{a^2}, \text{ wie §. 165.}$$

$$\text{und } MN = \sqrt{(y^2 + PN^2)} = \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2 \right\}}$$

$$= \frac{b}{a} \sqrt{\left\{ a^2 - \frac{x^2 (a^2 - b^2)}{a^2} \right\}} = N, \text{ wie §. 165.}$$

Um den Krümmungshalbmesser zu finden, denke man sich den kleinen Bogen $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ der Ellipse, als einen Kreisbogen, der dem Centriwinkel $= d\varphi$ zugehört, wenn $MTP = \varphi$ ist.

Heißt also der Krümmungshalbmesser $= R$, so ist

$$R . d\varphi = ds, \text{ oder } R = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Es ist aber φ durch seine Tangente gegeben, und bekanntlich

$$d\varphi = \frac{d . \text{tang } \varphi}{1 + \text{tang}^2 \varphi},$$

ist, da $\tan\varphi = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

$$d.\tan\varphi = \frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right\} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\,dx\left(y + \frac{b^2 x^2}{a^2 y}\right)}{y^2},$$

$$= \frac{b^2}{a^2}\,dx\,\frac{\left(y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)}{y^3} = \frac{b^2\,dx}{y.(a^2 - x^2)}$$

also $d\varphi = \frac{d\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{b^2\,dx\,.\,a^4 y^2}{y(a^2 - x^2)(a^4 y^2 + b^4 x^2)}$,

$$= \frac{b^2\,dx\,.\,a^4 y}{(a^2 - x^2)(a^4 y^2 + b^4 x^2)}.$$

Wir finden $ds = dx\sqrt{\left\{1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right\}} = dx\sqrt{\left\{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right\}}$

$$= dx\,.\,\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)}}{a^2 y},$$

und daher $\frac{ds}{d\varphi} = R = \frac{(a^2 - x^2)(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2 a^6 y^2}$

$$= \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{b^4 a^4} = \frac{b^3(a^4 - x^2(a^2 - b^2))^{\frac{3}{2}}}{b^4 a^4}.$$

also $R = \frac{a^2 N^3}{b^4}$, wie in §. 172.

Betrachtung der Bewegung in der Ellipse.

§. 173. **Bemerkung.** Da aus Keplers Vergleichung der vorhandenen Beobachtungen schon bekannt war, daß die Planeten in Ellipsen, in deren einem Brennpuncte die Sonne steht, um die Sonne laufen, und daß der von der Sonne aus zu einem Planeten hingezogne Radius Vector Flächenräume beschreibt, welche den Zeiten proportional sind: so konnte man zuerst (§. 147.) mit Sicherheit schließen, daß die Sonne der Mittelpunct der Kräfte sei, und es ließ sich dann das Gesetz bestimmen, nach welchem in verschiedenen Entfernungen von der Sonne diese Kräfte wirken.

Die Planeten bewegen sich frei in ihren Bahnen, also muß die aus der anziehenden Kraft der Sonne entsprin-

gende, gegen die Richtung der Bewegung oder auf di Tangente der Bahn senkrechte Kraft, der Schwungkraf an dieser Stelle gleich sein, indem sonst die Krümmung der Bahn, die sich allein durch die erlangte Geschwindigkeit und die anziehende Kraft bestimmt, eine andre sein würde. Außerdem muß auch die Geschwindigkeit in der Bahn, deren Beschleunigung oder Verzögerung bloß eine Wirkung der anziehenden Kraft ist, in jedem Puncte der Bahn dieser Kraft gemäß gefunden werden. Hierin liegen Bestimmungsgründe genug, um das Gesetz, wie die anziehende Kraft von der Entfernung abhängt, anzugeben.

§. 174. Lehrsatz. Die Bewegung der Planeten in der Ellipse ist wenigstens an beiden Endpuncten der großen Axe so beschaffen, daß eine dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportionale anziehende Kraft der Schwungkraft das Gleichgewicht hält (Fig. 53.).

Beweis. Es sei die halbe große Axe der Ellipse $= a$, die halbe kleine Axe $= b$, also der Abstand des Brennpunctes (§. 154.) vom Mittelpuncte $= f = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, der Abstand des Brennpunctes, in welchem die Sonne steht, vom einen Ende der Axe $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$, $=$ AS vom andern Ende der Axe $= a + \sqrt{(a^2 - b^2)} =$ BS. Da die in gleichen Zeiten beschriebenen Sectoren ASC und BSD gleich sind und diese für sehr kleine Zeiten als Dreiecke, welche bei A und B rechtwinklicht sind, können angesehen werden, indem SA, SB senkrecht auf die Tangenten in A und B sind: so ergiebt sich aus der Geschwindigkeit $= c$ in A die Geschwindigkeit in B $= c' = \frac{c \cdot SA}{SB} = \frac{c\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}$. An beiden Enden der Axe ist der Krümmungshalbmesser gleich, $= \frac{b^2}{a}$ (§. 168.), und folglich in A die Schwungkraft $= \frac{c^2}{2g \cdot \frac{b^2}{a}} = \frac{c^2 a}{2gb^2}$;

$$\frac{v\,dv}{v^2} = \frac{-dw}{w}, \text{ oder } \tfrac{1}{2}\log v^2 = -\log w + \log \text{Const},$$

$$\text{oder } v = \frac{C}{w}.$$

Um hier die Constante $= C$ zu bestimmen, muß in irgend einem Puncte A der Bahn die Geschwindigkeit bekannt sein. Sie sei $= c$ in demjenigen Puncte A der Bahn, wo die Senkrechte auf die Tangente, nämlich $w = h$ wird, so ist $c = \frac{C}{h}$, also allgemein $v = \frac{h \cdot c}{w}$.

V. Diese Gleichung gilt allgemein für jede nach dem Mittelpuncte B zu wirkenden Kraft, und sie drückt offenbar ganz eben das aus, was wir in §. 145. fanden.

Gebrauchen wir nun diesen Werth für v in der Gleichung

$$p = \frac{z \cdot v^2}{2g\,w\,r}, \text{ so ist}$$

$$2pgr = \frac{c^2 z h^2}{z\,w^3},$$

$$\text{oder } 2gp \,.\, dz = \frac{c^2 h^2\,dw}{w^3}.$$

Diese Gleichung kann immer aufgelöset werden, wenn p eine Function der Entfernung ist.

VI. Wir können uns hier zwei Aufgaben aufzulösen uns vorsetzen. Erstlich, die Function p zu bestimmen, wenn die Bahn gegeben ist; zweitens, die Bahn zu bestimmen, wenn p gegeben ist, oder wenn man weiß, nach welchem Gesetze die Kraft von der Entfernung abhängt.

VII. Die erste Aufgabe wollen wir sogleich auf die Ellipse anwenden.

Die bekannte Gleichung für die Ellipse $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, wo x, y Coordinaten, den beiden Hauptaxen a, b parallel vom Mittelpuncte an, a und b aber die Hälfte dieser Hauptaxen bedeuten, läßt sich leicht so umändern, daß darin z durch w gegeben werde. Zuerst ist $z = \sqrt{(y^2 + (f - x)^2)}$, wenn ich den Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte $= \sqrt{(a^2 - b^2)} = f$

Geschwindigkeit erlangt zu haben, indem er in der Entfernung $= h - s$ vom anziehenden Mittelpuncte ankommt: so muß hier, wo die Geschwindigkeit $= c$ in der Entfernung $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)} = h - s$ ist,

$c = \sqrt{\frac{4g\,R^2 .\, s}{h\,(h-s)}}$ sein. Da nun $h - s = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$

und $s = h - a + \sqrt{(a^2 - b^2)}$

R aber $= \frac{c}{b}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})\,\sqrt{\frac{a}{2g}}$

so ist

$$c^2 = \frac{4g \cdot \frac{c^2}{b^2}\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2 \cdot \frac{a}{2g}\,(h - a + \sqrt{(a^2 - b^2)})}{h\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}$$

oder $h = 2\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})\,.\,\frac{a}{b^2}\,(h - a + \sqrt{(a^2 - b^2)})$

woraus $h =$

$$\frac{2a\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{2a^2 - b^2 - 2a\sqrt{(a^2 - b^2)}} = \frac{2a\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - b^2)} + (a^2 - b^2)}$$

$$h = \frac{2a\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2}{(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})^2} = 2a$$

folgt. Der in der Ellipse laufende Körper müßte also aus der Entfernung $= 2a$ herabgefallen sein, um in der Entfernung $= a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ die Geschwindigkeit erlangt zu haben, die er hier wirklich hat, und die ihm grade die hier nöthige Schwungkraft ertheilt.

Stellen wir eben diese Betrachtung für einen andern Punct M der Ellipse an, so ist dort (§. 175.) die Geschwindigkeit $= \frac{c\,(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})}{b\,\sqrt{\frac{SM}{VM}}}$.

Ein Körper aber, der von der eben vorhin gefundenen Entfernung $= 2a = h$ gegen S herabfiele, hätte in der Entfernung $= SM = h - s = 2a - s$, die Geschwindigkeit $= \sqrt{\frac{4g\,R^2\,(2a - SM)}{2a\,.\,SM}}$ erlangt, oder, wenn ich für R^2 den gehörigen Werth setze, die Geschwindigkeit

sogleich $2g\int p dz = C - \frac{c^2 h^2}{2w^2}$ gefunden.

Es sei $p = \frac{R^2}{z^2}$ also die Kraft umgekehrt den Quadraten der Entfernung proportional, und R die Entfernung, wo $p = 1$ der Schwerkraft gleich wird; so ist

$$2g\int p dz = -\frac{2g R^2}{z} = C - \frac{c^2 h^2}{2w^2}.$$

Wir wollen hier, um die Constans zu bestimmen, annehmen, die Geschwindigkeit $= c$ finde an derjenigen Stelle der Bahn statt, wo das Perpendikel auf die Tangente $= h$, die Entfernung z aber $= k$ ist; dann wird $\frac{2g R^2}{k} = \frac{c^2}{2} - Const$,

$$\text{also } \frac{2g R^2}{z} - \frac{2g R^2}{k} = \frac{1}{2} c^2 \left\{\frac{h^2}{w^2} - 1\right\}.$$

Durch diese Gleichung zwischen z und w ist die Bahn schon bestimmt.

IX. Um hier eine bequemere Gleichung zu finden, sei PBA eine durch den anziehenden Punct B gezogene, willkürliche grade Linie, und für den unbestimmten Punct M sei $BM = z$, $BMP = \psi$; also $Mn = dz$, $mn = z d\psi$, und

$$w = \frac{z^2 d\psi}{\sqrt{(dz^2 + z^2 d\psi^2)}}, \text{ weil } z : w = ds : z d\psi \text{ war};$$

$$\text{also } 2g R^2 \left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{k}\right\} + \frac{1}{2} c^2 = \frac{\frac{1}{2} c^2 h^2 (dz^2 + z^2 d\psi^2)}{z^4 d\psi^2}$$

$$\text{oder } d\psi \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2} c^2 - \frac{2g R^2}{k}\right) z^2 + 2g R^2 . z - \frac{1}{2} c^2 h^2\right\}} = \frac{c h dz}{z\sqrt{2}}.$$

Ich will hier nur kurz $\frac{1}{2} c^2 h^2 = A$; $2g R^2 = B$; $\frac{1}{2} c^2 - \frac{2g R^2}{k} = C$ setzen; dann ist

$$d\psi = \frac{c h}{\sqrt{2}} . \frac{dz}{z\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}},$$

$$\text{und } \psi = \frac{c h}{\sqrt{2A}} \text{Arc. tang} \frac{-2A + Bz}{2\sqrt{A} . \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}};$$

oder da $\sqrt{2A} = c h$ ist;

$$\psi = Const + \text{Arc. tang} \frac{Bz - c^2 h^2}{h c\sqrt{2} . \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}.$$

Soll hier $\psi = 0$ sein, an der Stelle, wo $z = k$, $w = h$

der Ellipse, in welcher der Körper laufen muß. Hier ist R bekannt; denn die anziehende Kraft muß für irgend eine Entfernung gegeben sein.

Hiemit ist also die Länge der großen Axe = 2a und die Lage ihres einen Brennpunctes bekannt. Um auch die Lage der Axe zu bestimmen, dient die Auffindung des andern Brennpunctes. Die Richtungslinie MP ist offenbar eine Tangente der Ellipse; nimmt man also QMV = PMS, so liegt der andre Brennpunct auf MV (§. 166), und zugleich muß seine Entfernung VM von M = 2a − SM sein, da allemal VM + SM = 2a, wenn V und S die beiden Brennpuncte sind.

Hiemit ist also die Lage VS der großen Axe bestimmt; man braucht nur noch VS in O zu halbiren, OA = a aufzutragen, und dann die Ellipse um die Brennpuncte V, S zu zeichnen.

§. 179. Bemerkung. Bei dieser Bestimmung zeigt sich, daß $C^2 < \frac{4g R^2}{l}$ sein muß, wenn die Bahn eine Ellipse werden soll; denn im entgegengesetzten Falle würde die Formel für 2a etwas Negatives geben, oder auch $2a = \infty$, wenn $C^2 = \frac{4g R^2}{l}$ wäre.

Diese Bestimmungen der Formel sind ganz richtig; denn eine nähere Untersuchung zeigt, daß der Körper eine Parabel durchliefe, wenn $C^2 = \frac{4g R^2}{l}$, und eine Hyperbel, wenn $C^2 > \frac{4g R^2}{l}$ wäre.

Ich muß hier diese nähere Untersuchung übergehen, da ich zu lange bei Erklärung der Eigenschaften jener beiden Curven verweilen müßte.

Aus der Bestimmung, daß $R^2 > \frac{C^2 l}{4g}$ sein muß, wenn der Körper eine Ellipse durchlaufen soll, erhellt zu

lich; wenn ich die in M, in der Entfernung = 1 wirkende Kraft = p nenne, daß p, welches = $\frac{R^2}{l^2}$ ist, wenn in der Entfernung = R, die Kraft = 1 war, daß $> \frac{C^2}{4gl}$ sein muß, wenn die Bahn eine Ellipse werden soll.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Um die Gesetze der Bewegung eines Körpers, der durch anziehende Kräfte gegen einen bestimmten Mittelpunct getrieben wird, mit Hülfe der Differential-Rechnung zu entwickeln, wollen wir uns zuerst an die bisher entwickelten Lehren möglichst anschließen. Es ist klar, daß (Fig. 55.) die nach MB auf M wirkende anziehende Kraft, die = p heißen mag, die in M nach der Richtung MV gehende Bewegung beschleuniget, mit einer Kraft = p. Cos BMT; und daß dagegen die auf die Tangente senkrechte Kraft, = p. Sin. BMT, die aus der Zerlegung der Kraft p entsteht, genau der Schwungkraft gleich sein muß, also = $\frac{v^2}{2gr}$, wenn v die Geschwindigkeit in M, r der Werth des Krümmungshalbmessers an dieser Stelle ist.

Aus diesen beiden Bestimmungen ergeben sich theils die Gesetze der Bewegung auf der Curve, theils die Gleichung für die Curve selbst.

II. Es sei die veränderliche Entfernung des bewegten Punctes vom anziehenden Mittelpuncte BM = z; die von B auf die Richtungslinie der Bewegung oder auf die Tangente MT der Bahn gefällte Senkrechte = w; so ist

$$\text{Sin BMT} = \frac{w}{z}; \quad \text{Cos BMT} = \frac{\sqrt{(z^2 - w^2)}}{z},$$

woraus die nach der Tangente wirkende Kraft

$$= \frac{p \cdot \sqrt{(z^2 - w^2)}}{z}$$ gefunden wird. Da diese als beschleunigende Kraft die Geschwindigkeit = v vermehrt, so ist (nach Zusatz zu §. 62.), $dv = \frac{2gpdt.\sqrt{(z^2 - w^2)}}{z}$.

Aus der Bestimmung der Schwungkraft hingegen, welche der

gegen die Richtung der Bahn senkrechten Kraft gleich sein muß, wird $\frac{p \cdot w}{z} = \frac{v^2}{2gr}$ gefunden.

In diesen Gleichungen ist allemal der Krümmungshalbmesser eine bekannte Function von z und w; auch ist, wenn wir $\frac{ds}{v} = dt$ setzen, und unter ds den in der Zeit $= dt$ durchlaufenen Weg verstehen, ds leicht durch z und w auszudrücken, wodurch dann, wenn p eine gegebne Function von z ist, alle vorkommenden Größen auf die drei Größen v, z, w zurückgeführt werden, zu deren gegenseitigen Bestimmung zwei Gleichungen gegeben werden.

III. Es ist, wenn man das kleine Stück Mm der Bahn $= ds$ nimmt, und mn senkrecht auf BM zieht (Fig. 55.), das Dreieck Mnm ∽ MVB, und folglich, da $Mn = dz$
$ds : dz = z : \sqrt{(z^2 - w^2)}$. Hieraus folgt für

$$dv = \frac{2g \cdot pdt}{z} \sqrt{(z^2 - w^2)},$$

$$\text{oder } vdv = 2gp \cdot vdt \cdot \frac{\sqrt{(z^2 - w^2)}}{z},$$

$$vdv = -2gp \cdot ds \cdot \frac{dz}{ds} = -2gp\,dz,$$ weil z abnimmt, wenn BMT spitz oder dv positiv ist,

also $p = \frac{-vdv}{2g\,dz}$. Aber die zweite obige Gleichung $\frac{p \cdot w}{z} = \frac{v^2}{2gr}$, giebt auch $p = \frac{z\,v^2}{w \cdot 2gr}$, und aus der Vergleichung beider Werthe von p folgt $\frac{vdv}{v^2} = \frac{-z\,dz}{w \cdot r}$.

IV. Um den Krümmungshalbmesser $= r$ durch z und w auszudrücken, dient folgende Ueberlegung. Ziehet man an M und m die Tangenten MT, mt: so schließen diese den Krümmungswinkel $= d\varphi = tMT$ ein, und bekanntlich ist $ds = r \cdot d\varphi$. Aber wenn mt auf BV das Stück $Vv = dw$ abschneidet, so ist auch $dw = mV \cdot d\varphi = MV \cdot d\varphi = d\varphi \cdot \sqrt{(z^2 - w^2)}$,

$$\text{folglich } r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dw} \cdot \sqrt{(z^2 - w^2)} = \frac{z\,dz}{dw},$$
weil $ds : dz = z : \sqrt{(z^2 - w^2)}$,

Die Gleichung $\frac{vdv}{v^2} = \frac{-z\,dz}{w \cdot r}$ giebt also

$$\frac{vdv}{v^2} = \frac{-dw}{w}, \text{ oder } \tfrac{1}{2}\log v^2 = -\log w + \log Const,$$

oder $v = \frac{C}{w}$.

Um hier die Constante $= C$ zu bestimmen, muß in irgend einem Puncte A der Bahn die Geschwindigkeit bekannt sein. Sie sey $= c$ in demjenigen Puncte A der Bahn, wo die Senkrechte auf die Tangente, nämlich $w = h$ wird, so ist $c = \frac{C}{h}$, also allgemein $v = \frac{h \cdot c}{w}$.

V. Diese Gleichung gilt allgemein für jede nach dem Mittelpuncte B zu wirkenden Kraft, und sie drückt offenbar ganz eben das aus, was wir in §. 145. fanden.

Gebrauchen wir nun diesen Werth für v in der Gleichung

$$p = \frac{z v^2}{2g w r}, \text{ so ist}$$

$$2pgr = \frac{c^2 z h^2}{w^3},$$

$$\text{oder } 2gp \,.\, dz = \frac{c^2 h^2 dw}{w^3}.$$

Diese Gleichung kann immer aufgelöset werden, wenn p eine Function der Entfernung ist.

VI. Wir können uns hier zwei Aufgaben aufzulösen uns vorsetzen. Erstlich, die Function p zu bestimmen, wenn die Bahn gegeben ist; zweitens, die Bahn zu bestimmen, wenn p gegeben ist, oder wenn man weiß, nach welchem Gesetze die Kraft von der Entfernung abhängt.

VII. Die erste Aufgabe wollen wir sogleich auf die Ellipse anwenden.

Die bekannte Gleichung für die Ellipse $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, wo x, y Coordinaten, den beiden Hauptaxen a, b parallel vom Mittelpuncte an, a und b aber die Hälfte dieser Hauptaxen bedeuten, läßt sich leicht so umändern, daß darin z durch w gegeben werde. Zuerst ist $z = \sqrt{(y^2 + (f - x)^2)}$, wenn ich den Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte $= \sqrt{(a^2 - b^2)} = f$

nenne, also $z = \sqrt{\left\{a^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + x^2 - 2x\sqrt{(a^2-b^2)}\right\}}$

$$= a - \frac{x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} = \frac{a^2 - fx}{a}.$$

Für w aber findet man leicht auch einen durch x ausgedrückten Werth. Stelle nämlich BT die verlängerte große Axe der Ellipse vor und MT ihre Tangente; so ist $\tang BTM = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

und $PT = \frac{y^2 a^2}{b^2 x} = \frac{a^2 - x^2}{x}$;

$$BT = PT - (f - x) = \frac{a^2}{x} - f = \frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)};$$

also $BV = w = BT \,.\, \text{Sin}\, BTM$

$$= \left\{\frac{a^2}{x} - \sqrt{(a^2 - b^2)}\right\} \frac{b^2 x}{\sqrt{(b^4 x^2 + a^4 y^2)}}$$

$$w = \frac{(a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)})\,.\,b}{\sqrt{(b^4 x^2 + a^2(a^2 - x^2))}} = b\,\frac{(a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)})}{\sqrt{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)}}$$

$$= b\sqrt{\frac{a^2 - x\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2 + x\sqrt{(a^2-b^2)}}},$$

oder $w^2 = b^2 \left\{\frac{a^2 - fx}{a^2 + fx}\right\} = \frac{b^2 z}{2a - z}$

$$\frac{1}{w^2} = \frac{2a}{b^2 z} - \frac{1}{b^2};$$

woraus durch Differentiirung folgt

$$-\frac{dw}{w^3} = -\frac{a\,dz}{b^2 z^2}.$$

Nun sollte, vermöge der oben gefundenen Gleichung

$$2gp\,dz = \frac{c^2 h^2\, dw}{w^3},\ \text{sein,}$$

also $2gp\,dz = \frac{c^2 h^2 a\, dz}{b^2 z^2}$;

$$p = \frac{c^2 h^2 a}{2g b^2 z^2}.$$

Die anziehende Kraft muß also dem Quadrate des Abstandes z umgekehrt proportional sein, wenn die Bahn elliptisch sein soll.

VIII. Ist die umgekehrte Aufgabe vorgelegt, nämlich die Bahn zu bestimmen, wenn die anziehende Kraft eine gegebene Function von z ist, so wird aus der Gleichung

$$2gp\,dz = c^2 h^2 \frac{dw}{w^3},$$

sogleich $2g\int p dz = C - \frac{c^2 h^2}{2w^2}$ gefunden.

Es sei $p = \frac{R^2}{z^2}$ also die Kraft umgekehrt den Quadraten der Entfernung proportional, und R die Entfernung, wo $p = 1$ der Schwerkraft gleich wird; so ist

$$2g\int p dz = -\frac{2g R^2}{z} = C - \frac{c^2 h^2}{2w^2}.$$

Wir wollen hier, um die Constans zu bestimmen, annehmen, die Geschwindigkeit $= c$ finde an derjenigen Stelle der Bahn statt, wo das Perpendikel auf die Tangente $= k$, die Entfernung z aber $= k$ ist; dann wird $\frac{2g R^2}{k} = \frac{c^2}{2} - Const$,

$$\text{also } \frac{2g R^2}{z} - \frac{2g R^2}{k} = \frac{1}{2} c^2 \left\{ \frac{h^2}{w^2} - 1 \right\}.$$

Durch diese Gleichung zwischen z und w ist die Bahn schon bestimmt.

IX. Um hier eine bequemere Gleichung zu finden, sei PBA eine durch den anziehenden Punct B gezogne, willkürliche grade Linie, und für den unbestimmten Punct M sei $BM = z$, $BMP = \psi$; also $Mn = dz$, $mn = z d\psi$, und

$w = \frac{z^2 d\psi}{\sqrt{(dz^2 + z^2 d\psi^2)}}$, weil $z : w = dz : z d\psi$ war;

$$\text{also } 2g R^2 \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{k} \right\} + \frac{1}{2} c^2 = \frac{\frac{1}{2} c^2 h^2 (dz^2 + z^2 d\psi^2)}{z^4 d\psi^2}$$

$$\text{oder } d\psi \sqrt{\left\{ \left(\frac{1}{2} c^2 - \frac{2g R^2}{k} \right) z^2 + 2g R^2 . z - \frac{1}{2} c^2 h^2 \right\}} = \frac{c h d z}{z \sqrt{2}}.$$

Ich will hier nur kurz $\frac{1}{2} c^2 h^2 = A$; $2g R^2 = B$; $\frac{1}{2} c^2 - \frac{2g R^2}{k} = C$ setzen; dann ist

$$d\psi = \frac{c h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dz}{z \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}},$$

$$\text{und } \psi = \frac{c h}{\sqrt{2A}} \text{Arc . tang} \frac{-2A + Bz}{2\sqrt{A} . \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}},$$

oder da $\sqrt{2A} = ch$ ist;

$$\psi = Const + \text{Arc . tang} \frac{Bz - c^2 h^2}{h c \sqrt{2} . \sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}.$$

Soll hier $\psi = 0$ sein, an der Stelle, wo $z = k$, $w = h$

ist: so wird Const $=$ Arc. tang $\frac{2A - Bk}{2\sqrt{A}\,.\,\sqrt{(Ck + Bk - A)}}$, woraus sich der allgemeine Werth von φ leicht darstellen ließe. (*)

Um hier nicht allzu weitläuftig zu rechnen, wollen wir annehmen, daß an der Stelle, wo die Geschwindigkeit $= c$ ist, der Radius Vector selbst senkrecht auf die Tangente, also an dieser Stelle $z = w = h = k$ sei. Dann ist

$$2A - Bh = c^2 h^2 - 2ghR^2, \text{ und}$$

$$Ch^2 + Bh - A = o, \text{ also}$$

$$\text{Const} = \text{Arc. tang}\,\infty = \tfrac{1}{2}\pi; \text{ und allgemein}$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc. tang}\,\frac{c^2 h^2 - 2gzR^2}{ch\,.\,\sqrt{(c^2 z^2 - \frac{4g R^2 z^2}{h} + 4gzR^2 - c^2 h^2)}}$$

$$\text{also Cotang}\,\psi = \frac{c^2 h^2 - 2gzR^2}{ch\,.\,\sqrt{\left(c^2(z^2 - h^2) + \frac{4gzR^2}{h}(h - z)\right)}}$$

(*) Das Integral $\int \frac{dz}{z\,.\,\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}$ wird so gefunden. Da $\frac{dz}{z\,\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}} = \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{\left(C + \frac{B}{z} - \frac{A}{z^2}\right)}}$

ist: so wird, wenn ich $\frac{1}{z} = \xi$ setze

$$\frac{-d\xi}{\sqrt{(C + B\xi - A\xi^2)}} = \frac{-d\xi : \sqrt{A}}{\sqrt{\left\{\frac{C}{A} + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2} - \left(\xi - \frac{1}{2}\frac{B}{A}\right)^2\right\}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{A}}\,.\,\frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{C}{A} + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2}\right)}}\,.\,\frac{1}{\left(1 - \frac{\left(\xi - \frac{B}{2A}\right)^2}{\frac{C}{A} + \frac{1}{4}\frac{B^2}{A^2}}\right)}.$$

Hievon ist das Integral

$$= \text{Const} - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\text{Arc. Sin}\,\frac{2A\xi - B}{\sqrt{(4AC + B^2)}}$$

$$= \text{Const} - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\text{Arc. tang}\,\frac{2A\xi - B}{2\sqrt{A}\,.\,\sqrt{(C + B\xi - A\xi^2)}}$$

$$= \text{Const} - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\text{Arc. tang}\,\frac{2A - Bz}{2\sqrt{A}\,.\,\sqrt{(Cz^2 + Bz - A)}}.$$

$$\text{Cosin}\,\psi = \frac{c^2 h^2 - 2gzR^2}{z\,(c^2 h - 2g R^2)},$$

$$\text{oder } z = \frac{c^2 h^2}{2g R^2 + (c^2 h - 2g R^2)\,\text{Cos}\,\psi}.$$

X. Dieses ist eine Gleichung für einen Kegelschnitt, denn wenn wir in der bekannten Gleichung für die Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$y = z\,.\,\text{Sin}\,\psi$ und $x - f = z\,.\,\text{Cos}\,\psi$ setzen, wo nämlich $f = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, der Abstand des Brennpunctes vom Mittelpuncte ist: so haben wir

$$z^2\,\text{Sin}^2\,\psi = \frac{b^2}{a^2}(b^2 - 2fz\,\text{Cos}\,\psi - z^2\,\text{Cos}^2\,\psi).$$

Setze ich hier $f = e\,.\,a$, so daß e die Excentricität oder das Verhältniß der Entfernung des Brennpunctes vom Mittelpuncte zur halben großen Axe angiebt, so ist

$$z^2\,(a^2\,\text{Sin}^2\,\psi + b^2\,\text{Cos}^2\,\psi) = b^4 - 2b^2 f z\,\text{Cos}\,\psi,$$

oder weil $b^2 = a^2 - f^2 = a^2\,(1 - e^2)$ ist,

$$z^2\,(a^2 - a^2 e^2\,\text{Cos}^2\,\psi) = a^2\,(1 - e^2)\,(a^2\,(1 - e^2) - 2eaz\,\text{Cos}\,\psi)$$

oder $z^2\,(1 - e^2\,\text{Cos}^2\,\psi) = a^2\,(1 - e^2)^2 - 2eaz\,(1 - e^2)\,\text{Cos}\,\psi,$

oder $z^2 = a^2\,(1 - e^2)^2 - 2a\,(1 - e^2)\,e\,z\,\text{Cos}\,\psi + e^2 z^2\,\text{Cos}^2\,\psi,$

das ist $z = a\,(1 - e^2) - e\,z\,\text{Cos}\,\psi,$

$$\text{oder } z = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,\text{Cos}\,\psi}.$$

Eben diese Gleichung würde man für die Hyperbel finden, nur daß man dort a als negativ ansehen muß, also

$$z = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e\,\text{Cos}\,\psi}$$ setzen muß. Für die Parabel ist sie in dieser Form nicht gut anwendbar, da $a = \infty$ und $e = 1$ ist; aber $a\,(1 - e^2) = a\left\{1 - \frac{f^2}{a^2}\right\} = \frac{a^2 - f^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ ist in der Ellipse und Hyperbel dem halben Parameter gleich $= \frac{1}{2}P$, und

$$z = \frac{\frac{1}{2}P}{1 + e\,\text{Cos}\,\psi}$$ ist eine für alle Kegelschnitte geltende Gleichung, da sich leicht nachweisen läßt, daß auch bei der Parabel $z = \frac{\frac{1}{2}P}{1 + \text{Cos}\,\psi}$ ist.

XI. Unsre Gleichung $z = \frac{c^2 h^2}{2g R^2 + (c^2 h - 2g R^2)\,\text{Cos}\,\psi}$ giebt also die Bahn als einen Kegelschnitt an, dessen halber Para-

Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist; man sucht die am Ende der Zeit $= t$ noch übrige Geschwindigkeit aus der gegebnen anfänglichen Geschwindigkeit zu bestimmen.

Auflösung. War die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, der Exponent des Widerstandes $= k$, und g der Raum, durch welchen die beschleunigende Kraft $= 1$ den Körper in der ersten Secunde treibt: so ist am Ende der Zeit $= t$, die noch übrige Geschwindigkeit

$$v = \frac{c\,k^2}{k^2 + 2gct}.$$

Beweis. Da in unserer Betrachtung die beschleunigende Kraft $= -\frac{v^2}{k^2}$ für jeden Augenblick der Bewegung ist: so müßte billig in §. 58. die Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet werden (Fig. 21.), daß $Ag = 2g\,\frac{c^2}{k^2}$ und für jede verflossene Zeit $= t = AT$, die Kraft durch $TG = 2g\,.\,\frac{v^2}{k^2}$ dargestellt würde. Nehmen wir hier den in der Auflösung angegebenen Werth für v, und bedenken zugleich, daß die Fläche $AgGT$ sich zu $Ag\,.\,AT$ eben so verhält, wie die in der Zeit $= t$ verlohrene Geschwindigkeit zu $2g\,.\,\frac{c^2}{k^2}\,t$, oder daß $c - v = \frac{AgGT\,.\,t}{AT}$, weil $Ag = 2g\,.\,\frac{c^2}{k^2}$, so erhalten wir, wenn wir die Zeit t in n gleiche Theile zerlegt und dann der schon angegebnen Bestimmung gemäß, die Scale gezeichnet annehmen, so daß $\frac{v^2}{k^2}$

am Ende der Zeit $\frac{1}{n}t = \frac{c^2\,k^2}{(k^2 + \frac{1}{n}\,.\,2gct)^2}$ wird;

am Ende der Zeit $\frac{2}{n}t = \frac{c^2\,k^2}{(k^2 + \frac{2}{n}\,.\,2gct)^2}$ und so ferner

... $= z$ und eine mit BP parallele Kraft $= \frac{p \cdot PB}{z}$, oder $\frac{p \cdot x}{z}$, wenn ich B selbst als Anfangspunct der x annehme.

... die Kraft eine anziehende, so wirken diese zerlegten Kräfte da..., um die Coordinaten x, y zu vermindern, und da allemal ... Aenderung der Geschwindigkeit gleich der Kraft multiplicirt mit ... dt ist, so haben wir hier in Beziehung auf die beiden, den ... ordinaten parallelen Kräfte

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{2g \cdot px}{z} dt; \text{ und } \frac{d^2y}{dt} = -\frac{2gpy \cdot dt}{z}$$

...e, wenn man jene Gleichung mit $\frac{2dx}{dt}$,

...se mit $\frac{2dy}{dt}$ multiplicirt,

$$\frac{2dx \cdot d^2x}{dt^2} = -4g \cdot \frac{p \cdot xdx}{z}; \text{ und}$$

$$\frac{2dy \cdot d^2y}{dt^2} = -4g \cdot \frac{p \cdot ydy}{z},$$

...o auch $\frac{2dx \cdot d^2x + 2dy\, d^2y}{dt^2} = -4gp \cdot \frac{(xdx + ydy)}{z}$,

...raus, weil $xdx + ydy = zdz$ ist,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \text{Const} - 4g\int pdz;$$

oder $\frac{ds^2}{dt^2} = \text{Const} - 4g\int pdz$ folgt.

XIV. Die vorigen Gleichungen geben aber auch

$$\frac{y\, d^2x}{dt} = -\frac{2gpx \cdot ydt}{z}, \text{ und}$$

$$\frac{x\, d^2y}{dt} = -\frac{2gpx \cdot ydt}{z}, \text{ also}$$

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt} = 0,$$

...er integrirt $\int (xd^2y - yd^2x) = xdy - ydx = C \cdot dt$.

Diese letztere Gleichung zeigt, daß für jede anziehende, ge... ...g den unveränderlichen Punct B gerichtete, Kraft, die vom Ra... ...us Vector beschriebenen Sectoren den Zeiten proportional sind.

Es ist nämlich der in der Zeit $= dt$ beschriebene Sector ...Bm $= \frac{z^2 d\varphi}{2}$, wenn ich BM $= z$, PBM $= \varphi$ nenne. Da

und hier ergiebt sich für $n = 1$ sogleich

$$\frac{1}{k^2 + 2gcu} < \frac{1}{k^2} \text{ und } > \frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2};$$

und ferner $n = 2$,

$$\frac{2}{(k^2 + 4gcu)} < \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2}$$

$$> \frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2} + \frac{k^2}{(k^2 + 4gcu)^2},$$

denn hier ist bei dem Uebergange von $n = 1$ zu $n = 2$ der vor dem Ungleichheitszeichen stehende Theil um

$$\frac{2}{k^2 + 4gcu} - \frac{1}{k^2 + 2gcu} = \frac{k^2}{(k^2 + 4gcu)(k^2 + 2gcu)}$$

gewachsen, der nach dem Ungleichheitszeichen stehende erste Theil ist um $\frac{k^2}{(k^2 + 2gcu)^2}$, also mehr als jener gewachsen, der nach dem Ungleichheitszeichen stehende zweite Theil um $\frac{k^2}{(k^2 + 4gcu)^2}$ also weniger als jener gewachsen. So läßt sich, ganz so wie in §. 65., beweisen, daß der Ausdruck $\frac{2gc^2nu}{k^2 + 2gcnu}$ immer zwischen den angegebnen Grenzen liegt, und daß diese Grenzen durch Vergrößerung des n oder durch Zerlegung der Zeit t in immer mehrere Theilchen so nahe man will an einander können gerückt werden.

§. 187. Die Formel $v = \frac{k^2 . c}{k^2 + 2gct}$, zeigt daß die am Ende der Zeit $= t$ noch übrige Geschwindigkeit nie $= 0$ wird, selbst wenn t sehr groß ist, daß also die Bewegung nach diesem Gesetze des Widerstandes zwar immer verzögert wird, doch aber nie ganz aufhört.

Man kann hieraus schließen, daß die Reibung, die auch als eine verzögernde Kraft wirkt, nicht dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein kann, denn

l = z und eine mit BP parallele Kraft $= \frac{p \cdot PB}{z}$, oder $\frac{p \cdot x}{z}$, wenn ich B selbst als Anfangspunct der x annehme.

Ist die Kraft eine anziehende, so wirken diese zerlegten Kräfte dahin, um die Coordinaten x, y zu vermindern, und da allemal die Aenderung der Geschwindigkeit gleich der Kraft multiplicirt mit dt ist, so haben wir hier in Beziehung auf die beiden, den Coordinaten parallelen Kräfte

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{2g \cdot px}{z} dt; \text{ und } \frac{d^2y}{dt} = -\frac{2gpy \cdot dt}{z}$$

Hieraus, wenn man jene Gleichung mit $\frac{2dx}{dt}$, diese mit $\frac{2dy}{dt}$ multiplicirt,

$$\frac{2dx \cdot d^2x}{dt^2} = -4g \cdot \frac{p \cdot xdx}{z}; \text{ und}$$

$$\frac{2dy \cdot d^2y}{dt^2} = -4g \cdot \frac{p \cdot ydy}{z};$$

also auch $\frac{2dx \cdot d^2x + 2dy\, d^2y}{dt^2} = -4gp \cdot \frac{(xdx + ydy)}{z}$,

woraus, weil $xdx + ydy = zdz$ ist,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \text{Const} - 4g\int pdz;$$

oder $\frac{ds^2}{dt^2} = \text{Const} - 4g\int pdz$ folgt.

XIV. Die vorigen Gleichungen geben aber auch

$$\frac{y\, d^2x}{dt} = -\frac{2gpx \cdot ydt}{z}; \text{ und}$$

$$\frac{x\, d^2y}{dt} = -\frac{2gpx \cdot ydt}{z}, \text{ also}$$

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt} = 0,$$

oder integrirt $\int(xd^2y - yd^2x) = xdy - ydx = C \cdot dt$.

Diese letztere Gleichung zeigt, daß für jede anziehende, gegen den unveränderlichen Punct B gerichtete, Kraft, die vom Radius Vector beschriebenen Sectoren den Zeiten proportional sind.

Es ist nämlich der in der Zeit = dt beschriebene Sector $BMm = \frac{z^2 d\varphi}{2}$, wenn ich $BM = z$, $PBM = \varphi$ nenne. Da

wenn man die durch die Schwere hervorgebrachte Ablenkung bei Seite setzt.

§. 191. Bemerkung. Wenn auf der Erde ein Körper vertical herunter fällt, und im Fallen durch ein Widerstand leistendes Fluidum dringen muß: so fallen die Richtungen der Schwere und des Widerstandes mit der Richtung der Bewegung selbst zusammen, jene nämlich treibt den Körper als beschleunigende Kraft fort, diese hingegen wirkt als verzögernde Kraft seiner Bewegung grade entgegen. Ist also die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$, die Kraft des Widerstandes $= \frac{v^2}{k^2}$ bei der Geschwindigkeit $= v$: so ist die gesammte beschleunigende Kraft, welche den Körper niederwärts treibt,

$$= 1 - \frac{v^2}{k^2}.$$

§. 192. Aufgabe. Ein der Schwere unterworfener, sich vertical niederwärts bewegender Körper leidet einen dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand; zu bestimmen, wie groß, nach einer bestimmten Zeit $= t$, die Geschwindigkeit $= v$ sein wird, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ gegeben ist.

Auflösung. Wenn man keine höhern Rechnungen zu brauchen gelernt hat, so mögte es hiezu kaum ein anderes Mittel geben, als daß man die Zeit $= t$ in kleine Zeittheile $= \frac{1}{n} t$, z. B. halbe oder Viertheil Secunden zerlegt, und nun bedenkt, daß die Aenderung der Geschwindigkeit beinahe durch $2g . G . \frac{1}{n} t$ ausgedrückt wird, wenn G die am Anfange der Zeit $= \frac{1}{n} t$ wirkende beschleunigende Kraft ist.

Da im ersten Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit $= c$ war, so ist die damit zusammen gehörige beschleunigende Kraft $G = 1 - \frac{c^2}{k^2}$, also die Aenderung

o. $d\varphi = \frac{dz \cdot ck \cdot \sin\lambda}{z\sqrt{\left\{\left(c^2 - \frac{4gR^2}{k}\right)z^2 + 4gR^2 z - c^2 k^2 \sin^2\lambda\right\}}}$,

lches eben die Gleichung ist, worauf wir in IX. geleitet wur- t, wo ψ mit unserm φ und h mit unserm $k \sin\lambda$ überein- nmt.

Elfter Abschnitt.

on der gradlinigten Bewegung eines Kör- ers, welcher einen von der erlangten Ge- schwindigkeit abhängigen Widerstand leidet.

179. Erfahrung. Wenn ein fester Körper sich einem flüssigen fortbewegt, so daß er die Theilchen des lüssigen aus der Stelle treibt: so wird hiedurch die Ge- hwindigkeit jenes Körpers um etwas vermindert. Die rfahrung zeigt, und auch theoretische Betrachtungen ssen es vermuthen, daß dieser Widerstand dem Qua- rate der Geschwindigkeit proportional ist. Uebrigens ingt die Größe dieses Widerstandes von der Gestalt des örpers und von der Dichtigkeit des Widerstand leisten- n Flüssigen ab, worüber die näheren Bestimmungen der Hydraulik vorkommen.

§. 180. Bemerkung. Dieser Widerstand ist an- sehen, als eine, der Richtung grade entgegenwirkende wegende Kraft, die aber, da sie von der jedesmaligen eschwindigkeit abhängt, fast immer eine veränderliche . Die Größe dieser bewegenden Kraft ist völlig be- mmt durch die Gestalt und Größe des bewegten festen örpers, durch die Beschaffenheit des Flüssigen, und rch die Geschwindigkeit der Bewegung. Diese ge-

sammte bewegende Kraft wird darauf verwendet, die Geschwindigkeit aller Theile des bewegten Körpers zu vermindern, und diese Verminderung beträgt daher für jedes Theilchen desto mehr, und folglich für den ganzen Körper desto mehr, je kleiner seine Masse oder die Anzahl seiner körperlichen Theile ist.

Hier ist also ein Fall, wo wir aus gegebnen Umständen die bewegende Kraft $= P$ kennen, und aus durch die Rücksicht auf die bewegte Masse $= M$, die beschleunigende, oder hier negativ beschleunigende, das ist verzögernde, Kraft $= \frac{P}{M}$ finden.

Anmerkung. Es ist bekannt, daß eine Bleikugel viel schneller durch die Luft herabfällt, als eine eben so große hohle Glaskugel unter ganz gleichen Umständen. Beide leiden einen gleich großen Widerstand der Luft; aber dieser gleiche Widerstand hemmt viel auffallender die Geschwindigkeit der hohlen Glaskugel, wo eine geringere Anzahl von Theilchen zurückzuhalten ist, als die viel dichtere oder mit viel mehr Masse anrückende Bleikugel.

§. 181. Bemerkung. Um die Untersuchung zu erleichtern, wollen wir hier zuerst diejenigen Fälle betrachten, wo gar keine andre beschleunigende Kräfte wirken, wo der bloß träge Körper mit unveränderlicher Geschwindigkeit fortgehen würde, wenn nicht dieser Widerstand seine Geschwindigkeit unaufhörlich verminderte. Wir werden dann zur Betrachtung der Bewegung fallender Körper in einem widerstehenden Mittel übergehen.

§ 182. Bemerkung. Da die verzögernde Kraft $= p$, welche der Widerstand ausübt, hier bloß von der Geschwindigkeit $= v$ abhängt, und, wie wir annehmen, dem Quadrate derselben proportional ist: so läßt sie sich immer durch $p = \frac{v^2}{k^2}$ ausdrücken, wenn k diejenige Geschwindigkeit bedeutet, bei welcher jene Kraft $= 1$ ist. Wir können auch hier als Einheit der Kräfte die beschleunigende Kraft der Schwere, so wie wir sie an der Ober-

fläche der Erde kennen, annehmen, und die verzögernde Kraft des Widerstandes = 1 setzen, wenn sie des Körpers Bewegung grade eben so sehr verzögert, als es die Schwere bei einem vertical aufwärts geworfenen Körper thut. Obgleich nun wegen der sich unaufhörlich ändernden Geschwindigkeit die verzögernde Kraft des Widerstandes sich ebenfalls ändert, und folglich die Verzögerung der Bewegung nie eine geraume Zeit durch so erfolgen kann, wie es durch die Schwere bei aufwärts geworfenen Körpern geschieht; so können wir doch in der Vorstellung die Geschwindigkeit = k, wobei die Verzögerung grade jene Größe hat, festhalten, und sagen, wenn diese Geschwindigkeit, des Widerstandes ungeachtet, durch eine fremde Kraft immer erhalten würde, so wäre die Einwirkung des Widerstandes, der hier als eine negative beschleunigende Kraft angesehen wird, der Kraft der Schwere gleich.

§. 183. Erklärung. Diese Geschwindigkeit = k, bei welcher die Kraft des Widerstandes = 1 ist, heißt: der Exponent des Widerstandes.

§. 184. Wenn ein sehr dichter Körper sich in einem sehr dünnen Fluido fortbewegt: so muß die Geschwindigkeit sehr groß sein, um den Widerstand so erheblich zu machen, daß er = 1 sei; dagegen reicht bei einem stärker widerstehenden Flüssigen schon eine geringere Geschwindigkeit hin, um eine eben so stark verzögernde Kraft hervorzubringen. Je größer also k ist, desto geringer ist, unter sonst gleichen Umständen, der Widerstand. Z. B. für eine im Wasser fortbewegte Bleikugel von 3 Zoll Durchmesser ist k nur ohngefehr = 16 Fuß, aber wenn eben diese Bleikugel sich in der Luft fortbewegt, so ist k = 420 Fuß; das heißt, der Widerstand ist im Wasser schon bei 16 Fuß Geschwindigkeit in 1 Secunde, in der Luft erst bei 420 Fuß Geschwindigkeit, der Schwerkraft gleich.

§. 185. Aufgabe. Ein Körper, auf den sonst keine beschleunigenden Kräfte wirken, bewegt sich in einem widerstehenden Flüssigen fort, dessen Widerstand dem

Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist; man sucht die am Ende der Zeit $= t$ noch übrige Geschwindigkeit aus der gegebnen anfänglichen Geschwindigkeit zu bestimmen.

Auflösung. War die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, der Exponent des Widerstandes $= k$, und g der Raum, durch welchen die beschleunigende Kraft $= 1$ den Korper in der ersten Secunde treibt: so ist am Ende der Zeit $= t$, die noch übrige Geschwindigkeit

$$v = \frac{c\,k^2}{k^2 + 2gct}.$$

Beweis. Da in unserer Betrachtung die beschleunigende Kraft $= -\frac{v^2}{k^2}$ für jeden Augenblick der Bewegung ist: so müßte billig in §. 58. die Scale der beschleunigenden Kräfte so gezeichnet werden (Fig. 21.), daß $Ag = 2g\frac{c^2}{k^2}$ und für jede verflossene Zeit $= t = AT$, die Kraft durch $TG = 2g \cdot \frac{v^2}{k^2}$ dargestellt würde. Nehmen wir hier den in der Auflösung angegebenen Werth für v, und bedenken zugleich, daß die Fläche $AgGT$ sich zu $Ag \cdot AT$ eben so verhält, wie die in der Zeit $= t$ verlohrene Geschwindigkeit zu $2g \cdot \frac{c^2}{k^2}\,t$, oder daß $c - v = \frac{AgGT \cdot t}{AT}$, weil $Ag = 2g \cdot \frac{c^2}{k^2}$, so erhalten wir, wenn wir die Zeit t in n gleiche Theile zerlegt und dann der schon angegebnen Bestimmung gemäß, die Scale gezeichnet annehmen, so daß $\frac{v^2}{k^2}$

am Ende der Zeit $\frac{1}{n}t = \frac{c^2\,k^2}{(k^2 + \frac{1}{n} \cdot 2gct)^2}$ wird;

am Ende der Zeit $\frac{2}{n}t = \frac{c^2\,k^2}{(k^2 + \frac{2}{n} \cdot 2gct)^2}$ und so ferner

$$c - v < \frac{2gc^2t}{k^2 n}\left\{1 + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{1}{n}.2gct)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{2}{n}.2gct)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{3}{n}.2gct)^2} + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{n-1}{n}.2gct)^2}\right\}$$

und

$$> \frac{2gc^2t}{k^2 n}\left\{\frac{k^4}{(k^2 + \frac{1}{n}.2gct)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{2}{n}.2gct)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{3}{n}.2gct)^2} + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + \frac{n}{n}.2gct)^2}\right\}.$$

Es ergiebt sich aber aus §. 65. leicht, daß die Summe jener Reihen durch $\frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$ dargestellt wird, oder daß $c - v = \frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$, das ist $v = \frac{k^2 c}{k^2 + 2gct}$ ist. Der in der Auflösung angegebene Werth für v macht also die obige Gleichung identisch und ist folglich richtig; oder wenn man jenem Werthe gemäß die verzögernde Kraft des Widerstandes annimmt: so ergiebt sich die noch übrige Geschwindigkeit grade so, wie sie sich nach der angenommenen Formel ergeben sollte.

§. 186. Der Beweis, daß $\frac{2gc^2t}{k^2 + 2gct}$ immer zwischen die Grenzen fällt, die durch die Reihen im vorigen §. gegeben wurden, läßt sich nach §. 65. leicht führen, wenn ich hier $\frac{1}{n}t = u$ setze. Es ist nämlich die allgemein zu beweisende Vergleichung

$$\frac{2gc^2nu}{k^2 + 2gcnu} < \frac{2gc^2u}{k^2}\left\{1 + \frac{k^4}{(k^2 + 2gcu)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + 4gcu)^2} + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + 2(n-1)gcu)^2}\right\}$$

$$> \frac{2gc^2u}{k^2}\left\{\frac{k^4}{(k^2 + 2gcu)^2} + \frac{k^4}{(k^2 + 4gcu)^2} + \ldots\ldots + \frac{k^4}{(k^2 + 2ngcu)^2}\right\}$$

und hier ergiebt sich für $n = 1$ sogleich

$$\frac{1}{k^2+2gcu} < \frac{1}{k^2} \text{ und } > \frac{k^2}{(k^2+2gcu)^2};$$

und ferner $n = 2$,

$$\frac{2}{(k^2+4gcu)} < \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{(k^2+2gcu)^2};$$

$$> \frac{k^2}{(k^2+2gcu)^2} + \frac{k^2}{(k^2+4gcu)^2},$$

denn hier ist bei dem Uebergange von $n = 1$ zu $n = 2$ der vor dem Ungleichheitszeichen stehende Theil um

$$\frac{2}{k^2+4gcu} - \frac{1}{k^2+2gcu} = \frac{k^2}{(k^2+4gcu)(k^2+2gcu)}$$

gewachsen, der nach dem Ungleichheitszeichen stehende erste Theil ist um $\frac{k^2}{(k^2+2gcu)^2}$, also mehr als jener gewachsen, der nach dem Ungleichheitszeichen stehende zweite Theil um $\frac{k^2}{(k^2+4gcu)^2}$ also weniger als jener gewachsen. So läßt sich, ganz so wie in §. 65., beweisen, daß der Ausdruck $\frac{2gc^2nu}{k^2+2gcnu}$ immer zwischen den angegebnen Grenzen liegt, und daß diese Grenzen durch Vergrößerung des n oder durch Zerlegung der Zeit t in immer mehrere Theilchen so nahe man will an einander können gerückt werden.

§. 187. Die Formel $v = \frac{k^2 . c}{k^2+2gct}$, zeigt daß die am Ende der Zeit $= t$ noch übrige Geschwindigkeit nie $= 0$ wird, selbst wenn t sehr groß ist, daß also die Bewegung nach diesem Gesetze des Widerstandes zwar immer verzögert wird, doch aber nie ganz aufhört.

Man kann hieraus schließen, daß die Reibung, die auch als eine verzögernde Kraft wirkt, nicht dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sein kann, denn

sonst würde die fortgerollte Kugel ihre Bewegung nie ganz verlieren.

§. 188. Aufgabe. Wenn ein Körper, der mit der Geschwindigkeit = c sich zu bewegen anfängt, durch keine andre Kraft als durch einen, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand, eine Aenderung seiner Bewegung erleidet; den Weg zu bestimmen, der nach Verlauf einer bestimmten Zeit = t durchlaufen ist.

Auflösung. Da am Ende jeder Zeit = t, die Geschwindigkeit $= \frac{k^2 . c}{k^2 + 2gct}$ ist; so kann man die Scale der Geschwindigkeiten in Beziehung auf die Zeit zeichnen, und der Flächenraum derselben giebt den Ausdruck für den durchlaufenen Weg (§. 56.).

§. 189. Anmerkung. Die höhere Analysis zeigt, daß dieser Flächenraum dem Logarithmen von $\frac{k^2 + 2gct}{k^2}$ proportional ist.

§. 190. Beispiel. Wird eine Kugel mit der Geschwindigkeit = c = 2000 Fuß in 1 Secunde horizontal abgeschossen; so kann man für einen großen Theil ihres Weges die Einwirkung der Schwere als unbedeutend bei Seite setzen, und nach den eben gefundenen Regeln die Bewegung bestimmen. Diese Kugel hat also, wenn ich k = 400 Fuß setze, was für eine mäßig große Bleikugel bei der Bewegung in der Luft Statt findet,

nach 1 Sec. = t, noch die Geschw. v = 1455 Fuß,
nach 2 Sec. noch v = 1143 Fuß,
nach 3 Sec. noch v = 941 Fuß,
nach 4 Sec. noch v = 800 Fuß.

Der Weg aber, den sie zurückgelegt hat, ist, wenn man mit Hülfe der Logarithmen rechnet,

nach 1 Sec. . . . der Weg s = 1698 Fuß,
nach 2 Sec. s = 2985 Fuß,
nach 3 Sec. s = 4020 Fuß,
nach 4 Sec. s = 4886 Fuß,

wenn man die durch die Schwere hervorgebrachte Ablenkung bei Seite setzt.

§. 191. Bemerkung. Wenn auf der Erde ein Körper vertical herunter fällt, und im Fallen durch ein Widerstand leistendes Fluidum dringen muß: so fallen die Richtungen der Schwere und des Widerstandes mit der Richtung der Bewegung selbst zusammen, jene nämlich treibt den Körper als beschleunigende Kraft fort, diese hingegen wirkt als verzögernde Kraft seiner Bewegung grade entgegen. Ist also die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$, die Kraft des Widerstandes $= \frac{v^2}{k^2}$ bei der Geschwindigkeit $= v$: so ist die gesammte beschleunigende Kraft, welche den Körper niederwärts treibt,

$$= 1 - \frac{v^2}{k^2}.$$

§. 192. Aufgabe. Ein der Schwere unterworfener, sich vertical niederwärts bewegender Körper leidet einen dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand; zu bestimmen, wie groß, nach einer bestimmten Zeit $= t$, die Geschwindigkeit $= v$ sein wird, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ gegeben ist.

Auflösung. Wenn man keine höhern Rechnungen zu brauchen gelernt hat, so mögte es hiezu kaum ein anderes Mittel geben, als daß man die Zeit $= t$ in kleine Zeittheile $= \frac{1}{n} t$, z. B. halbe oder Viertheil Secunden zerlegt, und nun bedenkt, daß die Aenderung der Geschwindigkeit beinahe durch $2g \cdot G \cdot \frac{1}{n} t$ ausgedrückt wird, wenn G die am Anfange der Zeit $= \frac{1}{n} t$ wirkende beschleunigende Kraft ist.

Da im ersten Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit $= c$ war, so ist die damit zusammen gehörige beschleunigende Kraft $G = 1 - \frac{c^2}{k^2}$, also die Aenderung

der Geschwindigkeit $= 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right)$ für das erste Zeittheilchen. Im Anfange des zweiten Zeittheilchens ist also die Geschwindigkeit nahe genug

$= c + 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{c^2}{k^2}\right) = v'$, und die Aenderung der Geschwindigkeit in diesem Zeittheilchen

$= 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 - \frac{v'^2}{k^2}\right)$; und so kann man, wiewohl mühsam, die erlangte Geschwindigkeit allerdings berechnen.

§. 193. Aufgabe. Den Weg zu bestimmen, den der in der vorigen Aufgabe betrachtete Körper in der Zeit $= t$ durchläuft.

Auflösung. Heißt die anfängliche Geschwindigkeit $= c$, die am Ende der kleinen Zeit $= \frac{1}{n} t$ erlangte gesammte Geschwindigkeit $= v'$; die am Ende der Zeit $= \frac{2}{n} t$ erlangte gesammte Geschwindigkeit $= v''$ u. s. w.: so ist der durchlaufene Weg $= s$ beinahe $= \frac{1}{n} . ct + \frac{1}{n} v't + \frac{1}{n} v''t + + etc.$ Man kann also auf diese Weise durch Summirung der in den Zeiträumen $= \frac{1}{n} t$ durchlaufenen Wege den ganzen Weg $= s$ ziemlich genau finden.

§. 194. Bemerkung. Wenn ein schwerer Körper vertical aufwärts geworfen wird: so ist sowohl die Kraft der Schwere als die Kraft des Widerstandes, der Richtung der Bewegung grade entgegen gesetzt, und beide vereinigt verzögern also die Bewegung. Wir haben also hier die Summe beider Kräfte $= 1 + \frac{v^2}{k^2}$, für den Augenblick, da die Geschwindigkeit $= v$ ist, als diejenige Kraft anzusehen, welche die Bewegung vermindert.

§. 195. Aufgabe. Für einen vertical aufwärts mit gegebner Geschwindigkeit geworfenen Körper zu bestimmen, wie groß noch seine Geschwindigkeit nach Ver-

lauf der Zeit $= t$ ist, und welchen Weg er dann zurückgelegt hat.

Auflösung. Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit $= c$ aufwärts geworfen wird: so ist die seine Bewegung verzögernde Kraft im ersten Augenblicke $= 1 + \frac{c^2}{k^2}$, wenn k immer die Bedeutung wie §. 183. 184. behält. Nimmt man diese Kraft als während der Zeit $= \frac{1}{n} t$ unveränderlich bleibend an: so ist nach Verlauf der Zeit $= \frac{1}{n} t$, die Geschwindigkeit $= c - 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right)$, die ich $= v'$ setze. Im zweiten Zeittheilchen ist also die verzögernde Kraft sehr nahe $= 1 + \frac{v'^2}{k^2}$, und die Geschwindigkeit am Ende des zweiten Zeittheilchens $= v' - 2g \cdot \frac{1}{n} t \left(1 + \frac{v'^2}{k^2}\right) = v''$, und so könnte man weiter rechnen.

Den Weg, den der Körper in den zwei ersten Zeittheilchen durchläuft, erhielte man

kleiner als $c \cdot \frac{1}{n} t + v' \cdot \frac{1}{n} t$;

und größer als $v' \cdot \frac{1}{n} t + v'' \cdot \frac{1}{n} t$.

Nach der hiedurch angedeuteten Regel könnte man auch für die folgenden Zeittheile rechnen.

§. 196. Anmerkung. Die drei Aufgaben §. 192, 193, 195. zeigen, wie man allenfalls mit den geringen, hier vorausgesetzten Kenntnissen die hier vorkommenden Fragen beantworten kann. Aber eine kleine Ueberlegung wird wohl jedem verrathen, erstlich daß man nur mit einem überaus großen Aufwande von Arbeit endlich zum Zwecke gelangt, und, zweitens, daß diese Methode uns nicht das eigentliche, allgemeine Gesetz zeigt, wie die erlangte Geschwindigkeit und der durchlaufene Weg von der Zeit abhängen. Es wäre zwar nicht gradz unmöglich, die allgemeinen Ausdrücke auch ohne höhere Analysis zu finden, zu welchen die Summen jener, in den Auflösungen angedeuteten Reihen, leiten; aber ich müßte mich zu tief in Vorbereitungen einlassen, die Lehre von Logarithmen und Exponentialgrößen

schwindigkeit bestimmt wird, x die am Ende der Secunde erlangte gesammte horizontale Entfernung vom Anfangspuncte, y die gesammte erreichte Höhe am Ende der bestimmten Secunde. g ist hier = 15 Fuß angenommen.

	c	v	s	φ	x	y
1. Sec.	3000	192,0	2380,2	20°. 0'. 0"	2236,5	799,0.
2. —	1910	1406,3	1632,6	19 . 9 . 15	3778,8	1319,7.
3. —	1396,7	1104,3	1240,5	17 . 59 . 29	4958,6	1687,9.
4. —	1095,2	908,6	996,1	16 . 29 . 55	5913,7	1955,8.
5. —	900,5	770,4	832,1	14 . 40 . 5	6718,7	2151,5.
6. —	763,4	667,8	713,5	12 . 29 . 22	7415,3	2290,8.
7. —	661,9	588,8	623,9	9 . 57 . 11	8029,8	2383,6.
8. —	584,4	526,7	554,6	7 . 3 . 17	8580,2	2436,7.
9. —	523,8	477,0	499,7	3 . 47 . 49	9078,8	2454,8.
10. —	476,0	437,0	456,0	0 . 11 . 29	9534,8	2441,3.
11. —	437,9	404,7	420,8	÷ 3 . 44 . 10	9954,7	2398,9.
12. —	407,7	378,7	392,9	÷ 7 . 56 . 49	10343,8	2329,6.
13. —	384,0	358,2	370,8	÷ 12 . 23 . 5	10706,0	2235,1.
14. —	365,8	342,3	353,8	÷ 16 . 58 . 45	11044,4	2116,8.
15. —	352,2	330,4	341,0	21 . 39 . 6	11361,3	1976,0.
16. —	342,6	321,9	332,0	26 . 19 . 12	1165[illegible],9	1813,8.
17. —	336,3	316,3	326,3	30 . 54 . 22	11938,9	1631,2.
18. —	332,6	313,1	322,6	35 . 20 . 42	12202,0	1429,6.
19. —	331,3	311,9	321,4	39 . 35 . 26	12449,7	1209,8.
20. —	331,8	312,4	321,9	43 . 35 . 10	12682,9	972,9.
21. —	332,3	312,8	322,4	47 . 20 . 10	12901,4	720,8.
22. —	335,5	315,6	325,3	50 . 48 . 37	13107,0	453,7.
23. —	339,4	319,3	329,0	54 . 0 . 49	13300,3	172,5.
24. —	343,7	322,9	333,0	56 . 57 . 12	13481,9	÷ 106,6.

§. 202. **Beispiel.** Die Anfangsgeschwindigkeit sei = 3000 Fuß, der Neigungswinkel = 20°, der Exponent des Widerstandes = 250 Fuß. Rechne ich hier auf halbe Secunden, so kann ich nahe genug den Fallraum in der ersten halben Secunde = 3,75 und die erlangte Geschwindigkeit = 15 behalten.

$$d.(k^2 + 2gct) = 2gcdt \text{ ist,}$$

$$s = \text{Const} + \frac{k^2}{2g} \log.\text{nat}.(k^2 + 2gct).$$

Soll $s = 0$ sein für $t = 0$, so wird

$$\text{Const} = -\frac{k^2}{2g}.\log.\text{nat}.k^2 \text{ und}$$

$$s = \frac{k^2}{2g}.\log.\text{nat}\left\{1 + \frac{2gct}{k^2}\right\}.$$

Nach dieser Formel ist in §. 190. s ausgerechnet.

III. Wirket auf den bewegten Körper zugleich die anziehende Kraft der Schwere: so kann nur bei verticaler Bewegung aufwärts oder niederwärts die Bewegung gradlinigt bleiben. Hier, wo wir die Kraft der Schwere als unveränderlich $= 1$ und die Kraft des Widerstandes als einzig vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängig, den Exponenten des Widerstandes aber als unveränderlich ansehen, ist für vertical aufwärts geworfene Körper, die ihre Bewegung verzögernde Kraft $= 1 + \frac{v^2}{k^2}$, also, wenn v, g, t die bekannten Bedeutungen haben

$$dv = -2gdt.\left\{1 + \frac{v^2}{k^2}\right\},$$

$$\int \frac{dv}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = \text{Const} - 2gt; \text{ also}$$

$$\text{Const} - 2gt = k.\text{Arc}.\text{taug}\frac{v}{k}, \text{ oder, wenn die}$$

anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war,

$$2gt = k\left\{\text{Arc}.\text{tang}\frac{c}{k} - \text{Arc}.\text{tang}\frac{v}{k}\right\},$$

das ist $\frac{2gt}{k} = \text{Arc}.\text{tang}\frac{k(c-v)}{k^2 + cv}$ (nach Trigon. §. 48.).

Der Körper hat also seine ganze Geschwindigkeit verlohren, oder hört auf zu steigen, wenn $v = 0$, das ist, wenn

$$t = \frac{k}{2g}\text{Arc}.\text{tang}\frac{c}{k} \text{ ist.}$$

Wollte man aus der Formel $\frac{2gt}{k} = \text{Arc}.\text{tang}\frac{k(c-v)}{k^2 + cv}$ den Werth von v finden, so ist auch

$$\frac{k(c-v)}{k^2 + cv} = \text{tang}\frac{2gt}{k},$$

$$\text{nd } v = \frac{kc - k^2 . \tang \frac{2gt}{k}}{k + c . \tang \frac{2gt}{k}}.$$

IV. Um in dem eben betrachteten Falle den durchlaufenen Weg $= s$ zu finden, dient am besten die aus

$dv = - 2g \left\{ 1 + \frac{v^2}{k^2} \right\} dt$ hervorgehende Differentialgleichung

$$vdv = - 2g \left\{ 1 + \frac{v^2}{k^2} \right\} ds,$$

$$\text{oder } \frac{2vdv}{k^2 + v^2} = - \frac{4g\,ds}{k^2},$$

welche $\log \text{nat} (k^2 + v^2) = \text{Const} - \frac{4gs}{k^2}$;

oder $\log \text{nat} \left\{ \frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2} \right\} = \frac{4gs}{k^2}$, giebt, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war. Die größte Höhe, welche der geworfene Körper erreicht, wird hier gefunden, wenn man $v = 0$ setzt, sie ist also $s = \frac{k^2}{4g} \log \left\{ 1 + \frac{c^2}{k^2} \right\}$.

Diese Formeln können nun auch dienen, um t durch s oder umgekehrt s durch t auszudrücken, wenn man für v seinen Werth die zwischen t und v gefundene Gleichung setzt.

V. Wäre der Körper nach einer vertical niederwärts gehenden Richtung mit der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ geworfen: so leidet seine, am Ende der Zeit $= t$ erlangte Geschwindigkeit $= v$, eine Aenderung, die $= dv = 2g \left\{ 1 - \frac{v^2}{k^2} \right\} dt$ ist, weil die Schwerkraft $= 1$ ihn beschleunigt, während der Widerstand $= \frac{v^2}{k^2}$ ihn verzögert.

Hier ist also $\frac{2gdt}{k} = \frac{k\,dv}{k^2 - v^2} = \left\{ \frac{\frac{1}{2} dv}{k - v} + \frac{\frac{1}{2} dv}{k + v} \right\}$

$$\text{und } \frac{2gt}{k} = \text{Const} + \log \text{nat} \left\{ \frac{k + v}{k - v} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Soll hier $t = 0$ sein, für $v = c$, so ist

$$\frac{2gt}{k} = \tfrac{1}{2} \log . \text{nat} . \left\{ \frac{(k + v)(k - c)}{(k - v)(k + c)} \right\},$$

oder wenn der Körper frei fallend, ohne anfängliche Geschwindig-

seit seine Bewegung begann, $\frac{4gt}{k} = \log.\text{nat}.\left\{\frac{k+v}{k-v}\right\}$, den

das ist $e^{\frac{4gt}{k}} = \frac{k+v}{k-v}$, wenn e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist,

also $v = \frac{k.\left(e^{\frac{4gt}{k}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{4gt}{k}} + 1\right)}$. Es kann also v nie größer als k

werden, indem die Formeln selbst für die größesten Werthe von t noch einen Werth für v geben, der nicht ganz = k ist. Der Grund hievon ist leicht zu übersehen, da für v = k die Verzögerung durch den Widerstand ganz genau die Beschleunigung durch die Schwere aufhöbe.

Um s zu bestimmen, haben wir

$$vdv = 2g\,ds\left\{1 - \frac{v^2}{k^2}\right\};$$

oder $\frac{2vdv}{k^2 - v^2} = \frac{4g\,ds}{k^2}$;

$$\frac{4gs}{k^2} = \log\text{ nat }\frac{k^2 - c^2}{k^2 - v^2},$$

wenn sogleich die beständige Größe so beigefügt wird, wie sie sein muß, wenn v = c mit s = o zusammen hängt.

§. 197. Um doch wenigstens auch für die, welche höhere analytische Untersuchungen nicht durchführen können, die Resultate mitzutheilen, setze ich die Formeln, welche zur Rechnung die bequemsten sind, hieher.

Es ist nämlich für einen im widerstehenden Mittel frei fallenden Körper, dessen anfängliche Geschwindigkeit = c war, $t = \frac{k}{4g}.\log.\text{nat}\left\{\frac{(k+v)(k-c)}{(k-v)(k+c)}\right\}$, wenn t die nach dem Anfange der Bewegung verflossene Zeit, v die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit ist. Der durchlaufene Weg aber wird durch

$s = \frac{k^2}{4g}, \log.\text{nat}\left\{\frac{k^2 - c^2}{k^2 - v^2}\right\}$ ausgedrückt.

Für den vertical aufwärts geworfenen Körper ist die

gegen $v = \dfrac{c k - k^2 . \tang \frac{2gt}{k}}{k + c . \tang \frac{2gt}{k}}$,

wo $\frac{2gt}{k}$ einen Bogen ausdrückt, der in Theilen des Halbmessers gegeben ist. Zugleich ist

$$s = \frac{k^2}{4g} . \log . \text{nat} \left\{ \frac{k^2 + c^2}{k^2 + v^2} \right\},$$

und $t = \dfrac{k}{2g} . \text{Arc} . \tang \dfrac{k(c - v)}{k^2 + cv}$.

§. 198. Beispiel. Setze ich $k = 400$ Fuß, wie es fur eine ziemlich große Bleikugel in der Luft Statt findet: so ergiebt sich für eine mit der Geschwindigkeit $c = 2000$ Fuß abgeschossene Kugel, daß sie nur bis zu einer Höhe $s = \dfrac{160000}{60} \log . \text{nat} \left(\dfrac{400^2 + 2000^2}{400^2} \right)$ $= 8688$ Fuß steigen wird, statt daß sie im leeren Raume eine Höhe von 66000 Fuß erreichen würde. Sie gebraucht zu diesem Steigen eine Zeit $= t$ $= \dfrac{400}{30} \text{Arc} . \tang \dfrac{2000}{400} = \dfrac{40}{3} \text{Arc} . \tang 5$. Da nun $\tang = 5$ zu dem Bogen $= 78^\circ 42'$ gehört, welcher $= 1,3735$ des Halbmessers ist, so wird $t = \dfrac{40}{3} . 1,3735$ $= 18,3$ Secunden. So lange also steigt sie nur, statt daß sie im leeren Raume 66 Secunden steigen würde.

Selbst bei 3000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit würde die ganze erreichte Höhe nur $= 10793$ Fuß, die verwandte Zeit $= 19,2$ Secunden sein, statt daß man im leeren Raume die erreichte Höhe $= 150000$ Fuß, die Zeit des Steigens $= 100$ Sec. fände.

Die von der Höhe $= 8688$ Fuß frei herabfallende Kugel kömmt mit einer Geschwindigkeit $= v = 392$ Fuß auf der Erde an, und hat zum Falle eine Zeit $= 30,6$ Secunden verwandt. Die von der Höhe $= 10793$ Fuß

wieder herabfallende Kugel hat nach Vollendung ihres Laufes eine Geschwindigkeit von $v = 396,5$ Fuß erlangt, und 36 Sec. gebraucht, um die Erde zu erreichen. Die Geschwindigkeit könnte nie mehr als $= 400$ Fuß werden; denn bei dieser Geschwindigkeit wäre die Verzögerung wegen des Widerstandes der Luft genau der Beschleunigung durch die Schwere gleich und die Kugel würde nun mit unveränderlicher Geschwindigkeit fallen. Aber sie kann diese Geschwindigkeit nie ganz erreichen, weil die Beschleunigung je mehr und mehr abnimmt, je größer die Geschwindigkeit schon ist, oder je mehr sie sich schon dieser Grenze nähert.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Bewegung geworfener schwerer Körper in der Luft.

§. 199. **Bemerkung.** Bei der Untersuchung über die Bewegung geworfener Körper in einem widerstehenden Medio muß man auf zwei Kräfte Rücksicht nehmen, die die Bewegung ändern. Ist nämlich der Körper nach M (Fig. 57.) gelangt, und würde er, vermöge der Geschwindigkeit, die er in M hat, in einer Secunde nach N kommen: so hält erstlich der Widerstand ihn auf, und indem er einen Theil seiner Geschwindigkeit verliert, erreicht er nur den Punct P in einer Secunde, zugleich aber zieht ihn zweitens die Schwere in einer Secunde durch den Raum PQ herab; und so bestimmt sich der Weg MQ, den er wirklich durchläuft.

Die allgemeine Untersuchung über diese Bahn, welche der geworfene Körper durchläuft, wird dadurch erschwert, daß die Richtung und Größe der Kraft des Widerstandes sich unaufhörlich ändert, daß man ihre Richtung in jedem

Augenblicke erst kennen lernt, indem man die Bahn selbst bestimmt, und daß man dennoch den Widerstand schon vorher in Rechnung bringen sollte, weil von ihm offenbar die Bestimmung des Weges, den der Körper durchlaufen wird, wesentlich abhängt. Diese Schwierigkeit läßt sich ohne Hülfe der höheren Analysis gar nicht so besiegen, daß man das Gesetz allgemein übersehen könnte, nach welchem die Bahn des geworfenen Körpers könnte gezeichnet werden. Ich muß mich daher hier begnügen, nur einige Regeln zu geben, wie man diese Bahn, indem man sie als aus graden Stücken zusammen gesetzt ansieht, ohngefehr zeichnen kann.

§. 200. Aufgabe. Den Weg, welchen der geworfene Körper durchläuft, wenigstens beinahe genau zu bestimmen.

Auflösung. Ist (Fig. 58.) AB die Richtung, nach welcher von A aus der Körper mit bekannter Geschwindigkeit geworfen wird: so läßt sich nach §. 185. die Geschwindigkeit bestimmen, welche der Körper am Ende einer gewissen Zeit, z. B. von einer Secunde noch übrig haben würde, wenn er sich ohne Einwirkung der Schwere gradlinigt bewegte, und daraus läßt sich (§. 188. 189.) der in 1 Sec. unter eben der Voraussetzung zurückgelegte Weg bestimmen. Trägt man diesen = AC auf der Richtungslinie AB auf, zieht CD vertical und gleich dem Fallraume in 1 Secunde: so ist AD ziemlich nahe der wahre Weg des Körpers in der ersten Secunde.

Jetzt muß man aus der Geschwindigkeit, welche der gradlinigt bewegte Körper in C noch haben würde, und aus der vermöge der Schwere beim Falle in der ersten Secunde erlangten Geschwindigkeit die Richtung und anfängliche Geschwindigkeit für die nächste Secunde suchen. Dies geschieht, indem man das Parallelogramm zeichnet, in welchem CF die am Ende der ersten Secunde noch übrige Geschwindigkeit, CG = 2CD die durch den Fall am Ende der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit darstellt, und nun CH als wahre anfängliche Geschwindig-

keit für die zweite Secunde berechnet. Mit der Richtung CH parallel zieht man DI, berechnet aber nun, wie weit der durch den Widerstand verzögerte Körper auf DI in 1 Sec. gelangen würde, wenn die Schwere nicht wirkte; stellt DK diesen Weg vor: so fügt man an K die Verticale KL = CD gleich dem Fallraume in 1 Secunde und findet so den Punct L, den der Körper in der zweiten Secunde erreicht.

So fährt man fort für die folgenden Secunden, indem man zuerst die Geschwindigkeit berechnet, die dem Körper bei gradlinigter Bewegung am Ende der vorigen Secunde noch übrig wäre; diese unter dem Winkel, den die vorige Richtungslinie mit der Verticale macht, mit der in 1 Sec. durch die Schwerkraft erlangten Geschwindigkeit zu einem Parallelogramm verbindet und so die wahre Geschwindigkeit sucht, die als Anfangsgeschwindigkeit für diese Secunde gilt. Mit der Richtung dieser Anfangsgeschwindigkeit parallel zieht man eine durch den in der vorigen Secunde erreichten Endpunct gehende Linie, und trägt auf ihr den Weg auf, den der Körper wirklich durchlaufen würde, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte; dann aber zieht man durch den so bestimmten Endpunct eine Verticallinie, und, indem man auf ihr den Fallraum in 1 Sec. herabwärts aufträgt, erhält man den Punct, welchen der Körper am Ende dieser Secunde wirklich erreicht.

§. 201. Beispiel. Die Anfangsgeschwindigkeit sei = 3000 Fuß, der Neigungswinkel der anfänglichen Richtung gegen den Horizont = 20 Grade, der Exponent des Widerstandes = 400 Fuß; dann ergiebt sich folgendes, wenn c allemal die Geschwindigkeit im Anfange jeder Secunde bedeutet, v die Geschwindigkeit, die bei gradlinigter Bewegung ohne Einwirkung der Schwere am Ende derselben Secunde noch übrig bliebe, s der in dieser Secunde ohne Einwirkung der Schwere durchlaufene Weg, φ der Neigungswinkel der Bahn gegen den Horizont, so wie er durch die Richtung der anfänglichen Ge-

Das Differential des Bogens $= ds' = dx' \sqrt{(1+p'^2)}$,
oder da $dp' = -\frac{2g\,dx'}{c^2\,\mathrm{Cos}^2\alpha}$ ist

$$ds' = -\frac{c^2\,\mathrm{Cos}^2\alpha}{2g}\,dp'.\sqrt{(1+p'^2)},$$

Das ist

$$s' = \frac{-c^2\,\mathrm{Cos}^2\alpha}{4g}\left\{p'\sqrt{(1+p'^2)} + \log.(p'+\sqrt{(1+p'^2)})\right\} + \mathrm{Const},$$

oder

$$s' = \frac{c^2\,\mathrm{Cos}^2\alpha}{4g}\left\{\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}^2\alpha} - p'\sqrt{(1+p'^2)} + \log\frac{\mathrm{tang}\,(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{p'+\sqrt{(1+p'^2)}}\right\},$$

wenn s' von da an gerechnet wird, wo $p' = \mathrm{tang}\,\alpha$ ist.

Bringen wir diesen parabolischen Bogen in die Gleichung (in V), so ist

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{s'.4g}{k^2},$$

oder $\frac{4s.g}{k^2} = \log.\mathrm{nat}\left(1+\frac{4g.s'}{k^2}\right)$.

Das heißt, wenn man für dieselbe Richtung und Geschwindigkeit des anfänglichen Wurfes (Fig. 59.) die Wurflinie AMO für den leeren Raum und die Wurflinie ANP für das widerstehende Medium zeichnet: so ist allemal für Bogen $= s$ und $= s'$, die von A an bis zu parallelen Tangenten MQ, NR, oder OS, PT gerechnet werden,

$$AN = \frac{k^2}{4g}\log.\mathrm{nat}\left(1 + AM.\frac{4g}{k^2}\right)$$

$$AP = \frac{k^2}{4g}\log.\mathrm{nat}\left(1 + AO.\frac{4g}{k^2}\right)$$

und so für alle Puncte, in welchen die Tangenten beider Curven parallel werden.

VIII. Außer dieser merkwürdigen, allen ballistischen Curven gemeinen Eigenschaft, läßt sich auch die noch bestimmen, daß sie mit ihren beiden Aesten sich an gradlinigte Asymptoten anschließen.

Nimmt man nämlich auf beiden Curven (Fig. 59.) Bogen $= -s$ und $= -s'$ von A an rückwärts: so muß auch hier für Puncte, wo die Tangenten von U und V parallel werden,

$$AV = \frac{k^2}{4g}\log.\mathrm{nat}\left(1 + AU.\frac{4g}{k^2}\right),$$

also AV = − ∞, wenn AU = $-\frac{k^4}{4g}$ ist. Nimmt man den auf der Parabel von A an rückwärts gemessenen Bogen AU gleich der Fallhöhe, die dem Exponenten des Widerstandes zugehört, = $\frac{k^2}{4g}$, so ist die dortige Tangente WX der Parabel, parallel mit der einen Asymptote YZ unserer Curve. Die andre Asymptote wird ohne Zweifel vertical; denn bei immer weiterm Fallen wird die Richtung des Körpers, der sich in dem herabgehenden Aste der Curve fortbewegt, sich immer mehr der verticalen Richtung nähern, ohne sie doch je zu erreichen. Die Formel für $e^{\frac{4gs}{k^2}}$ giebt auch dann erst S = ∞, wenn p unendlich, also die Neigung = 90° wird.

In Hinsicht auf diese beiden Asymptoten hat unsre Curve einige Uebereinstimmung mit einer Hyperbel, deren eine Asymptote vertical, die andre unter einem Winkel, der größer als α, gegen den Horizont geneigt ist.

IX. Unsre Betrachtung der Wurflinie in einem widerstehenden Medio hat uns also zur Kenntniß mehrerer Eigenschaften dieser Linie geführt; zu einer bequemen Zeichnungsmethode hat sie uns freilich noch nicht geführt; aber wir würden doch schon mit mehr Leichtigkeit als in §. 200. die einzelnen Stücke der Curve berechnen können. Methoden, um die zu einander gehörigen Coordinaten zu bestimmen, lassen sich, wenn man keine vollkommene Schärfe verlangt, auch angeben. Heißt nämlich die Neigung der Curve in irgend einem Puncte = φ und in einem andern Puncte, der um den Bogen = Δs davon entfernt liegt, = φ', so ist ja beinahe, die Aenderung der Abscisse = $\Delta x = \Delta s . \text{Cos}\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$ die Aenderung der Ordinate = $\Delta y = \Delta s . \text{Sin}\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$. Diese Bestimmung, die man leicht für Werthe von φ, die allemal um 5 Grade verschieden sind, erhalten kann, giebt genau genug die ganze Curve.

X. Wollte man die Wurflinie im widerstehenden Medio ganz so bestimmen, wie sie in der widerstehenden Luft wirklich ist, so hätte man noch auf zwei wesentliche Umstände Rücksicht zu nehmen, erstlich auf die in der Höhe so merklich abnehmende Dichtigkeit der Luft, zweitens auf die starke Vergrößerung des Wider-

§. 203. Bemerkung. Die Betrachtungen, welche wir in der Hydraulik über den Widerstand flüssiger Körper anstellen werden, zeigen, daß k ohngefehr = 250 Fuß ist für eine eiserne Kugel von 1,6 paris. Zoll Durchmesser und für eine bleierne Kugel von 1,1 par. Zoll Durchmesser; daß hingegen k = 400 paris. Fuß wird, ohngefehr für eine eiserne Kugel von 4,3 par. Zoll Durchmesser, eine bleierne Kugel von 2,8 Zoll, eine Platinakugel von 1,6 paris. Zoll, wenn man die Platina 20 mal so schwer als Wasser annehmen darf. Eine Platinakugel von 1,6 Zoll Durchmesser erreicht also unter 20 Grad Neigung mit 3000 Fuß Geschwindigkeit abgeschossen, eine mehr als doppelt so große Entfernung als die eben so große eiserne.

§. 204. Bemerkung. Die in Fig. 58. b. dargestellte Curve zeigt nach den eben vorhin ausgerechneten Tabellen die ganze Wurflinie für den dort angenommenen Exponenten des Widerstandes. Diese Curven dienen zugleich, um in der ersten Weite und Höhe des Wurfes für 1920 Fuß anfängliche Geschwindigkeit zu finden, wenn man in der Höhe, wo die Kugel am Ende der ersten Secunde diese Geschwindigkeit erlangt hat, die Horizontallinie CD zieht, und ähnliche Bestimmungen ergeben sich für andre kleinere Geschwindigkeiten. Da die Neigung hier noch nicht erheblich von 20 Grad verschieden ist: so ergiebt sich für diese Neigung, wenn k = 400 Fuß ist

bei 3000 F. anfängl. Geschw. Wurfweite = 13400 Fuß,
größte Höhe = 2455 Fuß;

bei 1920 F. anfängl. Geschw. Wurfweite = 10560 Fuß,
größte Höhe = 1650 Fuß;

bei 900 Fuß anfängl. Geschw. und 16 Gr. Neigung des oberhalb EF liegenden Theiles der Curve
Wurfweite = 5490 Fuß,
größte Höhe = 500 Fuß.

Dagegen für k = 250 Fuß

bei 3000 Fuß anfängl. Geschw. und 20 Gr. Neigung
Wurfweite = 6350 Fuß, größte Höhe = 1290 Fuß;

bei 1230 Fuß anfängl. Geschw. und 19 Grad Neigung, wie der oberhalb GH liegende Theil angiebt
Wurfweite = 4220 F., größte Höhe = 670 Fuß;
bei 940 Fuß Geschw. und 15 Grad Neigung
Wurfweite = 3560 F., größte Höhe = 500 Fuß.

§. 205. Bemerkung. Diese Rechnungen zeigen nun wohl, daß man auf eine auch dem Anfänger verständliche Art und ohne höhere Rechnungen die Wurflinie bestimmen kann; aber alle Rechnungen, welche auf diese Art geführt werden, sind doch darin überaus mangelhaft, daß sie nie zur Kenntniß allgemeiner Eigenschaften der gesuchten Linie führen. Hätte man die Wurflinie im luftleeren Raume auf diese Weise bestimmt, so würde man kaum errathen haben, daß sie eine Parabel sei. Ueberdas ist man genöthigt, in unsrer eben gelehrten Art die Rechnung zu führen, durchaus die ganze Curve Punct für Punct durchzugehen, statt daß man durch eine ganz durchgeführte und völlig befriedigende analytische Auflösung in Stand gesetzt wird, sogleich den höchsten Punct, die ganze Wurfweite, den Winkel, unter welchem die Kugel wieder zur Erde gelangt u. s. w. zu bestimmen, ohne daß man die Rechnung für alle einzeln zwischen liegende Puncte zu machen braucht. Wie groß dieser Vorzug sei, den die Analysis gewährt, muß selbst dem einleuchten, der sie nicht versteht, und ihm hoffentlich zur Ermunterung dienen, um sich die großen Erleichterungsmittel der Rechnung, welche sie darbietet, eigen zu machen.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Wenn (Fig. 57.) AM die Wurflinie vorstellt, und für einen Punct M, welchen der Körper am Ende der Zeit $= t$ erreicht hat, $AL = x$. $LM = y$, der Bogen $AM = s$ ist: so wird $Mm = ds$ der in der Zeit $= dt$ durchlaufene Weg sein, und des Körpers Geschwindigkeit in diesem Augenblicke ist $= \frac{ds}{dt}$,

e horizontale Geschwindigkeit $= \frac{dx}{dt}$, verticale Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$. Nach dem, was in den Zusätzen zum zehnten Abschnitt (r. XIII.) gelehrt worden, muß hier, wenn in M die horizon- wirkende beschleunigende Kraft $= W$, die vertical wirkende w ist, $\frac{d^2x}{dt} = 2g \cdot W \cdot dt$, und $\frac{d^2y}{dt} = 2g\,w\,dt$ sein. Da die Kraft des Widerstandes $= \frac{\frac{ds^2}{dt^2}}{k^2}$ ist, nach der Richtung I, so ist die nach der Richtung der Abscissen wirkende beschleu- nde Kraft $= -\frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds^2}{k^2 \cdot dt^2}$, die nach verticaler Richtung hleunigende Kraft ist $= -\frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds^2}{k^2\,dt^2} - 1$, weil außer aus dem Widerstande entspringenden Verticalkraft auch noch Schwere $= 1$ der Richtung der wachsenden y entgegen wirkt. nne ich also die Geschwindigkeit $= v = \frac{ds}{dt}$, so ist

$$d.\frac{dx}{dt} = -2g\,dt.\frac{dx}{ds}.\frac{v^2}{k^2};$$

$$d.\frac{dy}{dt} = -2g\,dt.\frac{dy}{ds}.\frac{v^2}{k^2} - 2g\,dt.$$

II. Es ist bekannt, daß $\frac{dx}{dt}$ die horizontale Geschwindig- t in M bedeutet, also $d.\frac{dx}{dt}$ die Aenderung dieser Geschwindigkeit stellt. Am gewöhnlichsten pflegt man diese Aenderung auf im- r gleiche Zeitmomente zu beziehen, oder zu fragen, um wie viel durchlaufene Weg im zweiten Zeittheilchen zunimmt. Wenn n dieses thut, so setzt man dt als beständig voraus und findet ie in XIII. der Zusätze zum 10. Abschn.) $d.\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt}$. er man kann auch dx als beständig annehmen, das ist, fragen, e wächst die Geschwindigkeit, wenn man in immer gleichen hritten auf der Abscissenlinie fortgeht und darnach die Puncte Curve, auf welche die Betrachtungen sich beziehen sollen, be- nmt. In diesem Falle ist $d.\frac{dx}{dt} = -\frac{dx\,.\,d^2t}{dt^2}$ und wenn $dy = p \cdot dx$ setze,

$$d.\frac{dy}{dt} = \frac{dp.dx}{dt} - \frac{p\,dx\,d^2t}{dt^2}.$$

Unsre Gleichungen (I) geben also

$$-\frac{dx.d^2t}{dt^2} = -2g\,dt.\frac{v^2.dx}{k^2.ds};$$

$$\text{und } \frac{dp\,dx}{dt} - \frac{p\,dx.d^2t}{dt^2} = -2g\,dt.\frac{v^2\,p\,dx}{k^2\,ds} - 2g\,dt.$$

III. Aus der ersten folgt $d^2t = \frac{2g\,dt^3.v^2}{k^2\,ds}$; und die zweite

$dp.dt.dx - p.dx\,d^2t = -2g.dt^3.\frac{v^2\,p.dx}{k^2.ds} - 2g\,dt^3$ giebt,

wenn ich für d^2t seinen Werth setze,

$$dx.dp.dt - \frac{2g.p.dt^3.v^2.dx}{k^2\,ds} = -\frac{2g\,p\,dt^3.v^2\,dx}{k^2\,ds} - 2g\,dt^3,$$

oder $dp.dx = -2g.dt^2$;

$$dt^2 = -\frac{dp.dx}{2g};$$

$$2dt.d^2t = -\frac{d^2p.dx}{2g};$$ also wenn man den hier gefundenen Werth von d^2t dem vorigen gleich setzt,

$$d^2t = -\frac{d^2p.dx}{4g.dt} = \frac{2g\,dt^3.v^2}{k^2\,ds}.$$

Dieser doppelte Werth von d^2t giebt, wenn ich statt $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$ schreibe, $d^2p.dx = -\frac{8g^2.dt^2}{k^2}.ds,$

oder $d^2p.dx = +\frac{4g.dp.dx.ds}{k^2},$

weil $dp.dx = -2g\,dt^2$ ist,

also $d^2p = \frac{4g.dp.ds}{k^2}.$

IV. Die beiden Gleichungen $dp.dx = -2g\,dt^2$;

und $d^2p = \frac{4g.dp.ds}{k^2}$, bestimmen die ganze Bewegung des geworfenen Körpers. Die letztere giebt $\frac{d^2p}{dp} = \frac{4g.ds}{k^2}$, oder $\log.\frac{dp}{Const} = \frac{4g\,s}{k^2}$, wo noch die beständige Größe bestimmt werden muß.

Die erste Gleichung $dp \,.\, dx = - 2g \,.\, dt^2$ giebt

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{2g\, dt^2}{dx^2} = - \frac{2g}{u^2},$$

wenn $u = \frac{dx}{dt}$ die horizontale Geschwindigkeit bedeutet. Diese horizontale Geschwindigkeit ist für den Anfangspunct der Bahn gegeben, wenn die anfängliche Geschwindigkeit $= c$ und der Neigungswinkel $BAL = \alpha$ gegeben ist; sie ist dann $= c \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha$, und folglich im Anfangspuncte A ist, $dp = - \frac{2g \,.\, dx}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha}$. Soll nun in unserer zweiten Gleichung die Constans so genommen werden, daß s von A an gerechnet wird, so muß für $s = o$ auch $\log \frac{dp}{\mathrm{Const}} = o$ sein, also $\mathrm{Const} = - \frac{2g \,.\, dx}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha}$ = dem Werthe, welchen dp an der Stelle hat, wo $s = o$ ist,

also $\log . \frac{- dp \,.\, c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha}{2g\, dx} = \frac{4g\, s}{k^2}$,

oder $\frac{dp}{dx} = - \frac{2g}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} \,.\, e^{\frac{4gs}{k^2}}$.

Dieses ist eine Gleichung für die gesuchte Curve, die aber freilich noch in sehr unbequemen Ausdrücken gegeben ist. Hier ist nämlich $p = \frac{dy}{dx} = \mathrm{tang}\,\varphi$, wenn φ den Neigungswinkel der Curve gegen den Horizont in irgend einem Puncte M bedeutet; also $\frac{d \,.\, \mathrm{tang}\,\varphi}{dx}$ ist durch s ausgedrückt. Uebrigens läßt sich, da die horizontale Geschwindigkeit $= u$ durch $u^2 = - 2g \,.\, \frac{dx}{dp}$ ausgedrückt war, $u^2 = c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha \,.\, e^{\frac{-4gs}{k^2}}$, durch s bestimmen.

V. Wir können aus der Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{2g}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} \,.\, e^{\frac{4gs}{k^2}},$$

x durch p bestimmen; denn wenn sie mit

$$ds = dx \sqrt{(1 + p^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

multiplicirt wird, so ist

$dp \,.\, \sqrt{(1 + p^2)} = - \frac{2g\, ds}{c^2 \mathrm{Cos}^2 \alpha} \,.\, e^{\frac{4gs}{k^2}}$; also (Pasquich. §. 38.)

$$\frac{-k^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} \cdot e^{\frac{4gs}{k^2}} = \text{Const} + p\sqrt{(1+p^2)}$$
$$+ \log (p + \sqrt{(1+p^2)});$$

oder da $s = o$ sein soll für $p = \tan \alpha$,

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{k^2} \left\{ - p\sqrt{(1+p^2)} + \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \right.$$
$$\left. + \log . \frac{\tan \alpha + \operatorname{Sec} \alpha}{p + \sqrt{(1+p^2)}} \right\},$$

oder da $\tan \alpha + \operatorname{Sec} \alpha = \frac{1 + \operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)$ ist, wie aus Pasquich. 1. Band §. 156. 4. Zus. XX. erhellt,

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{c^2}{k^2} \operatorname{Cos}^2 \alpha \left\{ \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} - p\sqrt{(1+p^2)} \right.$$
$$\left. + \log \left(\frac{\tan (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)}{p + \sqrt{(1+p^2)}} \right) \right\}.$$

VI. Hier läßt sich also bestimmen, welchen Bogen die Kugel durchlaufen hat, wenn p einen bestimmten Werth erreicht oder der Neigungswinkel $= \varphi$ eine bestimmte Größe erlangt hat.

Es sei $\varphi = o$, also auch $\tan \varphi = p = o$, so ist

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{c^2}{k^2} \operatorname{Cos}^2 \alpha \left\{ \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} + \log . \tan (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha) \right\}.$$

Diese Formel würde uns in dem in §. 201. berechneten Falle den bis an $p = o$ reichenden Bogen $= 9494$ geben, statt daß die Summirung der dortigen s bis zur 9. Secunde 9473 giebt. Im zweiten Beispiele §. 202. würde die Länge des Bogens bis zu der Stelle, wo die Curve horizontal wird $= 4750$ sein, statt daß sie dort $= 4734$ ist. Auf ähnliche Weise ließe sich die Länge der Bogen bis zu irgend einem von p erreichten Werthe finden.

VII. Wir haben früher gesehen (82. 83. 84.), daß ein mit der Geschwindigkeit $= c$ unter dem Winkel $= \alpha$ geworfener Körper im leeren Raume eine Parabel durchläuft, deren Parameter $= \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}{g}$ ist. Rechnet man Abscissen $= x'$ und Ordinaten $= y'$ von dem Puncte an, wo die Bewegung anfing, so war (§. 72.) $y' = x' . \tan \alpha - \frac{g . x'^2}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$,

also $\frac{dy'}{dx'} = \tan \alpha - \frac{2g . x'}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$, welches ich $= p'$ setze, und

s Differential des Bogens $= ds' = dx' \sqrt{(1+p'^2)}$,
er da $dp' = -\frac{2g\,dx'}{c^2 . Cos^2 \alpha}$ ist

$$ds' = -\frac{c^2 Cos^2 \alpha}{2g} dp' . \sqrt{(1+p'^2)},$$

s ist $s' = \frac{-c^2 Cos^2 \alpha}{4g} \Big\{ p' \sqrt{(1+p'^2)}$

$$+ \log . (p' + \sqrt{(1+p'^2)}) \Big\} + Const,$$

ey $s' = \frac{c^2 Cos^2 \alpha}{4g} \Big\{ \frac{Sin \alpha}{Cos^2 \alpha} - p' \sqrt{(1+p'^2)}$

$$+ \log \frac{tang (45^\circ + \frac{1}{2} \alpha)}{p' + \sqrt{(1+p'^2)}} \Big\},$$

enn s' von da an gerechnet wird, wo $p' = tang\, \alpha$ ist.

Bringen wir diesen parabolischen Bogen in die Gleichung
n V), so ist

$$e^{\frac{4gs}{k^2}} = 1 + \frac{s' . 4g}{k^2},$$

der $\frac{4s . g}{k^2} = \log . nat \left(1 + \frac{4g . s'}{k^2}\right)$.

Das heißt, wenn man für dieselbe Richtung und Geschwindigkeit
es anfänglichen Wurfes (Fig. 59.) die Wurflinie AMO für den
eren Raum und die Wurflinie ANP für das widerstehende Me-
ium zeichnet: so ist allemal für Bogen $= s$ und $= s'$, die von
an bis zu parallelen Tangenten MQ, NR, oder OS, PT ge-
chnet werden, $AN = \frac{k^2}{4g} \log . nat \left(1 + AM . \frac{4g}{k^2}\right)$

$$AP = \frac{k^2}{4g} \log . nat \left(1 + AO . \frac{4g}{k^2}\right)$$

nd so für alle Puncte, in welchen die Tangenten beider Curven
arallel werden.

VIII. Außer dieser merkwürdigen, allen ballistischen Curven
emeinen Eigenschaft, läßt sich auch die noch bestimmen, daß sie
it ihren beiden Aesten sich an gradlinigte Asymptoten anschließen.

Nimmt man nämlich auf beiden Curven (Fig. 59.) Bogen
$= -s$ und $= -s'$ von A an rückwärts: so muß auch hier für
Puncte, wo die Tangenten von U und V parallel werden,

$$AV = \frac{k^2}{4g} \log . nat \left(1 + AU . \frac{4g}{k^2}\right),$$

also AV = $-\infty$, wenn AU = $-\frac{k^2}{4g}$ ist. Nimmt man also den auf der Parabel von A an rückwärts gemessenen Bogen AU gleich der Fallhöhe, die dem Exponenten des Widerstandes zugehört, $= \frac{k^2}{4g}$, so ist die dortige Tangente WX der Parabel, parallel mit der einen Asymptote YZ unserer Curve. Die andre Asymptote wird ohne Zweifel vertical; denn bei immer weiterem Fallen wird die Richtung des Körpers, der sich in dem herabgehenden Aste der Curve fortbewegt, sich immer mehr der verticalen Richtung nähern, ohne sie doch je zu erreichen. Die Formel für $e^{\frac{4gs}{k^2}}$ giebt auch dann erst S = ∞, wenn p unendlich, also die Neigung = 90° wird.

In Hinsicht auf diese beiden Asymptoten hat unsre Curve einige Uebereinstimmung mit einer Hyperbel, deren eine Asymptote vertical, die andre unter einem Winkel, der größer als α, gegen den Horizont geneigt ist.

IX. Unsre Betrachtung der Wurflinie in einem widerstehenden Medio hat uns also zur Kenntniß mehrerer Eigenschaften dieser Linie geführt; zu einer bequemen Zeichnungsmethode hat sie uns freilich noch nicht geführt; aber wir würden doch schon mit mehr Leichtigkeit als in §. 200. die einzelnen Stücke der Curve berechnen können. Methoden, um die zu einander gehörigen Coordinaten zu bestimmen, lassen sich, wenn man keine vollkommene Schärfe verlangt, auch angeben. Heißt nämlich die Neigung der Curve in irgend einem Puncte = φ und in einem andern Puncte, der um den Bogen = Δs davon entfernt liegt, = φ', so ist so beinahe, die Aenderung der Absciſſe = $\Delta x = \Delta s \,.\, \mathrm{Cof}\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$ die Aenderung der Ordinate = $\Delta y = \Delta s \,.\, \mathrm{Sin}\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$.. Diese Bestimmung, die man leicht für Werthe von φ, die allemal um 5 Grade verschieden sind, erhalten kann, giebt genau genug die ganze Curve.

X. Wollte man die Wurflinie im widerstehenden Medio ganz so bestimmen, wie sie in der widerstehenden Luft wirklich ist, so hätte man noch auf zwei wesentliche Umstände Rücksicht zu nehmen, erstlich auf die in der Höhe so merklich abnehmende Dichtigkeit der Luft, zweitens auf die starke Vergrößerung des Widers

standes, welche bei sehr schnellen Bewegungen Statt zu finden scheint. Der letztere Umstand ist durch die bisher bekannten Versuche noch nicht so ins Licht gesetzt, daß man eine auf Beobachtungen gestützte, in allen Fällen geltende Regel für den Widerstand angeben könnte; der erstere ließe sich berücksichtigen und es wäre sogar nicht unmöglich, die in der Höhe abnehmende Dichtigkeit so in Rechnung zu bringen, daß dadurch die Auflösung der Formeln erleichtert würde. Hier scheint mir indeß nicht der Ort, um länger hiebei zu verweilen.

Brauchbare Betrachtungen über diesen Gegenstand enthält Legendre's Abhandlung Dissertation sur la question de Balistique, Memoire, qui a remporté le prix de 1782.

Dreizehnter Abschnitt.

Vom centralen Stoße der Körper an einander.

§. 206. Erklärung. Wenn zwei Körper sich so bewegen, daß der eine seine Bewegung nicht fortsetzen kann, ohne den andern aus seiner Stelle zu verdrängen, so **stoßen** sie an einander. Bewegen sich die Körper ohne Umdrehung so fort, daß alle ihre Puncte parallel fortgehn: so entsteht ein **centraler** Stoß dann, wenn eine grade Linie, durch den gemeinschaftlichen Berührungspunct beim Anstoßen, senkrecht auf die gemeinschaftliche Berührungs-Ebne gezogen, durch beider Körper Schwerpunct geht. Der Stoß ist überdas ein **grader** Stoß, wenn die Richtung der Bewegung beider Schwerpuncte mit jener auf die Berührungs-Ebne senkrecht gezogenen Linie zusammen fällt.

§. 207. Wenn die Körper bei ihrem Anstoßen an einander sich in einer ebenen Fläche berühren: so ist der Stoß central, wenn die Linie durch beide Schwerpuncte auf dieser Ebne senkrecht steht, und grade, wenn die

Richtung, in welcher beide Schwerpuncte sich bewegen, mit ihr zusammen fällt.

§. 208. Bemerkung. Wenn zwei Körper sich nach derselben Richtung fortbewegen, und der nachfolgende ereilt den vorangehenden: so sucht jener mit seiner schnellern Bewegung diesen fortzutreiben, und folglich verliert jener einen Theil seiner Geschwindigkeit, indem er diesem eine vermehrte Geschwindigkeit ertheilt.

Wir wollen uns zwei Kugeln denken, deren Schwerpuncte in ihren Mittelpuncten liegen, und die sich in der durch ihre Mittelpuncte gehenden Richtungslinie nach einerlei Richtung fortbewegen. Wenn die nachfolgende hier die vorangehende ereilt, so fängt die gegenseitige Einwirkung des Stoßes an, sobald sie sich berühren, und dauert so lange fort, bis beide Körper mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen.

Da es in der Natur keine vollkommen harte Körper giebt; so macht gewiß die nachfolgende Kugel, indem sie sich gegen die vorangehende drängt, in diese einen Eindruck, und es verfließt daher einige Zeit, so kurz sie auch sein mag, während der ganzen Einwirkung des Stoßes. In jedem Augenblicke, während dieser kurzen Zeit, übt die nachfolgende Kugel auf die vorangehende einen eben so großen Druck aus, als sie von dieser leidet, und dieser Druck ist die bewegende Kraft, welche die Bewegung der nachfolgenden Kugel hemmt, und die Bewegung der vorangehenden befördert. Wären nun die Massen beider Kugeln gleich, so würde in jedem Zeittheilchen die eine so viel an Geschwindigkeit verlieren, als die andre gewinnt. Wäre die nachfolgende halb so groß als die vorangehende, so würde jene in jedem Zeittheilchen doppelt so viel an Geschwindigkeit verlieren, als die andre an Geschwindigkeit gewinnt; denn die Aenderungen der Geschwindigkeiten, welche durch gleiche bewegende Kräfte hervorgebracht werden, sind den Massen umgekehrt proportional (§. 27.). Es erhellt also, daß während der ganzen Einwirkung der Verlust an Geschwindigkeit in

diesem Falle für die eine Kugel doppelt so groß, als der Gewinn für die andre Kugel sein wird, da in jedem einzelnen Zeitmomente eine doppelt so große Aenderung der Geschwindigkeit bei der einen als bei der andern vorgeht.

Auf ähnliche Weise läßt sich bei jeder Verschiedenheit der Massen bestimmen, wie sich die Verminderung der Geschwindigkeit des einen Körpers zur Vermehrung der Geschwindigkeit des andern während jedes Zeittheilchens und folglich während der ganzen Zeit des Stoßes verhält.

§. 209. Erklärung. Körper heißen unelastisch, wenn sie so, wie wir es eben gesehen haben, eine kleine Zusammendrückung zulassen, ohne ein Bestreben, ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen, zu zeigen. Elastische Körper dagegen erlauben zwar auch eine Zusammendrückung, streben aber, ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen, und dieses, wofern sie vollkommen elastisch sind, mit eben der Gewalt, mit welcher sie zusammengepreßt wurden.

§. 210. Bemerkung. Wenn die beiden Kugeln, welche nach derselben Richtung mit ungleicher Geschwindigkeit fortgehen, unelastisch sind: so ist die Wirkung des Stoßes vorbei, wenn die nachfolgende sich mit eben der Geschwindigkeit, wie die vorangehende, fortbewegt; und der Eindruck, den beide Kugeln dann in einander gemacht, die Aenderung der Form, welche die eine in der andern bewirkt hat, bleibt in der Folge genau so, wie sie in dem Augenblicke war. So ist es nicht bei elastischen Kugeln, die wir hier als vollkommen elastisch ansehen wollen. Auch diese drücken auf einander und der Eindruck, den sie in einander machen, nimmt auch bei ihnen so lange zu, bis sie gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben; aber sie gehen dann nicht mit dieser Geschwindigkeit ohne weitere Aenderung derselben fort, sondern, indem beide ihre vorige Gestalt wieder anzunehmen streben, und zwar mit eben der Kraft, die zu ihrer Zu-

und der vorangehende hat an Geschwindigkeit gewonnen,

$$= x - u = \frac{Nv + Mu}{M + N} - u = \frac{N(v-u)}{M+N},$$

der nachfolgehde hat an Geschwindigkeit verlohren

$$v - x = v - \frac{Nv + Mu}{M + N} = \frac{M(v-u)}{M+N}.$$

Da aber nun die Körper wegen ihrer Elasticität gegen einander zu drücken fortfahren, und, als vollkommen elastisch, mit eben der Gewalt ihre Gestalt wieder anzunehmen streben, welche nöthig war, diese Gestalt zu ändern: so findet der Kraft-Aufwand, welcher dem nachfolgenden die Geschwindigkeit $= v - x$ raubte, und welcher dem vorangehenden die Geschwindigkeit $x - u$ ertheilte, zum zweiten Male Statt; und der vorangehende erhält also die doppelte Vermehrung seiner Geschwindigkeit, und diese wird

$$= y = u + \frac{2N(v-u)}{M+N} = \frac{u(M-N) + 2Nv}{M+N},$$

statt daß der nachfolgende die doppelte Verminderung seiner Geschwindigkeit leidet, und daher nur die Geschw.

$$= z = v - \frac{2M(v-u)}{M+N} = \frac{v(N-M) + 2Mu}{M+N}$$

behält.

Anmerkung. Da es wohl keine vollkommen elastische Körper giebt, so müßte man bei Versuchen $y = u + \frac{\lambda N(v-u)}{M+N}$ setzen und für λ eine zwischen 1 und 2 fallende Zahl nehmen, die nach Verschiedenheit der angewandten Körper verschieden ausfallen würde, desto weniger von 1 verschieden, je geringer die Elasticität ist.

§. 214. Begegnen die Körper einander, so ist u negativ, und dann ist also des Körpers M Geschwindigkeit nach dem Stoße $= y = \frac{-u(M-N) + 2Nv}{M+N}$,

des Körpers N Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$= z = \frac{v(N-M) - 2Mu}{M+N}.$$

§. 215. Wenn die Körper vor dem Stoße einander folgten, so kann nach dem Stoße der vorhin nachfolgende, N, eine Bewegung nach entgegengesetzter Richtung erhalten haben. Dieses ist der Fall, wenn z negativ oder $v < \frac{2M(v-u)}{M+N}$ ist; es kann sich also, da allemal $v > u$, nur ereignen, wenn $M > N$ ist, oder die nachfolgende Masse die kleinere ist.

Vor dem Stoße war die relative Geschwindigkeit der einander folgenden Körper $= v - u$, oder mit dieser Geschwindigkeit näherte sich der nachfolgende dem vorhergehenden; nach dem Stoße ist ihre relative Geschwindigkeit

$$= z - y = v - u - \frac{2(M+N)(v-u)}{M+N}$$
$$= -(v-u);$$

sie entfernen sich also mit eben der Geschwindigkeit voneinander, mit welcher sie vorhin sich einander näherten. Eben das gilt, wenn u negativ ist oder beide Körper einander begegnen.

Ist $u = o$, oder ruhte der eine Körper vor dem Stoße: so erlangt er die Geschwindigkeit $y = \frac{2Nv}{M+N}$ nach dem Stoße, und diese wird $= v$, wenn beide Massen gleich sind, $M = N$; der andre Körper hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit $z = \frac{v.(N-M)}{M+N}$ und diese ist $= o$, wenn beide Massen gleich sind. Auch bei andern Werthen von u vertauschen die Körper ihre Geschwindigkeiten, wenn ihre Massen gleich sind; denn für $M = N$ wird $y = v$ und $z = u$.

§. 216. Unter **Quantität der Bewegung** versteht man das Product aus der Masse in die Geschwindigkeit; oder eigentlich, indem man der Masse $= 1$, die sich mit der Geschwindigkeit $= 1$ fortbewegt, die gesammte Bewegung $= 1$ zuschreibt, betrachtet man die Bewegung der m mal so großen Massen bei der Geschwin-

eine der Schwere ähnliche Kraft, die sich zur Schwere verhält wie $\frac{R}{M}$ zu 1. Offenbar also finden alle Betrachtungen des dritten Abschnitts hier ihre Anwendung, und wenn der Kugel anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war, so ist diese Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit $= t$, nur noch $= c - 2g \cdot \frac{R}{M} t$, wenn man die Zeit $= t$ von dem Momente an rechnet, da das Eindringen in die weiche Masse anfängt. Der in dieser Zeit durchlaufene Weg, oder die unterdeß eingedrückte Tiefe der Höhlung ist $= g \cdot \frac{R}{M} t^2$. Hieraus läßt sich die Größe des Widerstandes und die ganze Tiefe des Eindringens bestimmen.

§. 223. Aufgabe. Wenn der Körper, dessen Masse $= M$ ist, mit der Geschwindigkeit $= c$ auf den weichen Körper trifft, eine Gleichung zwischen dem Widerstande $= R$, der Tiefe des Eindringens $= s$ und der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ zu finden.

Auflösung. Der Körper dringt so lange immer tiefer ein, bis seine Geschwindigkeit $= 0$ ist, also bis zu Ende derjenigen Zeit, die $c - 2g \frac{R}{M} t = 0$ giebt, das ist der Zeit $= \frac{cM}{2gR}$. Nach Verlauf dieser Zeit ist die Tiefe der Höhlung $= s = g \frac{R}{M} t^2 = \frac{c^2 M}{4gR}$. Die Tiefe der Höhlung ist also dem Quadrate der Geschwindigkeit c proportional, wenn R und M gleich bleiben; die Tiefe der Höhlung ist dem gesammten Widerstande, der zugleich von der Gestalt und Größe des eindringenden Körpers abhängt, umgekehrt proportional; und der Masse des eindringenden Körpers direct proportional.

würde M nach dem Stoße die Geschwindigkeit (§. 215.) $y = \frac{2Nv}{M+N}$ annehmen; und wenn M mit dieser an P stieße, so würde P die Geschwindigkeit $w = \frac{2My}{M+P} = \frac{4MNv}{(M+N)(M+P)}$ erlangen. Mit dieser Geschwindigkeit wird P in der That fortgetrieben.

§. 219. Hätte P auf eben die Art eine dritte Masse = Q und diese eine vierte = R ruhend berührt und durch den Stoß in Bewegung gesetzt: so wäre der Q die Geschwindigkeit $w' = \frac{2Pw}{P+Q}$; der R die Geschwindigkeit $w'' = \frac{2Qw'}{Q+R} = \frac{16 . M . N . P . Q . v}{(M+N)(M+P)(P+Q)(Q+R)}$ mitgetheilt, wenn alle Körper vollkommen elastisch wären.

Diese Formel zeigt ein vorzüglich merkwürdiges Resultat, wenn $N : M = M : P = P : Q = Q : R$ ist. In diesem Falle nämlich würde

$$\frac{N+M}{N} = \frac{M+P}{M} = \frac{P+Q}{P} = \frac{Q+R}{Q},$$

also $y = v . \frac{2N}{M+N}$; $w = v\left(\frac{2N}{M+N}\right)^2$;

$$w' = v\left(\frac{2N}{M+N}\right)^3; \quad w'' = v\left(\frac{2N}{M+N}\right)^4 \text{ u. s. w.}$$

Wäre also z. B.

$M = \frac{1}{2} N$; $P = \frac{1}{2} M$, $Q = \frac{1}{2} P$, $R = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{16} N$, so wäre des R Geschwindigkeit $= v\,(\frac{4}{3})^4$.

Wenn hingegen die Massen alle gleich sind, so nimmt nur die letzte die Geschwindigkeit = v an, und die übrigen bleiben ruhig liegen; denn obgleich M die Geschwindigkeit $y = \frac{2Nv}{M+N}$ erlangen sollte, so behält sie, nachdem P in Bewegung gesetzt worden, doch nur die Ge-

schwindigkeit $= \frac{v(P-M)}{M+P}$ und diese ist $= 0$ für $M = P$. Für ungleiche Massen ließen sich die Geschwindigkeiten, mit welcher jede fortgeht, nachdem sie den folgenden Körper in Bewegung gesetzt hat, ebenfalls leicht bestimmen.

§. 220. Wenn ein bewegter Körper N an eine sehr große ruhende Masse M anstößt, so wird (§. 211.) für unelastische Körper die Geschwindigkeit beider nach dem Stoße $= \frac{Nv}{M+N}$ überaus klein, wenn M sehr groß ist, oder kann als $\frac{Nv}{\infty} = 0$ angesehen werden, wenn M gleichsam unendlich groß in Vergleichung gegen N ist. Für elastische Körper (§. 215.) wird des sehr großen Körpers M Geschwindigkeit überaus klein oder fast $= 0$, des Körpers N Geschwindigkeit aber $z = \frac{v(N-M)}{M+N}$, wofür man beinahe, da N so klein ist, $z = -\frac{Mv}{M}$ $= -v$ setzen darf. Der an die große Masse anstoßende Körper N kömmt also zur Ruhe, wenn er unelastisch ist, und springt mit eben der Geschwindigkeit, die er besaß, zurück, wenn er elastisch ist.

§. 221. Bemerkung. Auch der schiefe Stoß kann central sein. Bewegen sich der beiden Kugeln M, N Schwerpuncte (Fig. 61.) auf den Linien AM, BN fort, so wird ein schiefer Stoß erfolgen, indem ihre Oberflächen sich in a berühren. Die Berührungsfläche bc steht auf den nach dem Berührungspuncte a gezognen Radien aM, aN senkrecht und der Stoß ist also central, wenn die Schwerpuncte mit den Mittelpuncten zusammenfallen. Machen hier die Richtungslinien AM, BN mit der Berührungs-Ebne die Winkel $= \alpha$ und $= \beta$, und sind die Geschwindigkeiten $= u$ für M, $= v$ für N, so ist die auf bc senkrechte Geschwindigkeit $= u \sin \alpha$ für M;

$$s = 2,\ t = 60,\ P = 1200,\ N = 1040;$$

also $2 = 15 \cdot 60^2 \cdot \frac{2240 - R}{2240}$, das ist $R = 2239,91$.

Fiele nun eben der Kloß aus einer Höhe von 4 Fuß auf den Pfahl, so würde die Tiefe des Eindringens bei einem Schlage $= s = \frac{1200^2 \cdot 4}{2239,9 \cdot 2240} = 1,15$ Fuß; wenn man auch den Kloß fast unmittelbar nach dem Stoße wieder abhöbe, so daß seine Wirkung, während er ruhend auf dem Pfahl liegt, nicht in Betrachtung käme.

Daß wir hiebei den Widerstand des Bodens als eine unveränderliche Kraft angesehen haben, ist offenbar nicht strenge richtig; denn bei tieferm Eindringen nimmt dieser Widerstand zu; aber diese Verschiedenheit ist während weniger Schläge sehr unbedeutend und kann daher bei Seite gesetzt werden. Eben so haben wir auch darauf, daß der Masse der zu verdrängenden Erde eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt wird, nicht gesehen, indem auch das unbedeutend ist.

Anmerkung. Sehr schätzbare Bemerkungen über diese Gegenstände enthält Woltmanns Abhandlung über den Effect des Ramms. Göttingen, 1804.

§. 226. b. Da man so oft über die Vergleichung der Wirkung von Stoß und Druck nähere Belehrung fordert, so mag hier noch ein Beispiel Platz finden, welches sich auf Fragen der Art bezieht.

In der einen Schaale einer gleicharmigen Waage liege ein Gewicht von 1000 Pfunden, wie groß muß das Gewicht eines Körpers sein, der aus einer Höhe von 240 Fuß auf die andre Schaale fallend, der Waageschaale eine Geschwindigkeit von 1 Fuß in einer Secunde ertheilen kann?

Wir müssen uns hier die belastete Schaale als unterstützt, die andre Schaale als frei schwebend denken, und annehmen, der fallende Körper treffe sie genau in eben so großer Entfernung vom Ruhepunkte, als die ist, in welcher die andre Schaale aufgehängt ist. Beim Aufschlagen

eine der Schwere ähnliche Kraft, die sich zur Schwere verhält wie $\frac{R}{M}$ zu 1. Offenbar also finden alle Betrachtungen des dritten Abschnitts hier ihre Anwendung, und, wenn der Kugel anfängliche Geschwindigkeit $= c$ war, so ist diese Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit $= t$, nur noch $= c - 2g \cdot \frac{R}{M} t$, wenn man die Zeit $= t$ von dem Momente an rechnet, da das Eindringen in die weiche Masse anfängt. Der in dieser Zeit durchlaufene Weg, oder die unterdeß eingedrückte Tiefe der Höhlung ist $= g \cdot \frac{R}{M} t^2$. Hieraus läßt sich die Größe des Widerstandes und die ganze Tiefe des Eindringens bestimmen.

§. 223. Aufgabe. Wenn der Körper, dessen Masse $= M$ ist, mit der Geschwindigkeit $= c$ auf den weichen Körper trifft, eine Gleichung zwischen dem Widerstande $= R$, der Tiefe des Eindringens $= s$ und der anfänglichen Geschwindigkeit $= c$ zu finden.

Auflösung. Der Körper dringt so lange immer tiefer ein, bis seine Geschwindigkeit $= 0$ ist, also bis zu Ende derjenigen Zeit, die $c - 2g \frac{R}{M} t = 0$ giebt, das ist der Zeit $= \frac{cM}{2gR}$. Nach Verlauf dieser Zeit ist die Tiefe der Höhlung $= s = g \frac{R}{M} t^2 = \frac{c^2 M}{4gR}$.
Die Tiefe der Höhlung ist also dem Quadrate der Geschwindigkeit c proportional, wenn R und M gleich bleiben; die Tiefe der Höhlung ist dem gesammten Widerstande, der zugleich von der Gestalt und Größe des eindringenden Körpers abhängt, umgekehrt proportional; und der Masse des eindringenden Körpers direct proportional.

§. 224. Wäre M ein frei fallender Körper und h seine Fallhöhe, also $c^2 = 4gh$, bei einem Falle im leeren Raume, so wäre $s = \frac{hM}{R}$, also die Tiefe der Höhlung den Fallhöhen proportional. Hier könnte man, wenn s und h bekannt wäre, $\frac{M}{R}$ finden, das ist den Widerstand, den die weiche Masse dem Körper entgegen setzt, in Pfunden ausdrücken, wenn das Gewicht des Körpers M in Pfunden gegeben ist.

§. 225. Bemerkung. Eine Anwendung finden diese Untersuchungen bei dem Einrammen von Pfählen. Hier wird durch den Stoß des Rammklotzes, dessen Masse = M, Geschwindigkeit = u sein mag, der Pfahl, dessen Masse = N ist, die Geschwindigkeit $= \frac{Mu}{M+N}$ erhalten. Mit dieser Geschwindigkeit = c fängt also die ganze Masse M + N an, sich in die Erde hineinzudrängen, und erreicht folglich bei einem Schlage die Tiefe

$$s = \frac{M^2 u^2}{(M+N)^2} \cdot \frac{(M+N)}{4gR},$$

wenn ich in der Formel §. 223. $c = \frac{Mu}{M+N}$ und statt M hier M + N setze. Also

$$s = \frac{M^2 u^2}{4g \cdot R\,(M+N)}.$$

Da man beim Einrammen eines Pfahles leicht bemerken kann, wie tief er z. B. bei 25 Schlägen eingedrungen ist: so kann man die Gewalt des Widerstandes berechnen, und folglich, wenn diese 25 Schläge die letzten waren, die er beim Rammen erhält, bestimmen, welche Last er tragen kann.

War z. B. ein Pfahl von 1040 Pfund schwer, mit einem Rammklotz von 1200 Pfund, der 4 Fuß tief fiel, so fest gerammt, daß er bei den letzten 25 Schlägen nur $\frac{1}{4}$ Zoll mehr eindrang: so war, weil $\frac{u^2}{4g} = 4$ Fuß,

$M = 1200$, $M + N = 2240$, $s = \frac{1}{100}$ Zoll bei jedem Schlage, also $= 0{,}000833$ Fuß ist,

$R = \frac{1200^2 \cdot 4}{2240 \cdot 0{,}000833}$, der Widerstand beträgt also 3085700 Pfund, oder eine so schwere Last könnte unter den angenommenen Umständen ein einziger so fest eingerammter Pfahl tragen. Hiebei ist vorausgesetzt, daß der fallende Klotz die ganze Geschwindigkeit annehme, welche einer Fallhöhe von 4 Fuß entspricht; da wegen der Reibung und andrer Widerstände das nicht der Fall ist, so muß man den Widerstand etwas geringer ansetzen.

§. 226. Hieraus läßt sich nun auch die Frage beantworten, wie eine auf den Pfahl ruhend aufgelegte Masse ihn eintreiben, und wie sich die Wirkung der ruhenden Masse zu der Wirkung der stoßenden verhalten werde. Soll P eine auf den Pfahl gelegte ruhende Masse sein: so wäre hier die bewegende Kraft $= P + N - R$ gleich dem Gewichte jener Masse und dem Gewichte des Pfahles vermindert um die Kraft, mit welcher der Boden dem Eindringen widersteht, die zu bewegende Masse $= P + N$. Nach den im 3. Abschnitte erläuterten Gesetzen würde also die Tiefe des Einsinkens $= s = g\left(\frac{P + N - R}{P + N}\right) t^2$ in der Zeit $= t$. Legte man demnach in dem eben angeführten Beispiele auf den Pfahl eine Last von 4 Millionen Pfunden, so wäre $s = gt^2 \cdot \frac{915340}{4001040} = 0{,}23 \cdot g \cdot t^2$, also $= 3$ Fuß in 1 Sec. Aber eine Last, kleiner als 3085000 Pfund würde ihn nicht im mindesten verrücken.

Um einen andern, eher durch Erfahrung zu prüfenden Fall zu betrachten, wollen wir setzen, auf jenem 1040 Pfunde schweren Pfahle ruhe der 1200 Pfund schwere Klotz und man bemerke, daß der Pfahl in einem sehr weichen Grunde sich in 1 Min. 2 Fuß tief einsenke. Dann wäre in der letzten Formel

$s = 2$, $t = 60$, $P = 1200$, $N = 1040$;

also $2 = 15 \cdot 60^2 \cdot \frac{2240 - R}{2240}$, das ist $R = 2239{,}91$.

Fiele nun eben der Kloß aus einer Höhe von 4 Fuß auf den Pfahl, so würde die Tiefe des Eindringens bei einem

Schlage $= s = \frac{1200^2 \cdot 4}{2239{,}9 \cdot 2240} = 1{,}15$ Fuß; wenn man auch den Kloß fast unmittelbar nach dem Stoße wieder abhöbe, so daß seine Wirkung, während er ruhend auf dem Pfahl liegt, nicht in Betrachtung käme.

Daß wir hiebei den Widerstand des Bodens als eine unveränderliche Kraft angesehen haben, ist offenbar nicht strenge richtig; denn bei tieferm Eindringen nimmt dieser Widerstand zu; aber diese Verschiedenheit ist während weniger Schläge sehr unbedeutend und kann daher bei Seite gesetzt werden. Eben so haben wir auch darauf, daß der Masse der zu verdrängenden Erde eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt wird, nicht gesehen, indem auch das unbedeutend ist.

Anmerkung. Sehr schätzbare Bemerkungen über diese Gegenstände enthält Woltmanns Abhandlung über den Effect des Ramms. Göttingen, 1804.

§. 226. b. Da man so oft über die Vergleichung der Wirkung von Stoß und Druck nähere Belehrung fordert, so mag hier noch ein Beispiel Platz finden, welches sich auf Fragen der Art bezieht.

In der einen Schaale einer gleicharmigen Waage liege ein Gewicht von 1000 Pfunden, wie groß muß das Gewicht eines Körpers sein, der aus einer Höhe von 240 Fuß auf die andre Schaale fallend, der Waageschaale eine Geschwindigkeit von 1 Fuß in einer Secunde ertheilen kann?

Wir müssen uns hier die belastete Schaale als unterstützt, die andre Schaale als frei schwebend denken, und annehmen, der fallende Körper treffe sie genau in eben so großer Entfernung vom Ruhepuncte, als die ist, in welcher die andre Schaale aufgehängt ist. Beim Aufschlagen

des fallenden Körpers hebt sich also die belastete Schaale eben so schnell, als die leere Schaale sinkt, und obgleich hier eigentlich auf die Drehung Rücksicht zu nehmen wäre: so ist es uns doch wohl erlaubt, so zu rechnen, als wenn die fallende Masse = P der andern Masse = 1000 Pfund unmittelbar die erlangte Geschwindigkeit = 1 Fuß ertheilen sollte. Ist also die fallende Masse unelastisch, ihre Geschwindigkeit = c, die ruhende Masse = M, so erhalten nach dem Stoße beide die Geschwindigkeit $= \frac{P \cdot c}{M+P}$. In unserm Beyspiele gebraucht, wenn ich den Widerstand der Luft bei Seite setze, der fallende Körper 4 Secunden, um 240 Fuß tief zu fallen, (wenn ich g = 15 Fuß annehme,) und hat am Ende des Falles die Geschwindigkeit = c = 120 erlangt. Die Geschwindigkeit nach dem Stoße soll $\frac{P \cdot c}{M+P} = 1$ Fuß,

also $120 P = 1000 + P$,

oder $P = \frac{1000}{119} = 8,3$ Pfund sein. Dieses geringe Gewicht von $8\frac{1}{3}$ Pfunden würde also jener Last von 1000 Pfunden die Geschwindigkeit = 1 Fuß in 1 Sec. ertheilen. Um aber den ganzen Erfolg zu übersehen, müssen wir überlegen, was jetzt nach vollendetem Stoße erfolgen wird. Die anfängliche Geschwindigkeit = 1, mit welcher die Masse von 1000 Pfunden aufzusteigen anfängt, wird durch die entgegenwirkende Schwere sehr schnell zerstört, und nach §. 37. wird das Steigen nur $\frac{1}{30}$ Sec., oder genauer nach §. 45. $\frac{1}{30} \cdot \frac{1008}{992}$ Sec. dauern.

Soll die Bewegung merklicher werden, so müssen wir die der Last von 1000 Pfunden zu ertheilende Geschwindigkeit größer annehmen, z. B. = $7\frac{1}{2}$ Fuß in 1 Secunde;

dann ist $120 . P = (1000 + P) \, 7,5$,

$7500 = 112,5 . P$,

$P = 66$ Pfund.

Mit dieser Geschwindigkeit $= 7,5$ steigt nun die Masse $= 1000$ und sinkt die Masse $= 66$, während das Uebergewicht der entgegen wirkenden Kraft nur $= 934$ ist, also nach einer Zeit $= t = \frac{7,5 \, . \, 1066}{2 . g \, . \, 934} = 0,29$ Sec. hört das Steigen auf, nachdem die 1000 Pfund schwere Last sich etwa um 1,3 Fuß hoch gehoben hat.

Wäre ein Gewicht $= P$ gegen die Waagschaale mit der Geschwindigkeit einer Flintenkugel, etwa $c = 800$ abgeschossen, so brauchte P nur $= 9\frac{1}{4}$ Pfund zu sein, um der großen Masse eine Geschwindigkeit von $7\frac{1}{2}$ Fuß zu ertheilen und sie etwa $\frac{1}{4}$ Fuß hoch zu heben.

§. 226. c. Durch den Stoß bestimmte auch Robins die Geschwindigkeit der Flintenkugeln. Er hatte nämlich ein sehr schweres Pendel so aufgehängt, daß die abgeschossene Kugel an dieses antraf und es in Bewegung setzte. Durch eine besondre Einrichtung konnte man die ganze Ausweichung des Pendels abmessen und folglich die Schnelligkeit, mit welcher es anfing sich zu bewegen, genau bestimmen. (Robins Artillerie übers. von Euler.). Aehnliche Versuche, bei denen das Pendel 7400 Pfund schwer war, hat neuerlich Millar angestellt. Soll dieses Pendel auch nur die Geschwindigkeit $= 1$ Fuß in 1 Sec. erhalten, wenn die Masse M mit der Geschwindigkeit $= c$ anschlägt, so ist, wenn diese Körper als unelastisch angesehen werden, $\frac{Mc}{M + 7400} = 1$, also wenn M 4 Pfund beträgt, oder die Versuche mit 4pfündigen Canonenkugeln angestellt werden, dieses Pendel noch brauchbar bei einer Geschwindigkeit $c = \frac{7404}{4} = 1851$ Fuß. Man kann die Einrichtung aber leicht so machen, daß auch größere Geschwindigkeiten des Pendels noch

bequem beobachtet werden können, und man folglich auch noch schwerere oder noch schneller bewegte Kugeln anwenden kann.

§. 227. Bemerkung. Von dem eccentrischen Stoße der Körper, wo die Richtung des Stoßes nicht durch den Schwerpunct geht, und wo daher Drehungen um diesen entstehen, kann hier nicht wohl gehandelt werden.

Vierzehnter Abschnitt.

Von der gleichförmigen Umdrehung fester Körper um unbewegliche Axen.

§. 228. Bemerkung. Wenn feste Körper von erheblicher Größe sich bewegen: so kann diese Bewegung entweder in einem parallelen Fortrücken aller einzelnen Puncte bestehen, oder es findet zugleich eine Umdrehung Statt. Ist das erstere, so lassen sich alle die Betrachtungen auch hier anwenden, die wir über die Bewegung eines Punctes angestellt haben, und die Bewegung heißt dann eine bloß fortrückende oder parallele Bewegung. Wenn dagegen nicht alle Puncte mit paralleler Bewegung fortrücken, so kann die Drehung des Körpers sehr verschiedenartig sein, indem er entweder sich um eine immer gleichbleibende Axe, die allenfalls selbst, in immer paralleler Lage fortrücken mag, dreht, oder nach und nach Drehungen um verschiedene Axen annimmt. Wir wollen hier zuerst nur Drehungen um festgehaltene Axen betrachten.

§. 229. Bemerkung. Wir haben im siebenten Abschnitte gesehen, daß jede im Kreise bewegte Masse ein Bestreben, sich vom Centro zu entfernen, zeigen muß.

Dieses Bestreben, oder die gesammte bewegende Kraft, mit welcher diese Masse sich loszureißen strebt, wurde (§. 100.) durch $\frac{c^2 . M}{2gr}$ ausgedrückt, wenn c die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, M seine Masse, r den Abstand vom Centro, g den Fallraum schwerer Körper in der ersten Secunde bedeutet. Nach diesem Gesetze würde man leicht, wenn (Fig. 62.) an der graden unbiegsamen Linie CD, die sich um den festgehaltenen Punct C drehen kann, in A, B, D, Massen $= M; = M'; = M''$ angebracht sind, die gesammte Kraft finden, welche CA zu zerreißen strebt, oder welche auf C drückt. Heißen nämlich der Massen M, M', M'' Abstände vom Centro $= r; = r'; = r''$; ihre Geschwindigkeiten $= c; = c'; = c''$: so wäre die auf C drückende Kraft $= \frac{1}{2g}\left(\frac{c^2 M}{r} + \frac{c'^2 M'}{r'} + \frac{c''^2 . M''}{r''}\right)$, oder da nothwendig $c' = \frac{c . r'}{r}$, $c'' = \frac{c . r''}{r}$, weil die Massen immer in einer und derselben graden Linie bleiben sollen, jene Kraft $= \frac{c^2}{2g . r^2}(r M + r' M' + r'' M'')$.

§. 230. Erklärung. Wenn mehrere Körper oder Massen, so wie wir es eben betrachtet haben, fest mit einander verbunden sind: so legen die von jedem einzelnen Puncte senkrecht auf die Umdrehungs-Axe gezognen Linien bei der Umdrehung in einerlei Zeit sämmtlich gleiche Winkel zurück, weil die Stellungen der einzelnen Puncte gegen einander unveränderlich bleiben. Man nennt daher Winkelgeschwindigkeit des ganzen Körpers die Größe des Winkels, um welchen er sich in der Zeit-Einheit gedreht hat, oder die Größe des Bogens, den ein in der Entfernung = 1 von der Axe sich befindender Punct in der Zeit-Einheit durchläuft.

§. 231. Befindet sich also eine bewegte Masse in der Entfernung = r von der Axe und hat diese die Ge-

oder $CG.(M+N) = M r \, Cos\, \varphi + N r' \, Cos\, (\alpha - \varphi)$; daher wird der von $M+N$, wenn beide Massen in G vereinigt sind, auf C ausgeübte Druck

$$= \frac{c^2 1}{2g\, r^2} (M r \, Cos\, \varphi + N r' \, Cos\, (\alpha - \varphi),$$

völlig eben so dargestellt, wie wir den aus den Schwungkräften beider einzelnen Massen entstehenden Druck auf C ausgedrückt fanden.

Hieraus erhellt, daß der Lehrsatz gilt für zwei Massen M, N, daß er sich also leicht für drei und mehr einzelne, in der Ebne ABDE liegende Massen beweisen ließe, und folglich auch gilt, wenn man sich jeden einzelnen Punct der Ebne als schwer oder als mit einer, seiner Größe proportionalen Masse belastet, vorstellt.

§. 235. Wenn also G den Schwerpunct der ganzen Ebne vorstellt, so ist CG allemal die Richtung des Druckes, den der unterstützte Punct C, wegen der aus der Umdrehung entstehenden Schwungkraft, leidet; und so wie G bei der Drehung um C in andre Richtungen kömmt, so ändert sich auch die Richtung des Druckes, den C leidet.

Fiele der Schwerpunct in C selbst, oder ginge die auf die Ebne senkrechte Axe durch den Schwerpunct derselben: so hätte die Axe gar keine Gewalt auszuhalten, oder die Ebne könnte sich um eine solche Axe ganz frei drehen, ohne daß es eine Kraft bedürfte, um die Axe zu halten.

§. 236. Lehrsatz. Wenn (Fig. 65.) eine Ebne ABCD sich um eine in der Ebne selbst liegende Axe EF dreht: so ist die Schwungkraft, welche auf die Axe drückt, zwar eben so groß, als wenn die ganze Masse der Ebne im Schwerpuncte vereinigt wäre; aber die mittlere Richtung der Schwungkraft geht nicht nothwendig durch den Schwerpunct.

Beweis. Wir haben nur nöthig, den Beweis so zu führen, wie er für eine nicht schwere, bloß in M, N

e Geschwindigkeit dieses Schwerpunctes $= C = \frac{c \cdot R}{r}$,

, die Schwungkraft $= \frac{C^2}{2g\,R}(M + M' + M'' + M''')$
en so groß, als wenn die Summe der Massen im
chwerpuncte vereinigt wäre, und sich mit der Geschwin-
gkeit $= C$ um eben den Mittelpunct bewegte, das ist,
it derjenigen Geschwindigkeit, welche der angenommenen
Winkelgeschwindigkeit des Körpers entspricht.

§. 233. Da dieser Satz gilt, es mag die Anzahl
r mit Massen belasteten Puncte der graden Linie so groß
an will seyn: so gilt er auch für eine in allen Puncten
ywere Linie oder für eine aus lauter materiellen Theilen
stehende Linie und auch ihre Schwungkraft ist eben so
oß, als ob ihre ganze Masse im Schwerpuncte vereinigt
äre.

Dieses gilt noch, wenn die schwere Linie AB (Fig. 63.)
h nach beiden Seiten über den festgehaltenen Punct C
inaus erstreckt. Ist nämlich hier des Theiles AC
Schwerpunct in D, seine Masse $= m$, Geschwindigkeit
es Schwerpunctes $= c$; und des Theiles CB Schwer-
unct in E, Masse $= m'$, Geschwindigkeit des Schwer-
punctes $= c'$: so leidet der Punct C den Druck
$= \frac{c^2 \cdot m}{2g \cdot r} - \frac{c'^2 \cdot m'}{2g \cdot r'}$, wenn $CD = r$, $CE = r'$ ist.

Dieser Druck ist, da $c' = \frac{c \cdot r'}{r}$ auch $= \frac{c^2}{2g}\left(\frac{r \cdot m - r' m'}{r^2}\right)$

nd wenn G der ganzen Linie Schwerpunct bedeutet, also
$CG = \frac{r \cdot m - r' m'}{m + m'}$, der Druck $= \frac{c^2}{2g\,r^2} \cdot CG\,(m + m')$

der $= \frac{C^2}{2g \cdot CG}(m + m')$, wenn C die Geschwindigkeit
es Schwerpunctes G ist.

Anmerkung. Ich habe hier das Wort: schwer — ge-
braucht oder die Linie eine schwere Linie genennt; eigent-
lich aber kömmt es hier auf die Einwirkung der Schwere,

Druck $= \frac{c^2 . RQ . (M+N)}{2g . r^2}$ auf die Are ausüben,

oder $= \frac{c^2 . (rM + r'N)}{2g r^2}$.

Diese Schwungkraft der vereinigten Massen ist eben so groß, als die Summe der einzelnen Schwungkräfte, die wir vorhin fanden. Aber die Puncte P und R fallen nicht nothwendig zusammen, oder die mittlere Richtung der durch die Bewegung der einzelnen Massen hervorgebrachten Schwungkräfte geht nicht allemal durch den Schwerpunct, sondern dies geschieht nur dann, wenn LR = LP ist.

§. 237. Die mittlere Richtung der Schwungkräfte beider Massen geht nur dann durch den Schwerpunct, wenn R mit P zusammen fällt oder LR = LP, das ist $\frac{LO . N}{M+N} = \frac{LO . r' N}{rM + r'N}$ oder $r'(M+N) = rM + r'N$ oder $r'M = rM$ ist.

Sind mehrere Massen da, so ist zwar noch die gesammte Schwungkraft aller einzelnen Massen eben so groß, als wenn sie alle in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte vereinigt wären; aber die mittlere Richtung aller Schwungkräfte geht auch da nicht nothwendig durch den Schwerpunct. Daher ruhet auch hier nicht immer die Are von selbst, wenn sie gleich durch den Schwerpunct geht, sondern es ist in den meisten Fällen nothwendig, daß die Are in zwei Puncten fest gehalten werde.

Wenn (so, wie in Fig. 64.) die Drehungs-Are senkrecht gegen die Ebne ist, und sie geht zugleich durch den Schwerpunct der Ebne: so bedurfte es gar keiner Kraft, um die Are zu halten, oder diese blieb bei der Drehung des Körpers von selbst in Ruhe. Hier hingegen, wo die Umdrehung um eine in der Ebne selbst liegende Are geschieht, ist es sehr oft der Fall, daß die durch den

in ihrem Schwerpuncte G vereinigt wäre. Für den Schwerpunct G beider Massen ist (Statik §. 94. 106.)

$$MG = \frac{N \cdot MN}{M + N}, \quad NG = \frac{M \cdot MN}{M + N};$$

ferner $CM \cdot \text{Sin}\, MCG = MG \cdot \text{Sin}\, MGF$,

$$CN \cdot \text{Sin}\, NCG = NG \cdot \text{Sin}\, MGF,$$

also $\dfrac{CM \cdot \text{Sin}\, MCG}{MG} = \dfrac{CN \cdot \text{Sin}\, NCG}{NG}$, und wenn ich $MCG = \psi$ setze, und für CM, CN, MG, NG ihre Werthe, wird $\dfrac{r \cdot \text{Sin}\,\psi}{N} = \dfrac{r' \cdot \text{Sin}\,(\alpha - \psi)}{M}$,

das ist $r \cdot M\, \text{Sin}\,\psi = r' \cdot N\, (\text{Sin}\,\alpha\, \text{Cos}\,\psi - \text{Cos}\,\alpha\, \text{Sin}\,\psi)$,

oder $\text{tang}\,\psi = \dfrac{r' \cdot N \cdot \text{Sin}\,\alpha}{r \cdot M + r' \cdot N \cdot \text{Cos}\,\alpha}$, welches $= \text{tang}\,\varphi$ ist,

da auch $\dfrac{Q \cdot \text{Sin}\,\alpha}{P + Q \cdot \text{Cos}\,\alpha} = \dfrac{r' \cdot N \cdot \text{Sin}\,\alpha}{r \cdot M + r' \cdot N \cdot \text{Cos}\,\alpha}$.

Die Richtung der gesammten Schwungkraft, welche aus der Bewegung beider Massen M und N entsteht, ist also unter eben dem Winkel $= \varphi$ gegen CM geneigt, nach welcher eine im Schwerpuncte G angebrachte Masse bei der Drehung um den Punct C diesen drücken würde.

Wäre aber in G die Masse $= M + N$ angebracht, so wäre der Druck, welchen die aus ihrer Bewegung entstehende Schwungkraft auf C ausüben würde

$= \dfrac{c^2 \cdot CG \cdot (M + N)}{2g \cdot r^2}$, weil die Geschwindigkeit des Punctes G bei der Umdrehung $= \dfrac{c \cdot CG}{r}$ ist, indem M mit der Geschwindigkeit $= c$ fortrückt, und alle diese Puncte fest verbunden bleiben.

Es läßt sich aber leicht übersehen, daß Cos MGC

$$= \frac{CG - CM\, \text{Cos}\,\varphi}{MG} = \text{Cos}\, HGN = \frac{CN \cdot \text{Cos}\,(\alpha - \varphi) - CG}{NG}$$

ist, also $\dfrac{CG - r\, \text{Cos}\,\varphi}{N} = \dfrac{r'\, \text{Cos}\,(\alpha - \varphi) - CG}{M}$,

Körper fest vereinigt sind, so ist die Geschwindigkeit aller durch die Geschwindigkeit irgend eines Punctes bestimmt, und die ganze Betrachtung läßt sich nun auf die Art, wie in §. 233. 234. weiter fortführen. Die gesammte Schwungkraft des Körpers läßt sich auch hier nicht mit der verwechseln, die der im Schwerpuncte vereinigten Masse zukommen würde, da die mittlere Richtung der Schwungkraft nicht nothwendig durch den Schwerpunct geht.

§. 239. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß der Körper, wenn die Axe völlig fest gehalten wird, seine Drehung um die Axe gleichförmig fortsetzen wird, so lange nicht andre Kräfte auf ihn einwirken. Denn, so gut wie jedes Theilchen der Masse, wofern es nur durch einen Faden an dem Mittelpuncte festgehalten würde, seine Umläufe gleichförmig fortsetzen müßte, wenn es allein da wäre, eben so werden auch alle zu einem Körper vereinigten Massen ihre Umläufe unaufhörlich gleichförmig fortsetzen.

§. 240. Welchen Druck die Axe leidet, würde man bestimmen, wenn man sich den Körper in Scheiben zerlegt, und jeder Scheibe Masse in ihrem Schwerpuncte vereinigt dächte. Die alsdann gefundene Schwungkraft einer solchen Masse zerlegt man am besten nach zwei auf einander selbst und zugleich auf die Axe senkrechten Richtungen; und indem man so für alle einzelnen Theile des Körpers verfährt und die nach der einen Richtung wirkenden Kräfte in eine einzige Kraft, die nach der anderen Richtung wirkenden Kräfte auch in eine einzige Kraft vereinigt, erhält man statt aller jener Kräfte zwei auf einander senkrechte Kräfte, durch welche die Axe gedrückt wird. Die Richtungen dieser beiden Kräfte gehen aber nicht nothwendig durch denselben Punct der Axe und auch nicht nothwendig durch den Schwerpunct, wie aus den Betrachtungen in §. 234. hinreichend erhellt.

mit zwei Massen belastete Ebne gelten würde, indem er sich denn leicht allgemeiner machen läßt. Es sei also in M die Masse = M in der gegen die Axe senkrechten Entfernung LM = r, und in N die Masse = N in der Entfernung = r′ angebracht. Da die feste Ebne sich um die Axe EF gleichförmig dreht: so ist die Geschwindigkeit = c′ der Masse N durch $c' = \frac{c\,r'}{r}$ bestimmt, wenn M die Geschwindigkeit = c hat. Die Masse M übt nun wegen ihrer Schwungkraft auf den Punct L der Axe einen Druck $= \frac{c^2 M}{2g\,r}$; die Masse N auf den Punct O den Druck $= \frac{c^2 r' N}{2g\,r^2}$ aus; und da beider Kräfte Richtungen parallel sind, so würde eine Kraft der Summe beider gleich $= \frac{c^2}{2g\,r^2}(r\,M + r'\,N)$ in P mit LM parallel wirkend, völlig eben so, wie jene beiden zusammen, auf die Axe drücken, wenn $LP = \frac{LO\,.\,r'N}{r\,M + r'N}$ wäre (Statik. §. 94.). Die festgehaltenen Puncte der Axe nämlich würden von jenen beiden Kräften genau eben so, wie von dieser einen in P angebrachten gedrückt werden.

Sucht man die Lage des gemeinschaftlichen Schwerpunctes Q der Massen M, N, so ist des Punctes Q Entfernung von der Axe $QR = \frac{rM + r'N}{M + N}$ und sein Abstand von LM ist $LR = \frac{LO\,.\,N}{M + N}$.

Wären nun bei der Drehung um die Axe EF die Massen M + N in Q vereinigt, so wäre des Punctes Q Geschwindigkeit $= \frac{c\,.\,RQ}{r}$, wenn M sich mit der Geschwindigkeit = c bewegt, und die Masse = M + N würde wegen der Schwungkraft in dem Puncte R einen

Druck $= \frac{c^2 . RQ . (M + N)}{2g . r^2}$ auf die Axe ausüben,

oder $= \frac{c^2 . (r M + r' N)}{2g\, r^2}$.

Diese Schwungkraft der vereinigten Massen ist eben so groß, als die Summe der einzelnen Schwungkräfte, die wir vorhin fanden. Aber die Puncte P und R fallen nicht nothwendig zusammen, oder die mittlere Richtung der durch die Bewegung der einzelnen Massen hervorgebrachten Schwungkräfte geht nicht allemal durch den Schwerpunct, sondern dies geschieht nur dann, wenn LR = LP ist.

§. 237. Die mittlere Richtung der Schwungkraft beider Massen geht nur dann durch den Schwerpunct, wenn R mit P zusammen fällt oder LR = LP, das ist $\frac{LO . N}{M + N} = \frac{LO . r' N}{r M + r' N}$ oder $r' (M + N) = r M + r' N$ oder $r' M = r M$ ist.

Sind mehrere Massen da, so ist zwar noch die gesammte Schwungkraft aller einzelnen Massen eben so groß, als wenn sie alle in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte vereinigt wären; aber die mittlere Richtung aller Schwungkräfte geht auch da nicht nothwendig durch den Schwerpunct. Daher ruhet auch hier nicht immer die Axe von selbst, wenn sie gleich durch den Schwerpunct geht, sondern es ist in den meisten Fällen nothwendig, daß die Axe in zwei Puncten fest gehalten werde.

Wenn (so, wie in Fig. 64.) die Drehungs-Axe senkrecht gegen die Ebne ist, und sie geht zugleich durch den Schwerpunct der Ebne: so bedurfte es gar keiner Kraft, um die Axe zu halten, oder diese blieb bei der Drehung des Körpers von selbst in Ruhe. Hier hingegen, wo die Umdrehung um eine in der Ebne selbst liegende Axe geschieht, ist es sehr oft der Fall, daß die durch den

$x = a$ reichende Werth von $\int x dx$ ist also $= \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} \frac{y^4}{p^2}$,

folglich $\int dy \int x dx = \int \frac{1}{2} a^2 . dy - \int \frac{1}{2} \frac{y^4 dy}{p^2} = \frac{1}{2} a^2 . y - \frac{1}{10} \frac{y^5}{p^2}$, welches mit $y = 0$ verschwinden muß und folglich keiner beigefügten Constans bedarf, aber für $y = PN = p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$ seinen vollen Werth erhält, der also $= \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}$ wird.

Der Abstand des Schwerpunctes von der Axe AB ist also

$$= \frac{\int dy \int x dx}{\int y dx} = \frac{\frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a = AL.$$

Ich habe hier nicht den leichtesten Weg befolgt, um die Entfernung des Schwerpunctes von AB zu finden, weil ich zeigen wollte, wie man auf die Bestimmung der beständigen Größe Rücksicht zu nehmen hat. Man fände sonst auch, indem man zuerst in Beziehung auf y integrirt, $\int dy \int x dx = \int x dx \int dy = \int xy\, dx$, wo keine Constans hinzukömmt, weil man ydx den Inhalt von KQ bedeutet, der $= 0$ ist für $y = 0$. Setze ich hier $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, so ist für den ganzen Streifen KR, $\int xy dx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} . dx$ $= \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}$, und dieses Integral muß mit $x = 0$ verschwinden, weil eines Parallelogramms KR Moment $= 0$ wäre, wenn seine Entfernung von der Axe AB an $= 0$ ist. Es ist also $\frac{2}{5} \sqrt{px^5}$ die Summe aller Momente in Beziehung auf AB, und $\frac{\frac{2}{5} \sqrt{px^5}}{\frac{2}{3} \sqrt{px^3}}$ $= \frac{3}{5} x$ der Abstand des Schwerpunctes von AB für jeden durch eine mit Ml parallele Ordinate begrenzten Theil der Parabel, oder $= \frac{3}{5} a$, wenn der bestimmte Werth von $x = AP = a$ ist.

V. Den Schwerpunct eines Körpers zu bestimmen. Wenn wir uns irgend einen Punct (Fig. 70.) M des Körpers durch drey auf einander senkrechte Coordinaten $EH = x$, $HI = y$, $IM = z$ bestimmt denken: so können wir die Masse des Theilchens M durch $= dx\, dy\, dz$ ausdrücken. Dieses Theilchens Moment in Beziehung auf die Axe AC ist (Statik §. 117.), wenn ich MI als vertical ansehe $= y . dx . dy . dz$, also wenn ich bloß y als veränderlich ansehe, das Moment des ganzen Parallelepipedi, das in der bestimmten Höhe $= z$, und in der Entfernung $= x$ von der Axe EF liegt, und sich durch den ganzen Körper erstreckt, wie TS, ist $= \frac{1}{2} y^2 dx\, dz$, wo man kann, um das vollständige In-

Körper fest vereinigt sind, so ist die Geschwindigkeit aller durch die Geschwindigkeit irgend eines Punctes bestimmt, und die ganze Betrachtung läßt sich nun auf die Art, wie in §. 233. 234. weiter fortführen. Die gesammte Schwungkraft des Körpers läßt sich auch hier nicht mit der verwechseln, die der im Schwerpuncte vereinigten Masse zukommen würde, da die mittlere Richtung der Schwungkraft nicht nothwendig durch den Schwerpunct geht.

§. 239. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß der Körper, wenn die Axe völlig fest gehalten wird, seine Drehung um die Axe gleichförmig fortsetzen wird, so lange nicht andre Kräfte auf ihn einwirken. Denn, so gut wie jedes Theilchen der Masse, wofern es nur durch einen Faden an dem Mittelpuncte festgehalten würde, seine Umläufe gleichförmig fortsetzen müßte, wenn es allein da wäre, eben so werden auch alle zu einem Körper vereinigten Massen ihre Umläufe unaufhörlich gleichförmig fortsetzen.

§. 240. Welchen Druck die Axe leidet, würde man bestimmen, wenn man sich den Körper in Scheiben zerlegt, und jeder Scheibe Masse in ihrem Schwerpuncte vereinigt dächte. Die alsdann gefundene Schwungkraft einer solchen Masse zerlegt man am besten nach zwei auf einander selbst und zugleich auf die Axe senkrechten Richtungen; und indem man so für alle einzelnen Theile des Körpers verfährt und die nach der einen Richtung wirkenden Kräfte in eine einzige Kraft, die nach der andern Richtung wirkenden Kräfte auch in eine einzige Kraft vereinigt, erhält man statt aller jener Kräfte zwei auf einander senkrechte Kräfte, durch welche die Axe gedrückt wird. Die Richtungen dieser beiden Kräfte gehen aber nicht nothwendig durch denselben Punct der Axe und auch nicht nothwendig durch den Schwerpunct, wie aus den Betrachtungen in §. 234. hinreichend erhellt.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Den Schwerpunct einer graden Linie AB (Fig. 67.) zu finden, wenn die einzelnen Puncte mit Gewichten beschwert sind, welche als Functionen der Abstände von A, gegeben sind.

Man nenne irgend eines Punctes M Abstand von A, $= x$, ch die Masse, mit welcher das Theilchen dx beschwert, ist $= Xdx$, so ist dieser Masse Moment in Beziehung auf den willkürlichen Punct A durch $= Xxdx$ ausgedrückt; die Summe aller dieser Momente für alle Theilchen der Linie also durch $= \int Xxdx$. Ist nun G der Schwerpunct und der ganzen Linie Masse $= M$, so soll $M . AG = \int Xxdx$ sein, also da offenbar der ganzen Linie Masse $= M = \int Xdx$ ist, $AG = \frac{\int Xxdx}{\int Xdx}$.

II. Beispiel. In jedem Puncte M, dessen Entfernung on $A = x$ ist, sei die Masse $dM = Xdx = \pi b^2 x^2 dx$ verstigt, so ist $\int Xdx = \frac{1}{3} \pi b^2 x^3$, wo keine beständige Größe zuzufügen ist, wenn die Masse von A anfangend gerechnet wird, so die ganze Masse ist $= \frac{1}{3} \pi b^2 a^3$, wenn die ganze Länge des lentischen Körpers $= AB = a$ ist. Wir finden ferner $\int Xxdx = \int \pi b^2 x^3 dx = \frac{1}{4} \pi b^2 x^4$, oder für die ganze AB, $= \frac{1}{4} \pi b^2 a^4$;

$$\text{also } AG = \frac{\int Xxdx}{\int Xdx} = \frac{3}{4} a.$$

Die Masse, die wir hier betrachtet haben, ist eigentlich die Masse des Kegels, dessen Halbmesser $= bx$ ist in der Entfernung $= x$ in der Spitze. Wir haben uns die Masse jedes auf die Axe senkrechten Querschnitts als im Centro desselben vereinigt gedacht und e Lage des Schwerpuncts um $\frac{3}{4}$ der Höhe von der Spitze entfernt gefunden, wie in der Statik §. 144.

III. Den Schwerpunct der ebnen Figur ABCD (Fig. 68.) zu stimmen. Wir denken uns durch den Anfangspunct E der Abssen zwei auf einander senkrechte Linien und suchen den Abstand s Schwerpuncts von jeder derselben. Stellen wir uns nämlich C als eine festgehaltene Axe vor und nennen, um die Lage nd eines Theilchens zu bestimmen, $EF = x$; $FM = y$, die Masse des Theilchens $= dM = dx . dy$; indem wir den Inhalt s kleinen Recht-Eckes als seine Masse darstellend ansehen: so ist dieser Masse dM Moment in Beziehung auf die Axe AC, $= y . dx . dy$ und $dx \int ydy$ ist die Summe der Momente aller in G vereinigten Theile, wenn man nämlich das Integral von $= 0$ annimmt, und für $y = FG$ seinen vollständigen Werth erreichen läßt. Hier ist x als unveränderlich angesehen, und bloß

$\text{Const} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{b^2} dz \left\{ \frac{2}{3} \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$, und das vollständige Integral $= \frac{1}{3} \frac{c^2}{b^2} dz \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$, oder das Moment der Scheibe $= \frac{1}{3} \frac{c^2}{b^2} dz \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{3} b \, dz \, c^2 \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Endlich das Moment des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe BD, $= \text{Const} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot c^2 \cdot a \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\frac{5}{2}}$; und dieses Integral muß zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = a$ genommen werden, giebt also das Moment $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \, b \, a \, c^2$ für den ganzen Körper.

Des Körpers ganzer Inhalt wird auf ähnliche Weise gefunden. Des kleinen Parallelepipedi M Inhalt ist $= dx \, dy \, dz$, des Parallelepipedi KM Inhalt $= x \, dy \, dz$. Um dieses Integral vollständig zu erhalten, muß es zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{c}{b} \sqrt{\left\{b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2\right\}}$ genommen werden. Das Parallelepipedum, dessen Breite $= dy$ und Höhe $= dz$, und welches durch den ganzen Körper geht, ist
$= \frac{c}{b} \, dy \, dz \sqrt{\left\{b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2\right\}}$. Hieraus findet sich, wenn man z als unveränderlich ansieht, der Inhalt, der in der bestimmten Höhe $= z$ liegenden Scheibe

$$= \frac{c \, dz}{b} \int dy \sqrt{\left\{b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2\right\}}$$

$$= \frac{c \, dz}{b} \cdot b \sqrt{\frac{(a-z)}{a}} \int dy \sqrt{\left\{1 - \frac{a y^2}{b^2 (a-z)}\right\}}$$

$$= \frac{c \, b \, dz}{a} (a-z) \, \tfrac{1}{2} \, \text{Arc Sin} \left\{ \frac{y}{b} \sqrt{\frac{a}{a-z}} \right\}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} c \, y \, dz}{b} \sqrt{\left\{b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2\right\}}$$

(nach Pasquich. §. 38. 7. Zus. III.), wenn dieses Integral zwischen den Grenzen genommen wird, welche y bei gleich bleibendem z erlangen kann, das ist zwischen $y = - b \sqrt{\frac{(a-z)}{a}}$ und $= + b \sqrt{\frac{a-z}{a}}$, und dieses giebt für jenes Integral

$x = a$ reichende Werth von $\int x dx$ ist also $= \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} \frac{y^4}{p^2}$,

folglich $\int dy \int x dx = \int \frac{1}{2} a^2 . dy - \int \frac{1}{2} \frac{y^4 dy}{p^2} = \frac{1}{2} a^2 . y - \frac{1}{10} \frac{y^5}{p^2}$, welches mit $y = 0$ verschwinden muß und folglich keiner beigefügten Constans bedarf, aber für $y = PN = p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$ seinen vollen Werth erhält, der also $= \frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{10} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}$ wird.

Der Abstand des Schwerpunctes von der Axe AB ist also

$$= \frac{\int dy \int x dx}{\int y dx} = \frac{\frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a = AL.$$

Ich habe hier nicht den leichtesten Weg befolgt, um die Entfernung des Schwerpunctes von AB zu finden, weil ich zeigen wollte, wie man auf die Bestimmung der beständigen Größe Rücksicht zu nehmen hat. Man fände sonst auch, indem man zuerst in Beziehung auf y integrirt, $\int dy \int x dx = \int x dx \int dy = \int xy\, dx$, wo keine Constans hinzukömmt, weil man $y dx$ den Inhalt von KQ bedeutet, der $= 0$ ist für $y = 0$. Setze ich hier $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, so ist für den ganzen Streifen KR, $\int xy dx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} . dx = \frac{2}{5} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}$, und dieses Integral muß mit $x = 0$ verschwinden, weil eines Parallelogramms KR Moment $= 0$ wäre, wenn seine Entfernung von der Axe AB an $= 0$ ist. Es ist also $\frac{2}{5} \sqrt{px^5}$ die Summe aller Momente in Beziehung auf AB, und $\frac{\frac{2}{5} \sqrt{px^5}}{\frac{2}{3} \sqrt{px^3}} = \frac{3}{5} x$ der Abstand des Schwerpunctes von AB für jeden durch eine mit MI parallele Ordinate begrenzten Theil der Parabel, oder $= \frac{3}{5} a$, wenn der bestimmte Werth von $x = AP = a$ ist.

V. Den Schwerpunct eines Körpers zu bestimmen. Wenn wir uns irgend einen Punct (Fig. 70.) M des Körpers durch drei auf einander senkrechte Coordinaten $EH = x$, $HI = y$, $IM = z$ bestimmt denken: so können wir die Masse des Theilchens M durch $= dx\, dy\, dz$ ausdrücken. Dieses Theilchens Moment in Beziehung auf die Axe AC ist (Statik §. 117.), wenn ich MI als vertical ansehe $= y . dx . dy . dz$, also wenn ich bloß y als veränderlich ansehe, das Moment des ganzen Parallelepipedi, das in der bestimmten Höhe $= z$, und in der Entfernung $= x$ von der Axe EF liegt, und sich durch den ganzen Körper erstreckt, wie TS, ist $= \frac{1}{2} y^2 dx\, dz$, wo man dann, um das vollständige In-

tegral zu finden, diejenigen durch x und z ausgedrückten Werthe von y setzen muß, die den Grenzen des Körpers entsprechen. Um nun das Moment der ganzen Scheibe PR, die auf z senkrecht ist, und die Dicke dz hat, zu finden, muß man in Beziehung auf x integriren und das Moment dieser ganzen Scheibe in Beziehung auf die Axe der x ist $dz . \int \frac{dx . y^2}{2}$; also endlich die Summe der Momente aller solcher Scheiben in Beziehung auf die Axe der x ist $= \int dz \int \frac{y^2 dx}{2}$.

Liegt der Schwerpunct in N und ist des ganzen Körpers Masse $= M$: so ist M multiplicirt in den Abstand des Schwerpunctes von der durch x und z gelegten Ebne, gleich dem eben gefundenen Momente; indem, für ein in N angebrachtes Gewicht $= M$, das Moment in Beziehung auf die Axe EC, $= M . UV$ ist, wenn NU die Verticallinie vorstellt, also UV den kleinsten Abstand der Richtung der Kraft von der Axe EC; also ist der Abstand des Schwerpunctes von der Axe der $x = \frac{\frac{1}{2} \int dz \int y^2 dx}{M}$ und $M = \int dz \int dx \int dy = \int (dz \int y\, dx)$.

VI. **Beispiel.** Es sei (Fig. 70.) APRC ein durch die Umdrehung einer Parabel um ihre Hauptaxe FE entstandener Körper: so ist, wenn ich $LF = u$ nenne, der Halbmesser des Querschnitts PR, $= x = \sqrt{pu}$, oder wenn $FE = a$, $EL = z$ heißt, $x = \sqrt{(pa - pz)}$, für die Parabel, durch deren Umdrehung der runde Körper entstanden ist.

Da hier alle auf LE senkrechten Querschnitte Kreise sind, deren Halbmesser $= \sqrt{(pa - pz)}$ ist, und deren Inhalt daher durch $= \pi (pa - pz)$ ausgedrückt wird, so ist des ganzen Körpers Masse $= \int \pi dz (pa - pz) = \pi (paz - \frac{1}{2} pz^2 + Const)$. Diese Masse ist $= 0$ für $z = 0$, also $Const = 0$, und das Integral erhält seinen ganzen Werth $= \frac{1}{2} \pi p a^2$, wenn $z = a$ ist.

Der Scheibe PR Inhalt ist hier $= \pi dz . (pa - pz)$, wenn wir ihr die Dicke $= dz$ beilegen und ihr Moment in Beziehung auf die Ebne AC, ist $= \pi z dz (pa - pz)$; das heißt, wenn man sich die Ebne AC als vertical und in ihr eine horizontale Axe denkt, so ist $\pi z dz (pa - pz)$ das Moment der Scheibe PR in Beziehung auf diese Axe. Folglich des ganzen Körpers Moment $= \pi p (\frac{1}{2} a z^2 - \frac{1}{3} z^3)$, welches für $z = a$ seinen vollständigen Werth $= \frac{1}{6} \pi p . a^3$ erhält.

Die ganze Masse in der Entfernung $= w$ von der Ebne AC

hätte das Moment $= w \cdot \frac{\pi}{2} p a^2$, und dieses soll $= \frac{1}{4} \pi p a^3$ sein, also $w = \frac{1}{2} a$, als Abstand des Schwerpunctes von AC.

VII. Um nicht bloß ein allzu leichtes Beispiel zu betrachten, sei LEC ein Körper (Fig. 71.), dessen auf LE senkrechte Querschnitte halbe Ellipsen sind, deren halbe Axen FR zu FG und EC zu EB sich wie c : b verhalten; der durch die Axe LE und große Axe CE der Ellipsen gehende Schnitt LEC sei eine Parabel. LE sei $= a$. In dieser Parabel ist $c^2 = pa$, also ihr Parameter $= \frac{c^2}{a}$, und für $EF = z$ ist $FR^2 = p(a - z)$

$$= c^2 - \frac{c^2 z}{a} = \frac{c^2}{a}(a - z),$$

und $FG : FR = b : c$,

also $FG^2 = \frac{b^2}{a}(a - z)$,

und der Schnitt BLD ist folglich auch eine Parabel.

Nenne ich jetzt für irgend ein Theilchen M die Coordinaten $EH = x$, $HI = y$, $IM = z$, so ist dieses Theilchens Masse $= dx \cdot dy \cdot dz$, Moment in Beziehung auf die Axe FG die mit BD parallel ist $= dyxdx \cdot dz$, und folglich des ganzen Parallelepipedi KM, dessen Länge $= x$, Breite $= dy$, Höhe $= dz$, Moment $\frac{1}{2} x^2 dy dz$, und da in dieser Ellipse x sich bis an die Grenze des Körpers erstreckt, wenn

$$x^2 = FR^2 - \frac{FR^2}{FG^2} y^2 = \frac{c^2}{b^2}\left(b^2 - \frac{z b^2}{a} - y^2\right) \text{ ist,}$$

so wird das vollständige Moment

$$= \frac{1}{2} \frac{c^2}{b^2} dz \left\{\left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right) dy - y^2 \cdot dy\right\}.$$

Aus diesem Momente des kleinen Parallelepipedi KS, wird das Moment der ganzen Scheibe KRG gefunden, indem man so integrirt, daß bloß y als veränderlich angesehen wird. Das Moment der ganzen, in der bestimmten Höhe $= z$ liegenden Scheibe ist also $=$ Const $+ \frac{1}{2} \frac{c^2}{b^2} dz \left\{\left(b^2 - \frac{b^2 z}{a}\right) y - \frac{1}{3} y^3\right\}$, wenn hier das Integral so genommen wird, daß es für den kleinsten Werth von y, der $= FG = -b\sqrt{\left(1 - \frac{z}{a}\right)}$ ist, verschwindet, und für den größten Werth von $y = FP = b\sqrt{\frac{a-z}{a}}$, seinen vollständigen Werth erhält. Es ist also

$$\text{Const} = + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{b^2} dz \left\{ \frac{2}{3} \left(b^2 - \frac{b^2}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right\},$$ und das vollständige Integral $= \frac{1}{3} \frac{c^2}{b^2} dz \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$, oder das Moment der Scheibe $= \frac{1}{3} \frac{c^2}{b^2} dz \left(b^2 - \frac{b^2 z}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{3} b \, dz \, c^2 \left(1 - \frac{z}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Endlich das Moment des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe BD, $= \text{Const} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot b \cdot c^2 \cdot a \left(1 - \frac{z}{a} \right)^{\frac{5}{2}}$; und dieses Integral muß zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = a$ genommen werden, giebt also das Moment $= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \, b \, a \, c^2$ für den ganzen Körper.

Des Körpers ganzer Inhalt wird auf ähnliche Weise gefunden. Des kleinen Parallelepipedi M Inhalt ist $= dx \, dy \, dz$, des Parallelepipedi KM Inhalt $= x \, dy \, dz$. Um dieses Integral vollständig zu erhalten, muß es zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{c}{b} \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$ genommen werden. Das Parallelepipedum, dessen Breite $= dy$ und Höhe $= dz$, und welches durch den ganzen Körper geht, ist $= \frac{c}{b} dy \, dz \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$. Hieraus findet sich, wenn man z als unveränderlich ansieht, der Inhalt, der in der bestimmten Höhe $= z$ liegenden Scheibe

$$= \frac{c \, dz}{b} \int dy \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$$

$$= \frac{c \, dz}{b} \cdot b \sqrt{\frac{(a-z)}{a}} \int dy \sqrt{\left\{ 1 - \frac{a y^2}{b^2 (a-z)} \right\}}$$

$$= \frac{c \, b \, dz}{a} (a-z) \, \frac{1}{2} \, \text{Arc Sin} \left\{ \frac{y}{b} \sqrt{\frac{a}{a-z}} \right\}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} c \, y \, dz}{b} \sqrt{\left\{ b^2 - \frac{b^2 z}{a} - y^2 \right\}}$$

(nach Pasquich. §. 38. 7. Zus. III.), wenn dieses Integral zwischen den Grenzen genommen wird, welche y bei gleich bleibendem z erlangen kann, das ist zwischen $y = - b \sqrt{\frac{(a-z)}{a}}$ und $= + b \sqrt{\frac{a-z}{a}}$, und dieses giebt für jenes Integral

$= b\,c\,dz\,\frac{(a-z)}{a}\,.\,\frac{1}{2}\pi$, weil Arc Sin $-1 = -\frac{1}{2}\pi$ und

Arc. Sin $1 = \frac{1}{2}\pi$ ist. Endlich erhält man des ganzen Körpers

Inhalt $= \frac{\frac{1}{2}\,b\,c\,\pi}{a}\int dz\,(a-z)$, wenn man dieses Integral zwischen den Grenzen $z = o$ und $z = a$ nimmt, und zwischen diesen Grenzen ist es $= \frac{1}{4}\,b\,c\,a\,\pi$.

Denkt man sich diese Masse im Schwerpuncte vereinigt, dessen Abstand von der Ebne BLD $= r$ heißen mag, so soll

$\frac{2}{15}\,b\,a\,c^2 = \frac{1}{4}\,b\,c\,.\,a\,\pi\,.\,r$ sein, also $r = \frac{16}{15}\,\frac{c}{\pi}$, der Abstand des Schwerpunctes von der Ebne LBD.

Der Abstand des Schwerpuncts von der Ebne BCD wird ein auf ähnliche Art gefunden. Des Theilchens M Moment in Beziehung auf die Ebne BCD ist $= z\,dz\,.\,dy\,.\,dx$, also das Moment des ganzen Parallelepipedi, dessen Grundfläche $= dx\,.\,dy$ und das sich senkrecht auf BCD durch den ganzen Körper erstreckt

$$= dy\,.\,dx\,.\int z\,dz = dy\,.\,dx\,.\frac{z^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,dx\,.\,dy\,.\,\frac{a^2}{b^4\,c^4}\,.\,(b^2\,c^2 - b^2\,x^2 - c^2\,y^2)^2;$$

der letztere Ausdruck ist das zwischen den gehörigen Grenzen genommene Integral; denn da der in der Höhe $= z$ liegende Durchschnitt des Körpers eine Ellipse ist, deren Axen

$$= \sqrt{\frac{b^2\,(a-z)}{a}} \text{ mit } y \text{ parallel, und}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2\,(a-z)}{a}} \text{ mit } x \text{ parallel:}$$ so liegt in der Höhe $= z$ die Oberfläche des Körpers in den durch

$$y^2 = \frac{b^2\,(a-z)}{a} - \frac{b^2}{c^2}\,x^2 \text{ bestimmten Puncten,}$$

oder $z = a - a\,\frac{(c^2\,y^2 + b^2\,x^2)}{b^2\,c^2}$ ist die Gleichung für die Oberfläche des Körpers, also zugleich der größte Werth, den z für ein bestimmtes x und y innerhalb des Körpers erreichen kann.

Der ganzen, durch IHM gelegten Scheibe Moment ist also, weil x unveränderlich bleibt

$$= \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,dx}{b^4\,c^4}\left\{b^4\,(c^2 - x^2)^2\,y - \frac{2\,b^2\,c^2}{3}\,(c^2 - x^2)\,y^3 + \frac{1}{5}\,c^4\,y^5\right\};$$

$= v \frac{\sqrt{(y^2 + z^2)}}{a}$; dieses Theilchens Masse $= dx \,.\, dy \,.\, dz$ und Schwungkraft $= \frac{v^2}{2g\,a^2} \sqrt{(y^2 + z^2)} \,.\, dx\, dy\, dz$.

Da diese Schwungkräfte zwar alle senkrecht gegen die Axe, aber nicht alle parallel wirkend sind, so ist es besser, sie nach Richtungen mit y und mit z parallel zu zerlegen. So erhält man für das Theilchen M den mit QP parallelen Theil der Schwungkraft $= \frac{v^2 y}{2g\,a^2} dx\, dy\, dz$, den mit PM parallelen Theil der Schwungkraft $= \frac{v^2 z}{2g\,a^2} dx\, dy\, dz$, das Moment der erstern in Beziehung auf den Punct B $= \frac{v^2}{2g\,a^2} x \,.\, y \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$; das Moment der letztern in Beziehung auf denselben Punct B,

$$= \frac{v^2}{2g\,a^2} x \,.\, z \,.\, dx\, dy\, dz.$$

Stellt also R den Mittelpunct der mit sämmtlichen QP parallelen Schwungkräfte vor, so muß $BR = \frac{\iiint x\, y\, dx\, dy\, dz}{\iiint y\, dx\, dy\, dz}$ sein; und wenn S der Mittelpunct aller mit BC oder PM parallelen Kräfte ist, $BS = \frac{\iiint x\, z\, dx\, dy\, dz}{\iiint z\, dx\, dy\, dz}$.

XI. Beispiel. Es drehe sich der Quadrant BECL (Fig. 71.) des elliptisch-parabolischen Körpers (in VII.) um die Axe EL, und es sei für irgend ein Theilchen M, $EF = x$, $FK = y$, $KM = z$, so werden die dreifachen Integrale auf folgende Art bestimmt.

Wenn alles wie in VII. ist, so haben wir wie dort die Gleichung für die Oberfläche des Körpers

$x = a - \frac{a}{b^2\, c^2} (c^2\, y^2 + b^2\, z^2)$, indem die dort mit z bezeichnete Abscisse hier x, die dort mit x bezeichnete hier z heißt; da aber nur ein Quadrant der elliptischen Durchschnitte soll betrachtet werden, so ist darauf bei den Integrationen Rücksicht zu nehmen.

Das Integral $\iiint x\, y\, dx \,.\, dy \,.\, dz$ giebt, in Beziehung auf y integrirt, $= \frac{1}{2} \iint y^2\, x\, dx \,.\, dz$, oder zwischen den Grenzen

und da dies zwischen den Grenzen $y = -b\sqrt{\frac{a-z}{a}}$

und $y = +b\sqrt{\frac{a-z}{a}}$ genommen wird

$= \frac{1}{2}\pi . b c \frac{(a-z) z d z}{a}$; welches endlich in Beziehung

auf z integrirt giebt $\frac{1}{2}\pi\frac{bc}{a}(\frac{1}{2}az^2 - \frac{1}{3}z^3)$,

oder zwischen den Grenzen $z = o$ und $z = a$,
$\frac{1}{12}\pi b c a^2$, wie vorhin.

VIII. Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Drehung um e Axen übergehn.

Da bei Ebnen, wenn die Drehungsaxe auf sie senkrecht ist, n in §. 231. die Betrachtung genügend durchgeführt ist, so l ich hier nur diejenigen Ebnen betrachten, die sich um Axen in Ebne selbst drehen, und dann Körper, die sich um feste Axen hen.

Es sei (Fig. 65.) ABCD eine Ebne von bekannter Figur und die ihrer Lage nach gegebne Umdrehungsaxe: es soll die ganze walt bestimmt werden, welche die Axe wegen der Schwungkraft r Theile der Ebne auszuhalten hat. Jedes Theilchens M Lage llen wir durch Abscissen EL = x auf der Axe selbst und Coorsaten LM = y senkrecht gegen die Axe bestimmen. Dann des Theilchens M Masse = dx . dy, seine Schwungkraft $\frac{c'^2 . dx\, dy}{2g . y}$, wenn c' die Geschwindigkeit bedeutet. Dreht sich n die Ebne so, daß eines in der Entfernung = a von der Axe zenden Theilchens Geschwindigkeit = c ist, so ist des in der tfernung = y liegenden Theilchens Geschwindigkeit = $\frac{c . y}{a}$,

d Schwungkraft = $\frac{c^2 y\, dx\, dy}{2g . a^2}$. Man findet also die Summe er Schwungkräfte für die ganze Ebne, wenn man diese Formel hörig integrirt. Da nun der ganzen Fläche Inhalt oder Masse $\int y\, dx$, und der Abstand des Schwerpuncts von der Axe der x, rch $\frac{\int dx \int y dy}{\int y dx}$ ausgedrückt wird, so erhellt, daß der ganzen Lasse = $\int y dx$ Schwungkraft, wenn die Masse im Schwerpuncte gebracht wäre, = $\frac{c^2}{2g\, a^2}(\int y dx)\left\{\frac{\int dx \int y dy}{\int y dx}\right\}$ eben so groß , als bei der Vertheilung der Masse auf alle Puncte der Ebne.

Um aber die mittlere Richtung des durch die kraft hervorgebrachten Druckes auf die Axe zu bestimmen wir überlegen, daß der kleinen in M befindlichen Masse kraft einen in L auf die Axen senkrechten Druck $= \frac{c^2}{\ldots}$ hervorbringt, dessen Moment in Beziehung auf den Auf E, also $= \frac{c^2}{2g\,a^2}\, xy\, dx\, dy$ ist. Man findet die Su Momente der Schwungkräfte aller in derselben Senkre liegenden Theilchen, wenn man $\frac{c^2}{2g\,a^2}\, xy\, dx\, dy$ in auf y integrirt und x als beständig ansieht; und die Sum Momente wird bei einer zweiten in Beziehung auf x an Integration gefunden, wenn man nach Vollendung der e tegration diesem Integrale seinen vollständigen Werth gege Diese Summe der Momente aller Schwungkräfte in auf E ist also $= \frac{c^2}{2g\,a^2}\iint x\, y\, dx\, dy$, und die gesammte S kraft $= \frac{c^2}{2g\,a^2}\iint y\, dx\, dy$ müßte auf einen Punct P für den $EP = \frac{\iint x\, y\, dx\, dy}{\iint y\, dx\, dy}$ ist, um eben das Mo heben. Der so bestimmte Punct P ist folglich derjenige welchen die mittlere Richtung aller Schwungkräfte geht.

IX. Beispiel. Es drehe sich der Kreis-Quadra (Fig. 72.) um die Axe AB; man sucht, mit welcher K Puncte A und B der Axe müssen gehalten werden, um ge Schwungkräfte Widerstand genug zu leisten.

Wenn $BL = x$, $LM = y$, und der in der Ent $= BC = a$ von der Axe liegende Punct die Geschwindigk hat, so ist des Theilchens M Schwungkraft $= \frac{c^2\, y\, .}{2g \ldots}$ und das Moment derselben in Beziehung auf B ist

$$= \frac{c^2\, x\, y\, dx\, dy}{2g\, a^2}.$$

Die Summe der Schwungkräfte aller in KL liegenden T ist also $= \frac{c^2}{2g\,a^2}\int y\, dx\, dy = \frac{c^2\, x\, .\, y dy}{2g\, a^2}$, oder von bis $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$ genommen, wenn a des Kreises

esser ist $= \frac{c^2 y dy \sqrt{(a^2 - y^2)}}{2g a^2}$; die Summe der Schwungkräfte für alle Theilchen des ganzen Quadranten

$$= \frac{c^2}{2g a^2} \int y dy \sqrt{(a^2 - y^2)} = \text{Const} - \frac{c^2}{6g a^2} (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$$

er von $y = 0$ bis $y = a$ genommen $= \frac{1}{6} \frac{c^2 a}{g}$.

ie Summe der Momente für aller in LM liegenden Theilchen chwungkräfte $= \frac{\frac{1}{2} c^2 x dx . y^2}{2g a^2}$, oder das Integral vollständig nommen, $= \frac{1}{4} \frac{c^2 xdx}{g} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, und das Moment für le Theilchen des Quadranten $= \frac{1}{4} \frac{c^2}{g} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \frac{x^4}{a^2}\right)$, welches vollständig genommen $= \frac{1}{16} \frac{a^2 c^2}{g}$ ist.

Der Punct P der Axe, durch welchen der Mittelpunct der räfte geht, liegt folglich so, daß

$$BP = \frac{\frac{1}{16} \frac{a^2 c^2}{g}}{\frac{1}{6} \frac{a c^2}{g}} = \frac{3}{8} a \text{ ist.}$$

iese Richtung geht nicht durch den Schwerpunct des Quadranten, denn dieser ist um $\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$ von dem Halbmesser BC entfernt.

Da auf diese Weise die gesammte Schwungkraft und der unct P, in welchem sie als vereinigt gedacht werden kann, gegeben ist, so läßt sich leicht finden, mit welcher Kraft die Puncte , B der Axe müßten fest gehalten werden.

X. Wenn ein Körper sich um eine feste Axe dreht, die umme aller Schwungkräfte und die mittleren Richtungen derselben zu finden.

Es sei AB (Fig. 73.) die Umdrehungsaxe, und jedes Theilchen M werde durch Abscissen auf dieser Axe $BQ = x$, durch Ordinaten $QP = y$ in einer durch die Axe gelegten Ebne, und durch dinaten $PM = z$ auf diese Ebne senkrecht bestimmt. Eines in Entfernung $= a$ liegenden Theilchens Geschwindigkeit bei der drehung sei $= v$, also des Theilchens M, welches in der Entfernung $= \sqrt{(y^2 + z^2)}$ von der Axe liegt, Geschwindigkeit

$= v\frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{a}$; dieses Theilchens Masse $= dx \,.\, dy \,.\, dz$ und Schwungkraft $= \frac{v^2}{2g\,a^2}\sqrt{(y^2+z^2)} \,.\, dx\,dy\,dz$.

Da diese Schwungkräfte zwar alle senkrecht gegen die Axe, aber nicht alle parallel wirkend sind, so ist es besser, sie nach Richtungen mit y und mit z parallel zu zerlegen. So erhält man für das Theilchen M den mit QP parallelen Theil der Schwungkraft $= \frac{v^2\,y}{2g\,a^2}\,dx\,dy\,dz$, den mit PM parallelen Theil der Schwungkraft $= \frac{v^2\,z}{2g\,a^2}\,dx\,dy\,dz$, das Moment der erstern in Beziehung auf den Punct B $= \frac{v^2}{2g\,a^2}\,x \,.\, y \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$; das Moment der letztern in Beziehung auf denselben Punct B,

$$= \frac{v^2}{2g\,a^2}\,x \,.\, z \,.\, dx\,dy\,dz.$$

Stellt also R den Mittelpunct der mit sämmtlichen QP parallelen Schwungkräfte vor, so muß $BR = \frac{\iiint x\,y\,dx\,dy\,dz}{\iiint y\,dx\,dy\,dz}$ sein; und wenn S der Mittelpunct aller mit BC oder PM parallelen Kräfte ist, $BS = \frac{\iiint x\,z\,dx\,dy\,dz}{\iiint z\,dx\,dy\,dz}$.

XI. Beispiel. Es drehe sich der Quadrant BECL (Fig. 71.) des elliptisch-parabolischen Körpers (in VII.) um die Axe EL, und es sei für irgend ein Theilchen M, $EF = x$, $FK = y$, $KM = z$, so werden die dreifachen Integrale auf folgende Art bestimmt.

Wenn alles wie in VII. ist, so haben wir wie dort die Gleichung für die Oberfläche des Körpers

$x = a - \frac{a}{b^2\,c^2}(c^2\,y^2 + b^2\,z^2)$, indem die dort mit z bezeichnete Absciße hier x, die dort mit x bezeichnete hier z heißt; da aber nur ein Quadrant der elliptischen Durchschnitte soll betrachtet werden, so ist darauf bei den Integrationen Rücksicht zu nehmen.

Das Integral $\iiint x\,y\,dx \,.\, dy \,.\, dz$ giebt, in Beziehung auf y integrirt, $= \frac{1}{2}\iint y^2\,x\,dx \,.\, dz$, oder zwischen den Grenzen

$y = o$ und $y = \sqrt{\left(\frac{(a-x)}{a} b^2 - \frac{b^2 z^2}{c^2}\right)}$

$$= \frac{b^2}{2} \iint \left\{ x\,dx\,.\,dz \left(\frac{a-x}{a} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right\},$$

als Werth des Momentes für das ganze parallel mit FK liegende Parallelepipedum, dessen Lage durch x und z bestimmt ist und das sich durch den ganzen Körper erstreckt. Ferner

$\frac{b^2}{2} \iint \left\{ x\,dx\,.\,dz \left(\frac{a-x}{a} - \frac{z^2}{c^2} \right) \right\}$ in Beziehung auf z integrirt $= \frac{b^2}{2} \int \left\{ x dx \left(\frac{(a-x)\,z}{a} - \frac{z^3}{3c^2} \right) \right\}$, von $z = o$ bis $z = c \sqrt{\left(\frac{a-x}{a}\right)}$ genommen, giebt

$= \frac{b^2}{2} \int \left\{ x dx \,.\, \frac{2}{3} c \,.\, \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$. Bei dieser Integration ist das Moment der ganzen Scheibe KSRF gefunden, und wenn man aufs neue integrirt, so ist $= \frac{1}{3} b^2 c \int \left\{ x dx \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$

$= -\frac{1}{3} b^2 c \left\{ \frac{2}{5} \sqrt{\frac{(a-x)^5}{a}} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{(a-x)^7}{a^3}} \right\}$ (Pasquich. S. 33. 1. Zusatz), das ist, zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$, $= \frac{4}{3.5.7} b^2 a^2 c$.

Dagegen ist $\iiint y\,dx\,dy\,dz$ in Beziehung auf eben die Grenzen $= \frac{1}{3} b^2 c \int dx \left(\frac{a-x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = (-\frac{1}{3} b^2 c \frac{\frac{2}{5}(a-x)^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$, und zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$,
$= \frac{2}{15} . b^2 c\, a$,

also $\frac{\iiint x\,y\,dx\,dy\,dz}{\iiint y\,dx\,dy\,dz} = \frac{2}{7} a$. Der Mittelpunct aller mit EB parallelen Kräfte, die aus den Schwungkräften entstehen, liegt also in der Höhe $= \frac{2}{7} a$ oberhalb E; die Summe dieser Schwungkräfte selbst aber ist $= \frac{v^2}{2g\,a^2} . \frac{2}{15} b^2 c\,.\,a = \frac{1}{15} . \frac{v^2 b^2 c}{g\,a}$, wenn nämlich die Cubic-Einheit unsrer Körpermessung zugleich als Gewichts-Einheit oder als Maaß zur Abmessung des Druckes angenommen wird.

Um für die mit EC parallelen Kräfte eben so die Bestimmungen zu erhalten, findet man folgendes:

$$\iiint x\, z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2} \iint x\, dx\, dy\, z^2;$$

$$= \tfrac{1}{2}\, c^2 \iint \left\{ x\, dx\, .\, dy\, .\left(\frac{(a-x)}{a} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right\};$$

$$= \tfrac{1}{2}\, c^2 \int \left\{ xdx\, .\left(y\, \frac{(a-x)}{a} - \tfrac{1}{3}\, \frac{y^3}{b^2} \right) \right\};$$

$$= \tfrac{1}{3}\, c^2\, b \int xdx \left(\frac{a-x}{a} \right)^{\frac{3}{2}};$$

$$= \text{Const} - \tfrac{1}{3}\, b\, c^2 \left\{ \tfrac{2}{5} \sqrt{\frac{(a-x)^5}{a}} - \tfrac{2}{7} \sqrt{\frac{(a-x)^7}{a^3}} \right\};$$

$$= \frac{4}{3\, .\, 35}\, .\, b\, c^2\, a^2.$$

Und $\iiint z\, dx\, dy\, dz = \tfrac{2}{15}\, .\, b\, c^2\, a$, also

$$\frac{\iiint x\, z\, dx\, dy\, dz}{\iiint z\, dx\, dy\, dz} = \tfrac{2}{7}\, a.$$

XII. Hier liegen also die mittleren Richtungen der sä[mmt-]
lichen Schwungkräfte in der Höhe $= \frac{2}{7}\, a$, und könnten al[s]
eine einzige Kraft vereinigt werden. Dieses ist nicht in allen [Fäl-]
len möglich. Warum es grade hier eintritt, ist leicht zu überse[hen.]
Denkt man sich die ganzen Körper in dünne Scheiben, sen[krecht]
auf die Axe zerschnitten: so wirkt jede Scheibe so auf die [Axe,]
als ob die ganze Masse der Scheibe im Schwerpuncte ver[einigt]
wäre. Liegen nun aller einzelnen Scheiben Schwerpuncte in [einer]
einzigen durch die Axe gehende Ebne, so wie es hier der Fa[ll ist,]
so ist es immer möglich, die gesammten Schwungkräfte in [eine]
einzige Mittelkraft zu vereinigen, deren Richtung in ebe[n dieser]
Ebne senkrecht gegen die Axe ist. Dieses ist hingegen nicht [mög-]
lich, wenn die Schwerpuncte der einzelnen Schichten ni[cht in]
einer und derselben durch die Axe gelegten Ebne liegen. D[aß sie]
hier in einerlei Ebne liegen, kömmt daher, weil alle diese Sc[heiben]
ähnliche Ellipsen sind, deren übereinstimmende Hauptaxen p[arallel]
liegen.

trachtungen erhellt, daß die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit immer von dem Momente der Trägheit abhängt, auch wenn wir jedes Theilchen des Körpers als eine in Bewegung zu setzende Masse ansehn.

§. 249. Aufgabe. Wenn jedes Theilchen der graden, um den festen Punct G beweglichen Linie AB (Fig. 67.), mit einer, seiner Länge proportionalen Masse beschwert ist, das Moment der Trägheit der ganzen Linie in Beziehung auf eine gegen sie senkrechte Axe zu finden.

Auflösung. Es sei AG = a, GB = b, also a + b die Länge der ganzen Linie: so ist, wenn ich jedes Theilchens Masse durch seine Länge ausdrücke, der ganzen Linie Trägheitsmoment in Beziehung auf den Drehungspunct G

$$= \frac{1}{3}(a^3 + b^3).$$

Beweis. Es sei die ganze Länge = b in n gleiche Theile getheilt: so ist des zunächst an G liegenden ersten Theiles Masse $= \frac{1}{n}b$, und Trägheitsmoment größer als 0, aber als $\frac{1}{n}b \cdot (\frac{1}{n}b)^2$;
des zweiten Theilchen Trägheitsmoment

$$> \frac{1}{n}b \cdot (\frac{1}{n}b)^2 \text{ und } < \frac{1}{n}b \cdot \left(\frac{2}{n}b\right),$$

des dritten Theilchens Trägheitsmoment

$$> \frac{1}{n}b \cdot \left(\frac{2}{n}b\right)^2 \text{ und } < \frac{1}{n}b \cdot \left(\frac{3}{n}b\right)^2 \text{ u. s. w.;}$$

nämlich allemal größer als das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung des am nächsten gegen G zu liegenden Punctes derselben, und kleiner als das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung des am weitesten von G entfernten Punctes derselben.

Offenbar ist also des ganzen Theiles GB = b Trägheitsmoment größer als

$$\frac{1}{n^3} b^3 (1 + 4 + 9 + 16 + + + (n-1)^2)$$

und kleiner als $\frac{1}{n^3} b^3 (1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2)$.

Abstand vom Centro $= r$ ist, die Winkelgeschwindigkeit §. 230. $= \frac{v}{r} = \frac{2g}{r} \cdot \frac{P}{M} \cdot t$ der Zeit proportional. Nennt man den ganzen Winkel, um welchen die Masse M in der Zeit $= t$ fortgerückt ist $= \sigma$, so ist $\sigma = \frac{g}{r} \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2$, wenn der Körper die Entfernung $= r$ vom Mittelpuncte C hat; denn des Körpers ganzer Weg wäre $= g \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2$, also der Winkel $= \sigma = \frac{g}{r} \cdot \frac{P}{M} \cdot t^2$.

§. 242. Bemerkung. Wenn die bewegende Kraft nicht auf die Masse M unmittelbar wirkt, sondern (Fig. 74.) in der Entfernung CN $= \varrho$ vom Mittelpuncte C senkrecht auf CN angebracht ist, statt daß die Masse M sich in der Entfernung CM $= \varrho$ vom Mittelpuncte befindet: so wird (Statik. §. 88.) eine solche in N angebrachte Kraft $= Q$ eben das bewirken, was eine Kraft $= \frac{Q \cdot \varrho}{r}$ in M angebracht bewirken würde, und folglich bringt jene Kraft Q, indem sie die Zeit $= t$ durch wirket, eine wahre Geschwindigkeit $= 2g \cdot \frac{Q \cdot \varrho \cdot t}{r \cdot M}$, oder eine Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g \cdot \varrho \cdot Q \cdot t}{r^2 \cdot M}$ hervor.

Eben die Kraft hätte also einer Masse $= M'$ in der Entfernung $= r'$ vom Mittelpuncte, die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g \cdot \varrho \cdot Q \cdot t}{r'^2 \cdot M'}$ ertheilt, wenn sie diese Masse allein in Bewegung setzen sollte.

§. 243. Es ist nun zwar einleuchtend, daß eine Kraft $= 2Q$ jene beiden Massen M, M' zugleich in Bewegung setzen, und beiden die eben gefundenen Winkelgeschwindigkeiten ertheilen könnte; aber wenn M, M' unter sich fest verbunden sind, so können sie diese Bewegungen nur dann zu gleicher Zeit annehmen, wenn die Win-

·lgeschwindigkeiten beider gleich sind, also wenn in un·rn Formeln $r^2 . M = r'^2 . M'$ ist. In jedem andern ·alle müßte die eine der Massen, um mit der andern in ·leichem Maaße fortzugehen, eine größere oder kleinere ·eschwindigkeit annehmen, als sie für sich allein erlangt ·ätte, und folglich würde nicht genau die Hälfte der Kraft Q zu Bewegung der einen und die Hälfte derselben ·raft zu Bewegung der andern Masse verwandt wer·en.

§. 244. Lehrsatz. Wenn eine bewegende Kraft = Q, die in N senkrecht auf den um C beweglichen He·elarm CN wirkt, die an dem Hebelarm in den Entfer·ungen r, r' befestigten Massen M und M' mit dem gan·n Hebelarme (der hier als ohne Masse gedacht wird,) ı Bewegung setzen soll: so wird die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit beider Massen $= \frac{2g . \varrho . t . Q}{r^2 M + r'^2 M'}$, ·enn die Kraft = Q in der Entfernung = ϱ vom Dre·ungspuncte angebracht ist.

Beweis. Wir wollen uns die Kraft = Q in zwei Theile = q und = Q − q zerlegt denken, deren erster ·anz verwandt wird, um die Masse = M, der zweite ·m die Masse = M' in Bewegung zu setzen: so erhält §. 242.) die erstere Masse die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g . \varrho . q . t}{r^2 M}$, die zweite Masse die Winkelgeschwindig·eit $= \frac{2g . \varrho . (Q - q) . t}{r'^2 . M'}$.

Da beide Massen fest verbunden sind, so müssen ihre Winkelgeschwindigkeiten gleich, folglich

$$\frac{q}{r^2 M} = \frac{Q - q}{r'^2 M'} \text{ sein, oder}$$

$$\frac{q}{r^2 M} + \frac{q}{r'^2 M'} = \frac{Q}{r'^2 M'},$$

·as ist $q = \frac{Q . r^2 M}{r^2 M + r'^2 M'}$, und die gleiche Geschwin·

digkeit beider Massen wird

$$= \frac{2g \cdot \rho \cdot t \cdot Q}{r^2 M + r'^2 M'}.$$

§. 245. Die bewegende Kraft = Q wird also unter die in Bewegung zu setzenden Massen nicht nach Verhältniß der Massen, sondern so ausgetheilt, daß $q : Q - q = r^2 M : r'^2 M'$ ist, also so, daß die Theile der Kraft sich wie die Producte aus den Massen in die Quadrate der Entfernungen derselben vom Drehungspuncte verhalten.

Hierin liegt eine merkwürdige Abweichung der Gesetze der Drehungsbewegung von dem, was wir bei der fortrückenden, gradlinigten Bewegung gesehen haben. Wirkt eine Kraft = Q, um eine Masse = M in gradlinigte Bewegung zu setzen, und ertheilt sie dieser Masse in bestimmter Zeit t die Geschwindigkeit = u; so würde eben die Kraft, eben die Zeit durch, auf die Masse M + N wirkend, dieser die Geschwindigkeit $v = \frac{u \cdot M}{M + N}$ ertheilen; oder die Kraft Q theilt sich auf die Massen M und N ihnen proportional so aus, daß der ersteren der Theil $= \frac{M \cdot Q}{M + N}$, der anderen der Theil $= \frac{N \cdot Q}{M + N}$ der Kraft zufällt. Wirkten nämlich diese Kräfte einzeln auf die Massen; so ertheilten sie ihnen in der Zeit = t die Geschwindigkeiten $v = \frac{2gt \cdot \frac{M \cdot Q}{M + N}}{M} = \frac{2gt \cdot \frac{N \cdot Q}{M + N}}{N}$, statt daß die Kraft = Q der einzigen Masse = M die Geschwindigkeit $= u = 2gt \cdot \frac{Q}{M}$ ertheilen würde, und es ist $v = \frac{u \cdot M}{M + N}$. Soll dagegen die Kraft Q eine Drehung bewirken und dabei die in ungleichen Entfernungen r und r′ vom Mittelpuncte der Drehung liegenden Massen M und M′ in Bewegung setzen, so theilt sich Q nicht in

Theile den Massen proportional unter diese aus, sondern die Theile q und Q — q sind den Producten r^2 M und r'^2 M' proportional. Dieses rührt, wie aus §. 245. erhellt, daher, weil die in der Entfernung = ϱ angebrachte Kraft = Q: theils schon, vermöge der Gleichheit der statischen Momente, stärker wirkt auf die dem Centro nähere Masse und theils auch diese einer minderen wahren Geschwindigkeit bedarf, um eben die Winkelgeschwindigkeit zu erhalten, die der entferntern Masse ertheilt wird. Wegen dieser doppelten Einwirkung des größern oder kleinern Abstandes vom Centro theilt sich die Kraft so aus, wie es das Verhältniß des Productes aus M in r^2 zu dem Producte aus M' in r'^2 fordert.

§. 246. Erklärung. Unter dem Momente der Trägheit einer Masse versteht man dieses Product der Masse in das Quadrat ihres Abstandes vom Drehungspuncte.

§. 247. Es kann von einem Momente der Trägheit nur bei Drehungsbewegung um eine Axe die Rede sein, indem nur bei der Umdrehung, jede Masse nicht im Verhältnisse der Masse allein, der bewegenden Kraft widersteht, sondern im Verhältnisse ihres Momentes der Trägheit. Um ganz strenge zu reden (da ein Product aus der Masse in das Quadrat des Abstandes ein unpassender Ausdruck ist), verhält sich dieses Moment der Trägheit mehrerer in Drehungsbewegung zu setzender Massen direct wie die Massen und direct wie die Quadrate der Abstände von der Axe der Umdrehung.

§. 248. Lehrsatz. Ein fester Körper, den wir bloß in den Puncten M, M', M'' als mit Massen = M, = M', = M'' belastet ansehen, werde in einem Puncte Q von einer bewegenden Kraft = Q zur Bewegung um die festgehaltene Axe AB angetrieben (Fig. 75.). Die Richtung der Kraft sei senkrecht gegen das von Q auf die Axe AB gezogne Perpendikel PQ und in einer auf die Axe senkrechten Ebne; dann wird jede der fest verbunde-

nen Massen M, M′, M″ durch eine bewegende Kraft, die ihrem Momente der Trägheit proportional ist, zur Bewegung angetrieben.

Beweis. Von den Puncten M, M′, M″, in welchen sich die Massen befinden, ziehe man Senkrechte MN, M′N′, M″N″ gegen die unbewegliche Axe, so ist, wenn MN = r, M′N′ = r′, M″N″ = r″, das Moment der Trägheit der drei Massen durch $r^2 M$, $r'^2 M'$, $r''^2 M''$ ausgedrückt. Nenne ich nun die aus der Austheilung der Kraft Q auf jede der Massen kommenden bewegenden Kräfte = q, = q′, = q″, wo offenbar die letzte = Q — q — q′ ist, so ist, wenn PQ = ρ, die Winkelgeschwindigkeit (§. 242.) der drei Massen

$$= \frac{2g \cdot q \cdot \rho \cdot t}{r^2 . M},$$

$$= \frac{2g \cdot q' \cdot \rho \cdot t}{r'^2 M'},$$

$$= \frac{2g (Q - q - q') \rho \cdot t}{r''^2 M''}.$$

Diese müssen gleich sein, da der ganze Körper sich als feste Masse dreht, also

$$\frac{q}{r^2 M} = \frac{q'}{r'^2 M'} = \frac{Q - q - q'}{r''^2 M''},$$

$$\text{das ist } \frac{q}{r^2 M} = \frac{Q - q - q \cdot \frac{r'^2 M'}{r^2 M}}{r''^2 M''},$$

$$\text{also } q (r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M'') = Q \cdot r^2 M,$$

$$\text{oder } q = \frac{Q \cdot r^2 M}{r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M''},$$

$$\text{und eben so } q' = \frac{Q \cdot r'^2 M'}{r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M''},$$

$$q'' = \frac{Q \cdot r''^2 M''}{r^2 M + r'^2 M' + r''^2 M''},$$

also die bewegenden Kräfte, die zur Beschleunigung der einzelnen Massen verwandt werden, den Momenten der Trägheit dieser Massen proportional. Aus diesen Be-

trachtungen erhellt, daß die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit immer von dem Momente der Trägheit abhängt, auch wenn wir jedes Theilchen des Körpers als eine in Bewegung zu setzende Masse ansehn.

§. 249. Aufgabe. Wenn jedes Theilchen der graden, um den festen Punct G beweglichen Linie AB (Fig. 67.), mit einer, seiner Länge proportionalen Masse beschwert ist, das Moment der Trägheit der ganzen Linie in Beziehung auf eine gegen sie senkrechte Axe zu finden.

Auflösung. Es sei AG = a, GB = b, also a + b die Länge der ganzen Linie: so ist, wenn ich jedes Theilchens Masse durch seine Länge ausdrücke, der ganzen Linie Trägheitsmoment in Beziehung auf den Drehungspunct G

$$= \frac{1}{3}(a^3 + b^3).$$

Beweis. Es sei die ganze Länge = b in n gleiche Theile getheilt: so ist des zunächst an G liegenden ersten Theiles Masse $= \frac{1}{n} b$, und Trägheitsmoment größer als 0, aber als $\frac{1}{n} b \cdot (\frac{1}{n} b)^2$;
des zweiten Theilchen Trägheitsmoment

$$> \frac{1}{n} b \cdot (\frac{1}{n} b)^2 \text{ und } < \frac{1}{n} b \cdot \left(\frac{2}{n} b\right),$$

des dritten Theilchens Trägheitsmoment

$$> \frac{1}{n} b \cdot \left(\frac{2}{n} b\right)^2 \text{ und } < \frac{1}{n} b \cdot \left(\frac{3}{n} b\right)^2 \text{ u. s. w.;}$$

nämlich allemal größer als das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung des am nächsten gegen G zu liegenden Punctes derselben, und kleiner als das Product aus der Masse in das Quadrat der Entfernung des am weitesten von G entfernten Punctes derselben.

Offenbar ist also des ganzen Theiles GB = b Trägheitsmoment größer als

$$\frac{1}{n^3} b^3 (1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2)$$

und kleiner als $\frac{1}{n^3} b^3 (1+4+9+16+\ldots\ldots+n^2)$.

$$> b^3 \left\{ \tfrac{1}{3} \frac{\ldots}{n^3} + \tfrac{1}{2} \frac{\ldots}{n^3} + \tfrac{1}{6} \ldots \right.$$

$$\text{und} < b^3 \left\{ \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\},$$

$$\text{oder} > b^3 \left\{ \tfrac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\},$$

$$< b^3 \left\{ \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\}.$$

Diese Grenzen gelten immer, wie groß ma[n] oder die Anzahl der Theile nehme, und da beid[e] sich dem Werthe $= \frac{1}{3} b^3$ immer mehr und so [...] will nähern, so ist $\frac{1}{3} b^3$ der wahre Werth des [...] der Trägheit, weil man eigentlich die angen[...] Theilchen bis ins Unendliche verkleinern sollte.

Eben so findet man für den andern Theil = [...] nie, das Moment der Trägheit $= \frac{1}{3} a^3$, u[nd] kömmt zu jenem hinzu, weil die bewegende [...] hervorzubringender Bewegung sowohl die eine [...] andre Masse in Bewegung setzen muß.

§. 250. Daß aber allemal die Summe [...] drate aller natürlichen Zahlen bis zur Zahl n [...] drückt wird, daß

sie muß aber für $n = r + 1$ gelten, wenn sie für $n = r$ gilt, weil

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + r^2 + (r+1)^2$$
$$= \tfrac{1}{3}(r+1)^3 + \tfrac{1}{2}(r+1)^2 + \tfrac{1}{6}(r+1)$$

ist, wenn

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + r^2 = \tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{6}r$$

war. Es ist nämlich, wenn man gehörig entwickelt,

$$\tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{1}{2}r^2 + \tfrac{1}{6}r + (r+1)^2 = \tfrac{1}{3}r^3 + \tfrac{3}{2}r^2 + \tfrac{13}{6}r + 1$$
$$= \tfrac{1}{3}(r+1)^3 + \tfrac{1}{2}(r+1)^2 + \tfrac{1}{6}(r+1),$$

und die Regel ist folglich für $n = 3$ richtig, wenn sie für $n = 2$ richtig war u. s. w. (*)

§. 251. Wäre die in §. 249. betrachtete Linie in ihrem Schwerpuncte unterstützt, so wäre das Moment der Trägheit $= \frac{2}{3}a^3$, oder weil ihre ganze Länge $= 2a$ wäre, $= \frac{1}{12}(2a)^3 = \frac{1}{6}M(2a)^2$; wenn ihre ganze Masse $= M = 2a$ ist.

§. 252. Alles dieses gilt in Beziehung auf eine Drehung um eine auf die Richtung der Linie selbst senkrechte Axe. Sollte die Linie AB (Fig. 67.) sich um eine durch G gehende, aber gegen diese Linie unter einem Winkel $= \eta$ geneigte Axe drehen: so hätte man jede kleine Masse $M = \frac{1}{n}b$ mit dem Quadrate des senkrechten Abstandes von der Axe $= \frac{r}{n}b.\text{Sin}\,\eta$ multipliciren müssen, wenn der Masse Abstand von G, $= GM = \frac{rb}{n}$ war. Hieraus erhellt schon, daß das Moment der Trägheit am größten wird, für die auf AB senkrechte Axe, offenbar deswegen, weil bei gleicher Winkelgeschwindigkeit die sämmtlichen Theile der Linie die größten Geschwindigkeiten erhalten, wenn sie möglichst weit von der Axe entfernt sind, oder wenn AB auf diese Axe senkrecht ist.

(*) Ein ähnlicher Beweis hätte sich auch in der Statik. §. 200. gebrauchen lassen.

§. 252*. Aufgabe. Ein Dreieck ABC (Fig. 76.) von gegebner Gestalt, dreht sich um eine, der Seite AC parallele Axe DE; man sucht das Moment der Trägheit in Beziehung auf diese Axe.

Auflösung. Es sei der Abstand der Axe DE von der Seite AC, $= f$; die ganze Höhe des Dreiecks $= BH = h$, die Grundlinie $AC = b$: so ist das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks

$$= \frac{1}{12} \frac{b}{h} ((h-f)^4 + f^4) - \frac{1}{3} b f^3.$$

Beweis. Denkt man sich die senkrechte Entfernung BK der Spitze von der Axe in n gleiche Theile getheilt, die also jeder $= \frac{1}{n}(h-f)$ sind, und läßt IM einen derselben vorstellen, der der $(m+1)$te heißen mag: so ist $MK = \frac{m}{n}(h-f)$ und $IK = \frac{m+1}{n}(h-f)$. Die durch diese Theilungspuncte gezogenen, der Axe parallelen Linien sind also $LN = \frac{b.(h-f-\frac{m}{n}(h-f))}{h}$

$$= \frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-m}{n}\right)$$

und $FG = \frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)$.

Des Streifchens FGNL Inhalt ist also kleiner als

$\frac{1}{n}(h-f).\frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-m}{n}\right)$ u. zugleich größer als

$\frac{1}{n}(h-f).\frac{b}{h}(h-f)\left(\frac{n-(m+1)}{n}\right)$. Das Moment der Trägheit ist also, wenn man den Inhalt einmal in das Quadrat der zu großen Entfernung $= \frac{m+1}{n}(h-f)$, das andre Mal in das Quadrat der zu kleinen Entfernung

$= \frac{m}{n}(h-f)$ multiplicirt,

größer als $\frac{1}{n^4}(h-f)^4 \frac{b}{h} \cdot m^2 (n-m-1)$,

und kleiner als $\frac{1}{n^4}(h-f)^4 \frac{b}{h}(m+1)^2 (n-m)$.

Es erhellt nun wohl, daß das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks BDE gefunden wird, wenn man nach und nach für m alle Zahlen von 0 bis n − 1 setzt, und daß also dieses Dreiecks Trägheitsmoment

$$> \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \{ 0 \cdot (n-1) + 1^2 \cdot (n-2) + 2^2 \cdot (n-3) + \ldots + (n-2)^2 (n-(n-1)) + (n-1)^2 (n-n) \}$$

$$\text{und} < \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \{ 1^2 \cdot n + 2^2 \cdot (n-1) + 3^2 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1)^2 (n-(n-2)) + n^2 (n-(n-1)) \}.$$

Diese Grenzen lassen sich auch so ausdrücken

$$> \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \begin{array}{l} n(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2) \\ -1^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot 3 - 3^2 \cdot 4 - \ldots - (n-1)^2 \cdot n \end{array} \right\}$$

und

$$< \frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \begin{array}{l} n(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2) \\ -1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 4^2 - \ldots - (n-1) \cdot n^2 \end{array} \right\}$$

Da wir nun schon wissen, daß (§. 250.)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{3}(n-1)^3 + \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{6}(n-1)$$

und sich leicht zeigen läßt, daß

$$1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)^2 \cdot n = \tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{6}n^3 - \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{6}n,$$

so ist die erste Grenze

$$\frac{1}{n^4}(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{3}n(n-1)^3 + \tfrac{1}{2}n(n-1)^2 + \tfrac{1}{6}n(n-1) \\ -(\tfrac{1}{4}n^4 - \tfrac{1}{6}n^3 - \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{6}n) \end{array} \right\}$$

oder

$$(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{6} - 1 + \tfrac{1}{2}) + \frac{1}{n^2}(\tfrac{1}{4} + 1 - 1 + \tfrac{1}{6}) + \frac{1}{n^3}(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}) \right\}.$$

Für die zweite Grenze haben wir, aus §. §. 250.

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6} n,$$

und es ist ferner, wie wir sogleich sehen werden

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1) n^2$$
$$= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{6} n^3 - \tfrac{1}{4} n^2 - \tfrac{1}{6} n,$$

also die zweite Grenze

$$(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{5}{12} \cdot \frac{1}{n^2} + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} \right\}.$$

Das Moment der Trägheit des Stückes BDE ist also

$$= \tfrac{1}{12} \cdot \frac{b}{h} (h-f)^4,$$

weil es, wie groß man auch n nehme, zwischen den Grenzen

$$(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \tfrac{1}{12} - \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \right\}$$

und

$$(h-f)^4 \cdot \frac{b}{h} \left\{ \tfrac{1}{12} + \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} \right\}$$

liegt.

Zerlegt man auf eben die Art KH in n gleiche Theile, so ist, wenn $Km = \frac{m}{n} f$, $Ki = \frac{(m+1)}{n} f$ ist,

$$ln = \frac{b \cdot (h - f + \frac{m}{n} f)}{h};$$

$$fg = \frac{b}{h}\left(h - f + \frac{m+1}{n} f\right),$$

also

$$lngf > \frac{b}{h} \cdot \tfrac{1}{n} f \cdot \left\{ h - \left(\frac{n-m}{n}\right) f \right\};$$
$$< \frac{b}{h} \cdot \tfrac{1}{n} f \left(h - \frac{n-(m+1)}{n} f \right);$$

und das Moment der Trägheit dieses kleinen Trapezes

$$> \frac{m^2}{n^2} f^2 \cdot \frac{b}{h} \cdot \tfrac{1}{n} f \left(h - \frac{n-m}{n} f \right),$$

und

$$< \frac{(m+1)^2}{n^2} f^2 \cdot \frac{b}{h} \cdot \tfrac{1}{n} f \left(h - \frac{n-(m+1)}{n} f \right);$$

das ist $> f^3 . b . \frac{m^2}{n^3} - \frac{b\, f^4}{h} . \frac{m^2(n-m)}{n^4}$;

und $< f^3 . b . \frac{(m+1)^2}{n^3} - \frac{b\, f^4}{h} . \frac{(m+1)^2(n-m-1)}{n^4}$.

Das Trägheitsmoment des ganzen diesseits der Axe liegenden Stückes ist also, da man nach und nach für m alle Werthe von o bis n — 1 setzen muß, größer als

$$\left\{\begin{array}{l} b\, f^3 . \frac{1}{n^3} (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2) \\ - \frac{b\, f^4}{h} . \frac{1}{n^3} (0 + 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2) \\ + \frac{b\, f^4}{h} . \frac{1}{n^4} (0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3) \end{array}\right\};$$

und kleiner als

$$\left\{\begin{array}{l} b\, f^3 . \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2) \\ - \frac{b\, f^4}{h} . \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2) \\ + \frac{b\, f^4}{h} . \frac{1}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3) \end{array}\right\},$$

das ist

$$> \left(\frac{f^3 b}{n^3} - \frac{f^4 b}{h . n^3}\right)\left(\tfrac{1}{3}(n-1)^3 + \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{6}(n-1)\right)$$
$$+ \frac{f^4 b}{h . n^4}\left(\tfrac{1}{4}(n-1)^4 + \tfrac{1}{2}(n-1)^3 + \tfrac{1}{4}(n-1)^2\right);$$

und
$$< \left(\frac{f^3 b}{n^3} - \frac{f^4 b}{h . n^3}\right)\left(\tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6} n\right)$$
$$+ \frac{f^4 b}{h . n^4}\left(\tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{2} n^3 + \tfrac{1}{4} n^2\right).$$

Diese Grenzen nähern sich dem Werthe $= \frac{1}{3}\, b\, f^3 - \frac{1}{12} \frac{b}{h} f^4$, je mehr und mehr, je größer man n nimmt und folglich ist dieses der Ausdruck für das Moment der Trägheit des untern Trapezes. Daher ist das gesammte

Auflösung. Wenn des Cylinders Länge = a und Halbmesser = r ist, so findet sich aus §. 261. leicht sein Moment der Trägheit = $\frac{1}{2} a \pi . r^4 = \frac{1}{2} r^2 M$, wenn des Cylinders Masse = M heißt.

§. 264. Lehrsatz. Wenn das Moment der Trägheit irgend eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe gegeben ist: so findet man das Moment der Trägheit in Beziehung auf jede Axe, die mit jener gegebenen parallel ist, wenn man zu jenem Momente der Trägheit noch das Product aus der Masse in das Quadrat des Abstandes beider Axen von einander addirt.

Beweis. Ich will den Beweis hier nur auf eine ebne Figur beschränken, obgleich er sich auch für Körper führen läßt. Es sei also AB (Fig. 80.) die Figur, deren Masse = M, deren Schwerpunct G ist; DE sei eine durch den Schwerpunct gehende Axe, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit gegeben = $M . K^2$ ist. Zieht man nun eine andre Axe FH in der Entfernung = f mit jener parallel: so läßt sich leicht für jedes einzelne Theilchen die Aenderung des Moments der Trägheit finden. Ist nämlich IK ein durch Parallellinien zu den Axen begrenzter Streif, dessen Masse = N, Abstand von der Axe DE = x, also Abstand von der Axe FH, = x + f, so ist sein Moment der Trägheit in Beziehung auf DE, = Nx^2, in Beziehung auf FG, = $N(x + f)^2$. Aber jedem Streifchen IK an der einen Seite des Schwerpuncts entspricht ein Streifchen LM an der andern Seite, dessen statisches Moment dem statischen Momente des IK gleich ist. Hat also dieses andre Streifchen LM die Masse = N′ und den Abstand = x′ von der Axe DE, so ist = $N . x = N' . x'$, und des letzteren Moment der Trägheit, in Beziehung auf die Axe DE ist = $N' . x'^2$, in Beziehung auf die Axe FG ist es = $N'(x' - f)^2$. Hieraus ergiebt sich die Summe der Momente der Trägheit beider Streifchen, die sich das Gleichgewicht in Beziehung auf die durch den Schwer-

denn sie ist

$$= (2-1) \cdot 2^2 + (3-1) \cdot 3^2 + (4-1) \cdot 4^2 + \ldots$$
$$\ldots + (n-1) \cdot n^2$$
$$= 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots n^3 - (2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2)$$
$$= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{2} n^3 + \tfrac{1}{4} n^2 - 1 - (\tfrac{1}{3} n^3 + \tfrac{1}{2} n^2 + \tfrac{1}{6} n - 1)$$
$$= \tfrac{1}{4} n^4 + \tfrac{1}{6} n^3 - \tfrac{1}{4} n^2 - \tfrac{1}{6} n.$$

§. 254. Nenne ich das gesammte §. 252. gefundene Moment der Trägheit $= I$, so ist

$$I = \tfrac{1}{12} ((h-f)^4 - f^4) \frac{b}{h} + \tfrac{1}{3} b f^3,$$
$$= \tfrac{1}{12} b h^3 - \tfrac{1}{3} b f h^2 + \tfrac{1}{2} h b f^2,$$
$$= \tfrac{1}{12} b h (h^2 - 4 h f + 6 f^2).$$

Wollte man f durch I ausdrücken, so wäre

$$f^2 - \tfrac{4}{6} h f + \frac{h^2}{6} = \frac{2 I}{b h},$$

$$(f - \tfrac{1}{3} h)^2 = \frac{2 I}{b h} - \tfrac{1}{18} h^2,$$

$$\text{oder } f = \tfrac{1}{3} h \pm \sqrt{\left\{ \frac{2 I}{b h} - \tfrac{1}{18} h^2 \right\}}.$$

Dieser Werth wird unmöglich, wenn $I < \tfrac{1}{36} b h^3$ ird; also kann, wenn man die der Grundlinie parallele re in verschiedenen Entfernungen von der Grundlinie nimmt, das Moment der Trägheit nie kleiner sein, als $\tfrac{1}{36} b h^3$, und diesen Werth hat es dann, wenn $f = \tfrac{1}{3} h$, oder die Are, in Beziehung auf welche das Moment r Trägheit gesucht wird, durch den Schwerpunct geht, $f = \tfrac{1}{3} h$ ist.

§. 255. Dieses hier an einem einzelnen Beispiele ichgewiesene Resultat ist allgemein wahr; nämlich: nkt man sich in irgend einem Körper mehrere unter einider parallele Umdrehungsaxen, so ist das Moment der ägheit am kleinsten in Beziehung auf diejenige dieser ren, welche durch den Schwerpunct geht.

§. 256. Bemerkung. Obgleich aber das eben fundene Moment der Trägheit für die durch den Schwerinct gehende Are kleiner als für jede mit dieser Are pa-

rallele Axe ist: so ist es doch nicht das allerkleinste, das für irgend eine Axe Statt findet. Wie die Axe liegt, für welche das Moment der Trägheit am kleinsten wird, das würden wir hier ohne höchst weitläuftige Rechnungen nicht finden können; ich will daher hier bloß bemerken, daß es für jede ebne Figur eine durch den Schwerpunct gehende in der Ebne der Figur liegende Axe giebt, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit am allerkleinsten ist, und eine auf jene senkrechte, gleichfalls in der Ebne der Figur liegende und durch den Schwerpunct gehende Axe, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit größer ist, als für jede andre durch den Schwerpunct gehende und in der Ebne der Figur liegende Axe.

§. 257. Erklärung. Diese beiden Axen, und die durch den Schwerpunct gehende auf die Ebne der Figur senkrechte Axe, heißen die drei Haupt-Axen, weil die Figur sich um jede derselben frei drehen kann, ohne daß die Axe durch eine fremde Kraft gehalten zu werden braucht.

§. 258. Die Schwungkräfte nämlich, die bei der Bewegung um diese Axen entstehen, heben sich so einander auf, daß die Axe nach keiner Seite hin einen Druck leidet und folglich ganz in Ruhe bleibt, wenn sonst keine Kräfte auf den Körper wirken. Eben so, wie ich es hier nur von ebnen Figuren erwähnt habe, hat jeder Körper drei durch seinen Schwerpunct gehende, auf einander senkrechte Hauptaxen, deren Bestimmung, wenn man die Bewegung eines Körpers untersuchen will, von der größten Wichtigkeit ist.

§. 259. Da diese Bestimmungen, wenn man sie ohne Differentialrechnung ausführen will, zu höchst verwickelten Rechnungen führen: so mögen hier nur einige von ebnen Figuren hergenommene Beispiele stehen.

Aus §. 252. erhellt, wenn man dort $f = o$ setzt, daß eines Dreiecks, welches sich um seine Grundlinie als Axe dreht, Moment der Trägheit $= \frac{1}{12} bh^3, = \frac{1}{6} Mh^2$

;, wenn b die Grundlinie, h die Höhe, M den nhalt bedeutet. Stellt also ABC (Fig. 77.) ein gleichschenklichtes Dreieck vor, wo AD = DC = a, D = n . a: so ist in Beziehung auf die Axe BD das Moment der Trägheit des Dreieckes BDA = $\frac{1}{12}$. n . a⁴, so des ganzen Dreiecks = $\frac{1}{6}$ n a⁴. Das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct, parallel mit AC gezogne Axe EF, ist nach §. 254 = $\frac{1}{18}$. 2 a⁴ . n³ = $\frac{1}{18}$ n³ . a⁴. Diese beiden Momente der Trägheit werden nur dann gleich, wenn $\frac{1}{18}$ n³ = $\frac{1}{6}$ n, oder n² = 3, n = $\sqrt{3}$ ist. Dieser Fall tritt ein beim gleichseitigen Dreiecke, wo AB = 2a, BD = a . $\sqrt{3}$; und hier sind nun die Momente der Trägheit gleich groß in Beziehung auf alle durch den Schwerpunct gehende und in der Ebne der Figur liegende Umdrehungsaxen. Hingegen, wenn das Dreieck eine größere Höhe als = a $\sqrt{3}$ hat, so ist für alle in der Ebne des Dreiecks liegende Axen das Moment der Trägheit am kleinsten für die BD, und es giebt zweitens keine durch den Schwerpunct gehende und in der Ebne der Figur liegende Axe, für welche es größer als für die EF wäre.

Für n = 3 zum Beispiel ist jenes kleinste Moment der Trägheit = $\frac{1}{2}$ a⁴, für die Axe BD, und das größte = $\frac{3}{2}$ a⁴ für die Axe EF. Für eine nicht durch den Schwerpunct gehende Axe, wie AC würde es freilich noch größer sein können, denn z. B. für die Axe AC ist es = $\frac{9}{2}$ a⁴.

Für die durch den Schwerpunct gehende, auf die Ebne senkrechte Axe ist das Moment der Trägheit = 2 . a⁴, gleich der Summe der beiden, welche sich auf die Axen BD und EF bezogen. Da dieses Dreiecks Inhalt oder Masse M = 3 a² ist, so ist das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende, gegen die Ebne senkrechte Axe = $\frac{1}{36}$ M (AB² + BC² + AC²), weil AB² + BC² + AC² = 24 a² ist.

Diese Formel, die hier nur als zufällig erscheint, gilt für das Moment der Trägheit aller Dreiecke in Beziehung

auf eine durch den Schwerpunct senkrecht auf die Ebne gesetzte Axe.

§. 260. Bei diesem Beispiele läßt sich leicht übersehen, daß jene drei Axen freie Axen oder solche sind, um welche eine Drehung Statt findet, ohne daß die Axe braucht fest gehalten zu werden; aber wo das auch nicht so leicht erhellt, gilt es dennoch gleichfalls.

Wäre z. B. (Fig. 78.) AB = AD = DC und bei A ein rechter Winkel, so liegt bekanntlich der Schwerpunct des Dreiecks ABC in BD und zwar so, daß DG = $\frac{1}{3}$ BD. Die Rechnung zeigt, daß hier die Lage der beiden in der Ebne des Dreiecks liegenden Hauptaxen gegen BD durch die Neigungswinkel BGH = η und BGF = 90° + η so bestimmt werden, daß tang 2η = $\frac{3}{2}$ = 1,5 ist. Zeichnet man also BGH = 28°. 9'. 18" und BGF = 118° 9' 18", so sind FE und HI die Axen, welche das größte und das kleinste Moment der Trägheit geben.

Für die eine nämlich ist es = $\frac{1}{18}$ AD^4.(5 − $\sqrt{13}$),
für die andre = $\frac{1}{18}$ AD^4.(5 + $\sqrt{13}$).

Das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine gegen die Ebne senkrechte durch den Schwerpunct gehende Axe ist gleich der Summe jener = $\frac{5}{9}$ AD^4 = $\frac{1}{18}$ M (AB^2 + AC^2 + BC^2) = $\frac{1}{18}$ AB^2. 10 . AB^2.

§. 261. Aufgabe. Eine Kreisfläche (Fig. 79.) dreht sich um eine durch den Mittelpunct gehende und gegen die Ebne des Kreises senkrechte Axe; das Moment der Trägheit dieser Masse, die als homogen angesehen wird, zu bestimmen.

Auflösung. Das Moment der Trägheit ist = $\frac{1}{2}\pi . r^4$, wenn r der Halbmesser des Kreises ist. Es kann auch durch = $\frac{1}{2}$ M . r^2 ausgedrückt werden, wenn M des ganzen Kreises Masse ist.

Beweis. Man denke sich den Halbmesser CF in n gleiche Theile getheilt: so ist des innersten Theiles Inhalt > 0 und < $\frac{1}{n}$.r.2π.$\frac{1}{n}$r; sein Moment der Träg-

heit > 0 und $< \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi$; des nächsten Ringes Inhalt $> \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{1}{n} r$; $< \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{2}{n} r$, und sein Moment der Trägheit $> \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi$ und $< \frac{1}{n^4} r^4 . 2^3 . 2\pi$; des zweiten Ringes Inhalt $> \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{2}{n} r$ und $< \frac{1}{n} r . 2\pi . \frac{3}{n} r$; sein Moment der Trägheit $> \frac{1}{n^4} r^4 . 2^3 . 2\pi$ und $< \frac{1}{n^4} r^4 . 3^3 . 2\pi$. Es ist daher leicht zu übersehen, daß des ganzen Kreises Moment der Trägheit

$$> \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi (0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3)$$

$$\text{und} < \frac{1}{n^4} r^4 . 2\pi (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + n^3) \text{ ist.}$$

Aber wir haben §. 253. die Summen dieser Reihen kennen gelernt, und wissen daher, daß das Moment der Trägheit $> \frac{r^4}{n^4} 2\pi (\frac{1}{4} (n-1)^4 + \frac{1}{2} (n-1)^3 + \frac{1}{4} (n-1)^2)$

und $< \frac{r^4}{n^4} 2\pi (\frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2)$ ist, folglich, wenn man n sehr vergrößert, sich als $= \frac{1}{2} r^4 . \pi$ findet, oder $= \frac{1}{2} M . r^2$, da der Inhalt $= M = r^2 . \pi$ ist.

§. 262. Hieraus ergiebt sich auch leicht das Moment der Trägheit für einen Kreisring, dessen innerer Halbmesser $= \varrho$, der äußere Halbmesser $= r$ ist. Sein Moment der Trägheit ist $= \frac{1}{2} \pi (r^4 - \varrho^4)$, oder weil seine Fläche, die wir hier als die Masse ausdrückend ansehen, $= \pi (r^2 - \varrho^2) = M$ ist, das Moment der Trägheit $= \frac{1}{2} M (r^2 + \varrho^2)$.

§. 263. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe zu finden.

Auflösung. Wenn des Cylinders Länge = a und Halbmesser = r ist, so findet sich aus §. 261. leicht sein Moment der Trägheit = $\frac{1}{2} a \pi . r^4 = \frac{1}{2} r^2 M$, wenn des Cylinders Masse = M heißt.

§. 264. Lehrsatz. Wenn das Moment der Trägheit irgend eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe gegeben ist: so findet man das Moment der Trägheit in Beziehung auf jede Axe, die mit jener gegebenen parallel ist, wenn man zu jenem Momente der Trägheit noch das Product aus der Masse in das Quadrat des Abstandes beider Axen von einander addirt.

Beweis. Ich will den Beweis hier nur auf eine ebne Figur beschränken, obgleich er sich auch für Körper führen läßt. Es sei also AB (Fig. 80.) die Figur, deren Masse = M, deren Schwerpunct G ist; DE sei eine durch den Schwerpunct gehende Axe, in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit gegeben = $M . k^2$ ist. Zieht man nun eine andre Axe FH in der Entfernung = f mit jener parallel: so läßt sich leicht für jedes einzelne Theilchen die Aenderung des Moments der Trägheit finden. Ist nämlich IK ein durch Parallellinien zu den Axen begrenzter Streif, dessen Masse = N, Abstand von der Axe DE = x, also Abstand von der Axe FH, = x + f, so ist sein Moment der Trägheit in Beziehung auf DE, = Nx^2, in Beziehung auf FG, = $N(x + f)^2$. Aber jedem Streifchen IK an der einen Seite des Schwerpuncts entspricht ein Streifchen LM an der andern Seite, dessen statisches Moment dem statischen Momente des IK gleich ist. Hat also dieses andre Streifchen LM die Masse = N' und den Abstand = x' von der Axe DE, so ist = $N . x = N' . x'$, und des letzteren Moment der Trägheit, in Beziehung auf die Axe DE ist = $N' . x'^2$, in Beziehung auf die Axe FG ist es = $N'(x' - f)^2$. Hieraus ergiebt sich die Summe der Momente der Trägheit beider Streifchen, die sich das Gleichgewicht in Beziehung auf die durch den Schwer-

punct gehende Axe halten, wenn man nämlich jetzt das Moment der Trägheit in Beziehung auf die neue Axe FG sucht,

$= Nx^2 + 2N f.x + N f^2 + N'x'^2 - 2N' f x' + N'. f^2,$
$= Nx^2 + N'x'^2 + (N + N') f^2,$ weil $Nf.x - N'f.x'$ sich aufheben. Da nun $Nx^2 + N'x'^2$ das Moment der Trägheit dieser beiden Streifchen war, in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe: so zeigt sich, daß ihr Moment der Trägheit in Beziehung auf die neue, jener parallele, Axe um das Product aus der ganzen Masse der Streifchen $= N + N'$ in f^2 größer als jenes ist.

Aber eben dieses läßt sich nun für alle einzelne Streifchen beweisen, da jedem ein an der andern Seite von DE liegendes Streifchen entspricht, dessen statisches Moment eben so groß ist; das Trägheitsmoment der ganzen Masse ist also in Beziehung auf die Axe FH um $M . f^2$ größer, als in Beziehung auf die mit ihr parallele durch den Schwerpunct gehende Axe DE.

§. 265. Hier erhellt also allgemein, was wir schon oben als aus einem Beispiele gefolgert fanden, daß das Moment der Trägheit für eine durch den Schwerpunct gehende Axe immer kleiner ist als für irgend eine andre, mit dieser parallel gezogne Axe.

§. 266. Bemerkung. Der Nutzen, den diese Bestimmung des Moments der Trägheit hat, läßt sich nun wohl aus §. 248. ohne Schwierigkeit übersehen. Dort zeigte sich, daß die bewegende Kraft $= Q$, welche in der Entfernung $= \varrho$ vom Unterstützungpuncte senkrecht gegen die Abstandslinie wirkend, eine Umdrehungsbewegung hervorbringt, dem Körper eine Winkelgeschwindigkeit ertheilt, die $= \frac{2g . Q . \varrho . t}{I}$ ist, wenn I das gesammte Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der gesammten zu bewegenden Massen bedeutet, und so sind wir also im Stande, die Umdrehungsgeschwindigkeit zu be-

Dieses soll = o sein, damit I ein Größtes oder Kleinstes werde, also $\mathrm{Sin}\, 2\eta\, (\int x^2\, dx\, dy - \int y^2\, dx\, dy)$

$$= -2 \,\mathrm{Cos}\, 2\eta \int xy\, dx\, dy$$

oder $\mathrm{tang}\, 2\eta = \frac{2 \int xy\, dx\, dy}{\int y^2\, dx\, dy - \int x^2\, dx\, dy}$.

Dieses ist die allgemeine Bestimmung der Winkel η und $90° + \eta$, für die beiden gesuchten Axen.

Wir hatten

$$o = \mathrm{Sin}\, \eta\, \mathrm{Cos}\, \eta \int x^2\, dx\, dy - \mathrm{Sin}\, \eta\, \mathrm{Cos}\, \eta \int y^2\, dx\, dy + (\mathrm{Cos}^2 \eta - \mathrm{Sin}^2 \eta) \int xy\, dx\, dy.$$

Da wir nun statt des Elements der Fläche = dx . dy hier auch = du . dv setzen dürfen, und aus dem in Nr. V. gesagten, das Product

$$u . v = x^2\, \mathrm{Sin}\, \eta\, \mathrm{Cos}\, \eta - y^2\, \mathrm{Sin}\, \eta\, \mathrm{Cos}\, \eta + (\mathrm{Cos}^2 \eta - \mathrm{Sin}^2 \eta)\, xy,$$

also $\iint uv\, du\, dv = \mathrm{Sin}\, \eta\, \mathrm{Cos}\, \eta \iint x^2\, dx\, dy$

$$- \mathrm{Sin}\, \eta\, \mathrm{Cos}\, \eta \iint y^2\, dx\, dy$$

$$+ (\mathrm{Cos}^2 \eta - \mathrm{Sin}^2 \eta) \iint xy\, dx\, dy$$

ist, so erhellt, daß diejenige in der Ebne selbst liegende Axe ein Größtes oder Kleinstes für das Moment der Trägheit giebt, für welche $\iint uv\, du\, dv = o$ ist, wenn u Abscissen auf der Axe selbst und v Ordinaten senkrecht gegen die Axe sind; dieses Integral aber für die ganze Ebne, welche sich um die Axe dreht, genommen ist.

X. Diese Bemerkung, daß diejenige durch den Schwerpunct gehende, in der Ebne der Figur liegende Axe, ein Maximum oder Minimum des Momentes der Trägheit giebt, für welche $\iint uv\, du\, dv = o$ ist, hat darum eine besondere Wichtigkeit, weil daraus erhellt, daß diese Axen zugleich freie Umdrehungsaxen, oder solche sind, welche bei der Drehung der Figur um sie, von selbst ruhend bleiben, oder gar keinen Druck aushalten.

Wir haben nämlich in den Zusätzen zum 14. Abschnitt in VIII. gesehen, daß das Moment der gesammten Schwungkraft in Beziehung auf irgend einen Punct der Axe $= \frac{c^2}{2g\, a^2} \iint uv\, du\, dv$ war (wenn ich hier u statt x, v statt y setze), also hier = o wird für jene Axen, die durch den Schwerpunct gehen und ein größtes oder kleinstes Moment der Trägheit geben. Für diese haben also die gesammten Schwungkräfte in Beziehung auf irgend einen festgehaltenen Punct der Axe gar kein Moment, das ist, die Axe hat gar kein Bestreben, ihre Lage zu ändern, sondern ruhet von selbst.

ten XY = y, um irgend ein Theilchen der Ebne, seiner Lage nach zu bestimmen. Dann ist des Theilchens, dessen Seiten = dx und = dy, Inhalt = dx . dy . Sin α, Abstand von der Axe = $\sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \, Cos \, \alpha)}$, also dieses Theilchens Moment der Trägheit = $x^2 . dx . dy . Sin \, \alpha + y^2 \, dx \, dy . Sin \, \alpha$
$+ 2xy \, dx \, dy . Sin \, \alpha . Cos \, \alpha$.
Diese Formel zweimal nach einander integrirt, giebt das Moment der Trägheit der ganzen Figur.

Man hätte auch CY = z, ACY = φ nennen, und des in Y liegenden Theilchens Inhalt = z dφ . dz setzen können; dann wäre $\iint z^3 \, d\varphi . dz$ gehörig genommen das gesammte Moment der Trägheit.

IV. Es sei eines Dreiecks ABC (Fig. 82.) Moment der Trägheit in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct E gehende, gegen die Ebne der Figur senkrechte Axe zu bestimmen. — Um den Schwerpunct zu finden, ist AD so gezogen, daß BD = ½ BC = ½ a, und nun DE = ⅓ DA = ⅓ f genommen werden. Der Winkel ADB, welcher aus den gegebenen Bestimmungen für das Dreieck gleichfalls gegeben ist, sei ADB = ζ; und um die Lage irgend eines Punctes Y anzugeben, sei auf DA, EX = x und XY = y mit BC parallel. Das Moment der Trägheit des kleinen Theilchens ist also = $(x^2 + y^2 - 2xy \, Cos \, \zeta) \, dx . dy . Sin \, \zeta$. Die erste Integration, wobei x unveränderlich bleibt, giebt $(x^2 \, y \, dx + \frac{1}{3} y^3 \, dx - y^2 \, x \, dx \, Cos \, \zeta) \, Sin \, \zeta$. Wenn man das Moment der einen und der andern Hälfte jedes für sich sucht, so kommt keine Constans hinzu; aber der vollständige Werth von y ist $FX = \frac{\frac{1}{2} a . (\frac{2}{3} f + x)}{f}$; also des ganzen Streifchens XxfF Moment der Trägheit

$$= x^2 \, dx . Sin \, \zeta . \frac{\frac{1}{2} a (\frac{2}{3} f + x)}{f} + \frac{1}{3} dx \, Sin \, \zeta . \frac{\frac{1}{8} a^3 (\frac{2}{3} f + x)^3}{f^3}$$
$$- x dx . Sin \, \zeta \, Cos \, \zeta . \frac{\frac{1}{4} a^2 (\frac{2}{3} f + x)^2}{f^2};$$

und hievon ist das Integral

$$= Const + \frac{1}{9} a x^3 \, Sin \, \zeta + \frac{1}{8} \frac{a x^4}{f} Sin \, \zeta + \frac{1}{96} \frac{a^3 \, Sin \, \zeta (\frac{2}{3} f + x)^4}{f^3}$$
$$- \frac{1}{18} a^2 x^2 \, Sin \, \zeta \, Cos \, \zeta - \frac{1}{9} \frac{a^2 x^3}{f} Sin \, \zeta \, Cos \, \zeta - \frac{1}{16} \frac{x^4 a^2 \, Sin \, \zeta \, Cos \, \zeta}{f^2}.$$

Soll dieses Integral von A an oder von x = − ⅔ f angenommen werden, so ist

stimmen, wenn wir das Moment der Trägheit $= I$ zu bestimmen wissen.

§. 267. Soll z. B. dieselbe Kraft $= Q$, in derselben Entfernung $= \varrho$ wirkend, einmal eine kreisförmige Scheibe vom Halbmesser $= r$, das andre Mal die kreisförmige Scheibe vom Halbmesser $= R = 2r$, in Bewegung setzen: so nehmen beide Scheiben eine beschleunigte Umdrehungsbewegung an, wenn, wie hier angenommen wird, sich kein Hinderniß der Bewegung entgegensetzt; aber im ersten Falle ist am Ende der Zeit $= t$ (nach §. 261.), die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g \cdot Q \cdot \varrho \cdot t}{\frac{1}{2}\pi \cdot r^4}$;

im zweiten Falle $= \frac{2g \cdot Q \cdot \varrho \cdot t}{\frac{1}{2}\pi \cdot R^4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2g \cdot Q \cdot \varrho \cdot t}{\frac{1}{2}\pi \cdot r^4}$, also die Drehung der Scheibe vom doppelten Halbmesser 16mal so langsam.

Zusätze für geübtere Leser.

I. Da im Vorigen hinreichend erklärt ist, wie wir dazu kommen, der Bestimmung des Moments der Trägheit eine so große Wichtigkeit zuzugestehen: so will ich hier nur noch bei allgemeinern Regeln, um das Moment der Trägheit zu bestimmen, stehen bleiben.

II. Das Moment der Trägheit einer graden Linie AB (Fig. 67.), die sich um eine, in G auf sie senkrechte Axe dreht, ist leicht zu finden. Nenne ich nämlich $GM = x$, so ist die Masse des kleinen Theilchens in M durch $D \cdot dx$ ausgedrückt, wenn D die Dichtigkeit ist, also dieses Theilchens Moment der Trägheit $= Dx^2\,dx$, und folglich $\frac{1}{3}Dx^3$ das Moment der Trägheit für GM und $\frac{1}{3}D(a^3 + b^3)$, für die ganze Linie, wenn $GA = a$, $GB = b$ ist.

III. Eines jeden dünnen Körpers, den man fast als eine bloße ebne Figur ansehen kann, Moment der Trägheit in Beziehung auf eine gegen die Ebne dieser Figur senkrechte Axe zu finden (Fig. 81.).

C sei der Punct, wo die Axe die Ebne der Figur trifft. Man nimmt auf einer willkürlichen Axe CA, Abscissen $CX = x$, und unter einem bekannten Winkel $AXY = \alpha$ geneigt, Coordinaten.

[illegible]n $XY = y$, um irgend ein Theilchen der Ebne, seiner Lage [n]ach zu bestimmen. Dann ist des Theilchens, dessen Seiten $= dx$ und $= dy$, Inhalt $= dx \cdot dy \cdot \sin\alpha$, Abstand von der [A]re $= \sqrt{(x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{Cos}\alpha)}$, also dieses Theilchens Mo[m]ent der Trägheit $= x^2 \cdot dx \cdot dy \cdot \sin\alpha + y^2 dx\, dy \cdot \sin\alpha$

$$+ 2xy\, dx\, dy \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{Cos}\alpha.$$

[D]iese Formel zweimal nach einander integrirt, giebt das Mo[m]ent der Trägheit der ganzen Figur.

Man hätte auch $CY = z$, $ACY = \varphi$ nennen, und des in [l]iegenden Theilchens Inhalt $= z\, d\varphi \cdot dz$ setzen können; dann [h]äbe $\iint z^3\, d\varphi \cdot dz$ gehörig genommen das gesammte Moment der [T]rägheit.

IV. Es sei eines Dreiecks ABC (Fig. 82.) Moment der [T]rägheit in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct E gehende, [g]egen die Ebne der Figur senkrechte Axe zu bestimmen. — Um [d]en Schwerpunct zu finden, ist AD so gezogen, daß $BD = \frac{1}{2} BC$ $= \frac{1}{2} a$, und nun $DE = \frac{1}{3} DA = \frac{1}{3} f$ genommen werden. Der [W]inkel ADB, welcher aus den gegebenen Bestimmungen für das [D]reieck gleichfalls gegeben ist, sei $ADB = \zeta$; und um die Lage [ir]gend eines Punctes Y anzugeben, sei auf DA, $EX = x$ und [X]$Y = y$ mit BC parallel. Das Moment der Trägheit des klei[n]en Theilchens ist also $= (x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{Cos}\zeta)\, dx \cdot dy \cdot \sin\zeta$. [D]ie erste Integration, wobei x unveränderlich bleibt, giebt [(]$x^2 y\, dx + \frac{1}{3} y^3\, dx - y^2 x\, dx \operatorname{Cos}\zeta) \sin\zeta$. Wenn man das [M]oment der einen und der andern Hälfte jedes für sich sucht, so [k]ömmt keine Constans hinzu; aber der vollständige Werth von y [i]st $FX = \frac{\frac{1}{2} a \cdot (\frac{2}{3} f + x)}{f}$; also des ganzen Streifchens XxfF [M]oment der Trägheit

$$= x^2 dx \cdot \sin\zeta \cdot \frac{\frac{1}{2} a\, (\frac{2}{3} f + x)}{f} + \frac{1}{3} dx \sin\zeta \cdot \frac{\frac{1}{4} a^3 (\frac{2}{3} f + x)^3}{f^3}$$

$$- x dx \cdot \sin\zeta \operatorname{Cos}\zeta \cdot \frac{\frac{1}{4} a^2 (\frac{2}{3} f + x)^2}{f^2};$$

[u]nd hievon ist das Integral

$$= \text{Const} + \frac{1}{3} a x^3 \sin\zeta + \frac{1}{8} \frac{a x^4}{f} \sin\zeta + \frac{1}{96} \frac{a^3 \sin\zeta (\frac{2}{3} f + x)^4}{f^3}$$

$$- \frac{1}{18} a^2 x^2 \sin\zeta \operatorname{Cos}\zeta - \frac{1}{9} \frac{a^2 x^3}{f} \sin\zeta \operatorname{Cos}\zeta - \frac{1}{16} \frac{x^4 a^2 \sin\zeta \operatorname{Cos}\zeta}{f^2}.$$

[S]oll dieses Integral von A an oder von $x = -\frac{2}{3} f$ angenom[m]en werden, so ist

zu bedenken, daß dx . dy das Element der Fläche ist, welches auch durch dw . dz . Sin ζ ausgedrückt wird, also unsre zu integrirende Formel

$= 2dw \,.\, dz \,.\, \text{Sin}\,\zeta \,\{\text{Sin}^2\eta\,(\tfrac{2}{3}\,f - w)^2 + z^2\,\text{Sin}^2(\zeta - \eta)\}$.

Diese in Beziehung auf z integrirt, giebt

$= 2z\,dw \,.\, \text{Sin}\,\zeta \,.\, \text{Sin}^2\eta\,(\tfrac{2}{3}\,f - w)^2 + \tfrac{2}{3}\,z^3\,dw \,.\, \text{Sin}\,\zeta \,.\, \text{Sin}^2(\zeta - \eta)$;

oder vollständig bis $z = \dfrac{a\,w}{2f}$ genommen,

$$= \frac{aw\,dw}{f} \,.\, \text{Sin}\,\zeta \,.\, \text{Sin}^2\eta\,(\tfrac{2}{3}\,f - w)^2 + \tfrac{1}{12}\,\frac{a^3\,w^3}{f^3}\,dw\,\text{Sin}\,\zeta \,.\, \text{Sin}^2(\zeta - \eta).$$

Wird dies zum zweiten Male integrirt, so ergiebt sich das Moment der Trägheit

$$= \tfrac{2}{9}\,a\,w^2\,f\,\text{Sin}\,\zeta \,.\, \text{Sin}^2\eta - \tfrac{4}{9}\,a\,w^3\,\text{Sin}\,\zeta\,\text{Sin}^2\eta + \tfrac{1}{4}\,\frac{a\,w^4}{f}\,\text{Sin}\,\zeta\,\text{Sin}^2\eta + \tfrac{1}{48}\,\frac{a^3\,w^4}{f^3}\,\text{Sin}\,\zeta \,.\, \text{Sin}^2(\zeta - \eta),$$

oder vollständig von $w = 0$ bis $w = f$, das Moment der Trägheit $= \text{Sin}\,\zeta \,.\, \{\text{Sin}^2\eta \,.\, \tfrac{1}{36}\,a\,f^3 + \tfrac{1}{48}\,a^3\,f \,.\, \text{Sin}^2(\zeta - \eta)\}$,
oder $= I = \tfrac{1}{12}\,a\,f \,.\, \text{Sin}\,\zeta\,\{\tfrac{1}{3}\,f^2\,\text{Sin}^2\eta + \tfrac{1}{4}\,a^2\,\text{Sin}^2(\zeta - \eta)\}$.

VII. Man kann hier fragen, unter welchem Winkel $= \eta$ man die Axe FG gegen AD geneigt nehmen müsse, damit das Moment der Trägheit ein Größtes oder Kleinstes werde. Bekanntlich muß dann $\dfrac{dI}{d\eta} = 0$ sein,

also $\tfrac{2}{3}\,f^2\,\text{Sin}\,\eta\,\text{Cos}\,\eta - \tfrac{1}{2}\,a^2\,\text{Sin}\,(\zeta - \eta) \,.\, \text{Cos}\,(\zeta - \eta) = 0$,
oder $0 = \tfrac{1}{3}\,f^2\,\text{Sin} \,.\, 2\eta - \tfrac{1}{4}\,a^2\,(\text{Sin}\,(2\zeta - 2\eta)$,

daher $\text{tang}\,2\eta = \dfrac{\tfrac{1}{4}\,a^2\,\text{Sin}\,2\zeta}{\tfrac{1}{3}\,f^2 + \tfrac{1}{4}\,a^2\,\text{Cos}\,2\zeta}$.

Nimmt man $\eta =$ AEF so an, daß tang 2η diesen Werth erhält, so hat das Moment der Trägheit den kleinsten oder größten Werth, den es für eine in der Ebne der Figur liegende und durch den Schwerpunct gehende Axe erlangen kann. Jener Werth für tang 2η bestimmt sogleich zwei auf einander senkrechte Axen, indem $\text{tang}\,2\eta = \text{tang}\,(180^\circ + 2\eta)$ ist; also wenn AEF $= \eta$ den einen Winkel bestimmt, der andre $= 90^\circ +$ AEF wird.

VIII. Im gleichschenklichten Dreieck, wo AB = AC, ist $\zeta = 90^\circ$, $\text{Sin}\,2\zeta = 0$, $\text{tang}\,2\eta = 0$, also η entweder $= 0$ oder $= 90^\circ$. Die beiden Hauptaxen sind also erstlich AD selbst und in Beziehung auf sie das Moment der Trägheit $= \tfrac{1}{48}\,a^3\,f$; zweitens auf AD senkrecht und in Beziehung auf diese das Moment

der Trägheit $= \frac{1}{18} a f^3$. Dieses stimmt mit §. 259. überein, wo die Grundlinie $= 2a$, und $f = na$ war.

Das Beispiel in §. 260. (Fig. 78.), wo $A = 90^\circ$, $AB = AD = b$ war, giebt $\zeta = 45^\circ$, $f = b\sqrt{2}$, tang $2\eta = \frac{3}{2}$;

$$\text{Sin}\, 2\eta = \frac{\pm 3}{\sqrt{13}};\ \text{Cos}\, 2\eta = \frac{\pm 2}{\sqrt{13}};\ \text{Sin}\, \eta = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}};$$

$$\text{Cos}\, \eta = \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}};\ \text{Sin}\,(45^\circ - \eta) = \frac{-\text{Sin}\,\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\text{Cos}\,\eta}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)}}{2}.$$

Also das Moment der Trägheit für die Axe, für welche Sin 2η und Cos 2η positiv sind, oder $\eta < 90^\circ$,

$$\frac{b^2}{6}\left\{\frac{2}{3} b^2 \left(\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{13}}}{2}\right) + \frac{b^2}{4}\left(2 - \frac{6}{\sqrt{13}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6} b^4 \left\{\frac{5}{6} - \frac{13}{6 \cdot \sqrt{13}}\right\} = \frac{1}{36} b^4 (5 - \sqrt{13});$$

für die zweite Axe hingegen das Moment der Trägheit

$$= \frac{1}{6} b^2 \left\{\frac{1}{3} b^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{36} b^4 (5 + \sqrt{13}).$$

Die beiden Werthe von η sind $= 28^\circ.\ 9'\ 18''$
und $= 118^\circ.\ 9'\ 18''$.

IX. Der allgemeine Ausdruck (in V.) für das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine Umdrehungsaxe, welche gegen die Abscissenlinie unter dem Winkel $= \eta$ geneigt ist, läßt uns nun auch finden, wie ganz allgemein der Winkel η für diejenigen Axen bestimmt wird, die ein größtes oder kleinstes Moment der Trägheit geben. Wir fanden allgemein das Moment der Trägheit

$$I = \int x^2\, dx\,.\, dy\,.\, \text{Sin}^2\eta + \int y^2\, dx\, dy\,.\, \text{Cos}^2\eta$$
$$+ \int xy\, dx\, dy\,.\, \text{Sin}\, 2\eta,$$

also wenn wir η als veränderlich ansehen, wobei die Integrale $\int x^2\, dx\, dy$; $\int y^2\, dx\, dy$; $\int xy\, dx\, dy$ ungeändert bleiben, indem diese schon in Beziehung auf die ganze Figur richtig genommen sein müssen, so ist

$$\frac{dI}{d\eta} = 2\, \text{Sin}\,\eta\, \text{Cos}\,\eta \left(\int x^2\, dx\, dy - \int y^2\, dx\, dy\right)$$
$$+ 2\, \text{Cos}.\, 2\eta \int xy\, dx\, dy.$$

fernt; denn das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch C gehende Axe ist allemal gleich dem Momente der Trägheit in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct mit jener Axe parallel gehende Axe addirt zu $M . AG^2$ (§. 264.); also wenn ich das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe $= M . h^2$ setze, $M.k^2 = M.h^2 + M.AG^2$, und daher des isochronischen einfachen Pendels Länge $= \frac{h^2}{AG} + AG$, allemal $> AG$.

§. 274. Aufgabe. Ein Pendel besteht aus einer sehr dünnen cylindrischen Stange AB (Fig. 88.), an deren Ende eine kreisförmige Scheibe BC oder ein Cylinder von sehr geringer Höhe befestigt ist; dieses Pendel kann sich, um eine horizontale auf die Ebne BC senkrechte Axe, die durch A geht, frei drehen; man sucht die Länge des isochronischen einfachen Pendels.

Auflösung. Es sei die Länge der Stange $AB = a$, der Halbmesser der Kreisscheibe $= r$: so ist, wenn ich den Querschnitt der Stange $= b^2$ und ihre Dichtigkeit $= D$ setze, der ganzen Stange Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe, die in A senkrecht gegen sie ist (§. 249.) $= \frac{1}{3} b^2 D . a^3$.

Das Moment der Trägheit der Kreisscheibe, deren Dicke $= f$ sein mag, in Beziehung auf eine gegen die Ebne BC senkrechte, durch den Mittelpunct gehende Axe ist (§. 261.) $= \frac{1}{2} \pi f . D . r^4$, wenn sie mit der Stange gleiche Dichtigkeit hat. Dieses Moment der Trägheit bezieht sich auf eine Axe, die mit der Umdrehungsaxe durch A parallel und von ihr um $a + r$ entfernt ist; also findet man (§. 264.) das Moment der Trägheit der Kreisscheibe in Beziehung auf die Umdrehungsaxe

$\frac{1}{2} \pi f . D . r^4 + \pi f . D . r^2 (a + r)^2$

$= \pi f . D . r^2 \{\frac{1}{2} r^2 + (a + r)^2\}$. Das gesammte Moment der Trägheit des ganzen Pendels ist also

$= \frac{1}{3} b^2 D . a^3 + \pi f D . r^2 \{\frac{1}{2} r^2 + (a + r)^2\}$;

XI. Aus der für η gefundenen Formel ergiebt sich, wenn ich $\int xy\,dx\,dy = U$, $\int x^2\,dx\,dy = V$, $\int y^2\,dx\,dy = W$ setze,

$$\tan 2\eta = \frac{2U}{W - V},$$

also

$$\operatorname{Sin} 2\eta = \frac{2U}{\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}};$$

$$\operatorname{Cos} 2\eta = \frac{W-V}{\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}};$$

$$\operatorname{Sin}^2\eta = \tfrac{1}{2} - \frac{W-V}{2\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}};$$

$$\operatorname{Cos}^2\eta = \tfrac{1}{2} + \frac{W-V}{2\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}}.$$

Da nun (nach V.) das Moment der Trägheit des ganzen Dreiecks $= V.\operatorname{Sin}^2\eta + W.\operatorname{Cos}^2\eta + U.\operatorname{Sin} 2\eta$, so findet sich dieses

$$= \tfrac{1}{2}(V+W) + \frac{V^2 - 2VW + W^2 + 4U^2}{2\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}}$$

$= \tfrac{1}{2}(V+W) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4U^2 + (W-V)^2)}$ in dem Falle, da η den bestimmten Werth hat, oder in dem Falle, da das Moment der Trägheit entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Diese Formel giebt zugleich das größte Moment der Trägheit, wenn man das irrationale Glied positiv, das kleinste, wenn man es negativ nimmt.

Hier läßt sich nun auch beweisen, was in §. 259. 260. schon gelegentlich bemerkt ist, daß das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine gegen die Ebne senkrechte, durch den Schwerpunct gehende Axe gleich der Summe jener beiden, also $= V + W$ ist. Denn jedes durch die Coordinaten x, y bestimmten Theilchens $= dx\,.\,dy$ Abstand von dieser Axe ist $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$, also sein Moment der Trägheit $= x^2\,dx\,dy + y^2\,dx\,dy$; und folglich der ganzen Figur Moment der Trägheit in Beziehung auf diese Axe $= \int x^2\,dx\,dy + \int y^2\,dx\,dy = V + W$.

XII. Aehnliche allgemeine Betrachtungen lassen sich nun über die Hauptaxen der Körper anstellen. In jedem Körper giebt es drei Hauptaxen, die durch den Schwerpunct gehn und auf einander senkrecht sind; in Beziehung auf welche das Moment der Trägheit ein Größtes oder Kleinstes ist. Diese Axen sind zugleich freie Drehungsaxen, und man findet ihre Lage durch ähnliche Ueberlegungen, wie in VIII, IX. Die dabei nöthigen Rechnungen werden etwas schwieriger, weil man die Lage der Ebne, in welcher zwei der Hauptaxen sich befinden, bestimmen, und dann die Lage der Axen in dieser Ebne suchen muß. Um lange Rech-

$= 2g . \text{Sin}\,\varphi . t$ nach Verlauf der Zeit $= t$ erlangt haben, wenn diese Kraft so lange unverändert wirkte; mit dieser Geschwindigkeit würde H auf einem Kreisbogen vom Halbmesser $cH = l$ fortgehen, und also eine Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2g . t . \text{Sin}\,\varphi}{l}$ haben. Hier läßt sich nun l so bestimmen, daß die Winkelgeschwindigkeiten des einfachen Pendels und jenes oscillirenden schweren Körpers gleichzeitig werden.

§. 270. Lehrsatz. Wenn ein schwerer Körper, welcher um eine horizontale Axe beweglich ist, um einen eben so großen Winkel $= \varphi$ als ein einfaches Pendel, beim Anfange der Bewegung, von seiner natürlichen Lage entfernt war: so macht er seine pendelartigen Schwingungen gleichzeitig mit dem einfachen Pendel, wenn des letzteren Länge gleich ist dem Quotienten $\frac{M . k^2}{M . AG}$ (§. 269.), oder gleich dem in Beziehung auf die Axe genommenen Momente der Trägheit des Körpers, dividirt durch das Product aus dem Gewichte des Körpers in den Abstand des Schwerpunctes von der Axe.

Beweis. Wenn sowohl das einfache Pendel als jener schwere Körper, den wir ein zusammengesetztes Pendel nennen wollen, beim Anfange der Bewegung so aus der Lage, in welcher sie ruhen würden, gebracht sind, daß die von der Umdrehungsaxe nach den Schwerpuncten beider G, H gezogenen Linien CG, cH gleiche Winkel $= \varphi$ mit der Verticallinie machen: so ist, wenn wir unter t eine sehr kleine Zeit verstehen, die Winkelgeschwindigkeit des einfachen Pendels (§. 269.) $= \frac{2g . t . \text{Sin}\,\varphi}{l}$, also $= \frac{2g . t . M . AG . \text{Sin}\,\varphi}{M . k^2}$, wenn $l = \frac{M . k^2}{M . AG}$, und eben so groß ist die Winkelgeschwindigkeit des zusammengesetzten Pendels. In den ersten Augenblicken ändert sich also bei der angenommenen Länge des einfachen Pendels

die Größe der Winkel GCD und Hcd gleich viel, so daß beide Winkel einander gleich bleiben. Sind sie nun nach einigen Augenblicken beide $= \psi$ geworden: so wird die schon erlangte Winkelgeschwindigkeit wieder bei beiden gleich stark beschleunigt, indem die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit bei dem einfachen Pendel durch $\frac{2g.t.\mathrm{Sin}\,\psi}{l}$ $= \frac{2g.t.M.AG.\mathrm{Sin}\,\psi}{M.k^2}$ für eine neue, kleine Zeit $= t$ ausgedrückt wird, und eben der Ausdruck auch für die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit des zusammengesetzten Pendels gilt. Da nun diese Aenderung der Winkelgeschwindigkeit und folglich die Aenderung der Lage beider Pendel ganz auf gleiche Weise erfolgt, so werden beide zu gleicher Zeit in der Verticallinie ankommen, und ihre ganzen Oscillationen in gleichen Zeiten vollenden.

§. 271. Wenn die Gestalt des oscillirenden schweren Körpers oder des zusammengesetzten Pendels gegeben ist: so läßt sich das Moment der Trägheit desselben in Beziehung auf die Axe C bestimmen, und auch die Lage des Schwerpuncts ist bekannt. Es läßt sich also dann die Länge des einfachen Pendels bestimmen, welches gleich große Schwingungen in eben der Zeit, wie jener Körper macht.

§. 272. Erklärung. Ein solches einfaches Pendel heißt ein dem zusammengesetzten Pendel isochronisches wegen dieser Gleichzeitigkeit der Schwingungen.

Bestimmt man in dem zusammengesetzten Pendel den Punct L, wo der schwere Punct des einfachen isochronischen Pendels sich befinden müßte, so heißt L der Mittelpunct des Schwunges des zusammengesetzten Pendels.

§. 273. Dieser Mittelpunct des Schwunges liegt allemal weiter, als der Schwerpunct G von der Axe ent-

fernt; denn das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch C gehende Axe ist allemal gleich dem Momente der Trägheit in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct mit jener Axe parallel gehende Axe addirt zu $M . AG^2$ (§. 264.); also wenn ich das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe $= M . h^2$ setze, $M.k^2 = M.h^2 + M.AG^2$, und daher des isochronischen einfachen Pendels Länge $= \frac{h^2}{AG} + AG$, allemal $> AG$.

§. 274. Aufgabe. Ein Pendel besteht aus einer sehr dünnen cylindrischen Stange AB (Fig. 88.), an deren Ende eine kreisförmige Scheibe BC oder ein Cylinder von sehr geringer Höhe befestigt ist; dieses Pendel kann sich um eine horizontale auf die Ebne BC senkrechte Axe, die durch A geht, frei drehen; man sucht die Länge des isochronischen einfachen Pendels.

Auflösung. Es sei die Länge der Stange $AB = a$, der Halbmesser der Kreisscheibe $= r$: so ist, wenn ich den Querschnitt der Stange $= b^2$ und ihre Dichtigkeit $= D$ setze, der ganzen Stange Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe, die in A senkrecht gegen sie ist (§. 249.) $= \frac{1}{3} b^2 D . a^3$.

Das Moment der Trägheit der Kreisscheibe, deren Dicke $= f$ sein mag, in Beziehung auf eine gegen die Ebne BC senkrechte, durch den Mittelpunct gehende Axe ist (§. 261.) $= \frac{1}{2} \pi f . D . r^4$, wenn sie mit der Stange gleiche Dichtigkeit hat. Dieses Moment der Trägheit bezieht sich auf eine Axe, die mit der Umdrehungsaxe durch A parallel und von ihr um $a + r$ entfernt ist; also findet man (§. 264.) das Moment der Trägheit der Kreisscheibe in Beziehung auf die Umdrehungsaxe

$$\frac{1}{2} \pi f . D . r^4 + \pi f . D . r^2 (a + r)^2$$
$$= \pi f . D . r^2 \{\tfrac{1}{2} r^2 + (a + r)^2\}.$$

Das gesammte Moment der Trägheit des ganzen Pendels ist also

$$= \frac{1}{3} b^2 D . a^3 + \pi f D . r^2 \{\tfrac{1}{2} r^2 + (a + r)^2\};$$

seine Masse $= a D b^2 + \pi f . D r^2$, die Entfernung des Schwerpuncts von A ist

$$= \frac{\frac{1}{2} a . a D b^2 + (a+r) \pi f D r^2}{a D b^2 + \pi f D r^2}$$ (Statik. §. 106. 140.), also das Product aus der Masse in diese Entfernung $= \frac{1}{2} a^2 D b^2 + (a+r) \pi . f D r^2$, und die Länge des einfachen isochronischen Pendels

$$= l = \frac{\frac{1}{3} b^2 a^3 + \pi f r^2 (\frac{1}{2} r^2 + (a+r)^2)}{\frac{1}{2} a^2 b^2 + \pi f r^2 (a+r)}.$$

§. 275. Hätte man die Masse der Stange als ganz unbedeutend bei Seite gesetzt, so wäre

$$l = a + r + \frac{\frac{1}{2} r^2}{a + r}$$ geworden.

§. 276. **Beispiel.** Wäre der Stange Halbmesser = 1 Linie, Länge = a = 432''' = 3 Fuß, Halbmesser der Kreisscheibe = 40''' = r, Dicke der Scheibe = 2''', so läge der Schwerpunct 442 Linien von der Axe, der Mittelpunct des Schwunges 463 Linien von derselben entfernt.

§. 277. **Bemerkung.** Wenn man einen Körper solche Oscillationen um eine horizontale Axe machen läßt, und die Zeit dieser Oscillationen genau beobachtet: so ergiebt sich aus dieser Zeitbestimmung die Länge = l des isochronischen einfachen Pendels, dem eine solche Schwingungszeit zukömmt (§. 121.). Ist also zugleich die Masse, das ist das Gewicht des Körpers = M und der Abstand seines Schwerpunctes von der Umdrehungsaxe = AG bekannt: so ergiebt sich sein Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe = l . M . AG, weil ja auch (§. 270.) $l = \frac{\text{Mom. d. Trägh.}}{AG . M}$ ist. Auf diese Weise läßt sich auch unregelmäßiger Körper Moment der Trägheit durch Versuche finden, wenn nur die Lage des Schwerpuncts bekannt ist.

Siebzehnter Abschnitt.

Vom Stoße geschwungener Körper an ruhende und dem Mittelpuncte des Hiebes.

§. 278. **Bemerkung.** Wenn eine Kraft, indem sie eine bestimmte Zeit durch auf die Masse M wirkt, dieser die Geschwindigkeit = c ertheilt: so würde sie bei ganz gleicher Einwirkung auf die Masse M + M' dieser die Geschwindigkeit $= \frac{c \cdot M}{M + M'}$ ertheilen, wenn die hervorgebrachte Bewegung eine gradlinigte ist. Bei der Umdrehungsbewegung hingegen ertheilt die in der Entfernung = ϱ von der Axe wirkende Kraft = Q der Masse = M in der Entfernung = r von der Axe die Winkelgeschwindigkeit $= u = \frac{2g \cdot t \cdot \varrho \cdot Q}{r^2 M}$, aber den beiden Massen

= M in der Entfernung = r
und = M' in der Entfernung = r',

die Winkelgeschwindigkeit $= u' = \frac{2g \cdot t \cdot \varrho \cdot Q}{r^2 M + r'^2 M'}$

$= \frac{u \cdot r^2 M}{r^2 M + r'^2 M'}$ (§. 244.).

Wenn also am Hebelarm CN (Fig. 74.), den wir selbst als ohne Masse betrachten, die Masse M in der Entfernung = r befindlich, und so in Bewegung gesetzt ist, daß sie die Winkelgeschwindigkeit = u hat: so wird, wenn der Hebelarm an die Masse = M' anstößt und diese mit fortreißt, die Winkelgeschwindigkeit jetzt in

$\frac{u \,.\, r^2 M}{r^2 M + r'^2 M'}$ übergehen, wenn M' die Entfernung $= r'$ von der Axe hat.

Eben diese Betrachtungen ließen sich anwenden, wenn der ganze Hebelarm aus schweren Theilen bestände und sein Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungsaxe $= M \,.\, k^2$ wäre; sollte nämlich dann, indem er sich mit der Winkelgeschwindigkeit $= u$ bewegt, eine neue Masse $= M'$ in der Entfernung $= r'$ von der Axe plötzlich mit fortgerissen werden, so würde die Winkelgeschwindigkeit in $\frac{u \,.\, M \,.\, k^2}{M \,.\, k^2 + M' \,.\, r'^2}$ übergehen, weil eine bestimmte, in der Entfernung $= \varrho$ wirkende Kraft $= Q$ der Masse $= M$, deren Trägheitsmoment $= M \,.\, k^2$ ist, die Winkelgeschwindigkeit $= u = \frac{2g \,.\, t \,.\, Q \,.\, \varrho}{M \,.\, k^2}$, und bei gleicher und gleich daurender Wirksamkeit den beiden verbundenen Massen M, M', die Winkelgeschwindigkeit $u' = \frac{2g \,.\, t \,.\, Q \,.\, \varrho}{M \,.\, k^2 + M' \,.\, r'^2} = \frac{u \,.\, M \,.\, k^2}{M \,.\, k^2 + M' \,.\, r'^2}$ ertheilt.

§. 279. Je entfernter von der Axe die mit fortzureißende Masse M' ist, desto größer wird ihr Moment der Trägheit und desto kleiner folglich die ihr ertheilte Winkelgeschwindigkeit $= u'$; aber ihre wahre Geschwindigkeit nimmt bei größerm Abstande zu, wenn die Winkelgeschwindigkeit dieselbe bleibt. Man kann daher fragen, ob es nicht eine gewisse Entfernung giebt, wo die Masse M' sich befinden muß, um die größte absolute Geschwindigkeit, welche $= u' \,.\, r' = \frac{u \,.\, M \,.\, k^2 \,.\, r'}{M \,.\, k^2 + M' \,.\, r'^2}$ ist, zu erlangen.

§. 280. Aufgabe. Eine Masse, deren Gestalt und Größe bekannt ist, schwingt sich um eine gegebne Axe, und man kennt ihr Moment der Trägheit $= M \,.\, k^2$ in Beziehung auf diese Axe. Indem diese Masse sich mit der Winkelgeschwindigkeit $= u$ dreht, trifft sie eine

Masse $= M'$ in der Entfernung $= r'$ von der Axe, die sie mit fortreißen muß; man soll bestimmen, wie groß die Entfernung $= r'$ sein müsse, damit die absolute Geschwindigkeit der Masse M' am größten werde.

Auflösung. Es muß $r'^2 = \frac{M \cdot k^2}{M'}$, oder das Moment der Trägheit der in Bewegung zu setzenden Masse eben so groß, als das Moment der Trägheit der bewegten Masse sein.

Beweis. Nenne ich $= v$ die absolute Geschwindigkeit, welche die Masse M' erlangt, so ist

$$v = u' \cdot r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2 \cdot r'}{M \cdot k^2 + M' \cdot r'^2}, \text{ also}$$

$$r'^2 \cdot M' \cdot v - u \cdot M \cdot k^2 \cdot r' = - v \cdot M \cdot k^2;$$

$$r'^2 - \frac{u}{v} \cdot \frac{M}{M'} k^2 \cdot r' = - \frac{M}{M'} k^2;$$

$$r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{2 \cdot v \cdot M'} + \sqrt{\left\{\frac{u^2 \cdot M^2 \cdot k^4}{4 \cdot v^2 \cdot M'^2} - \frac{M}{M'} k^2\right\}}.$$

Dieser Werth von r' hört auf möglich zu sein, wenn

$$\frac{u^2 \cdot M \cdot k^2}{4 \cdot v^2 \cdot M'} < 1, \text{ oder } u^2 \cdot M \cdot k^2 < 4 v^2 \cdot M',$$

oder $2 v \sqrt{M'} > u \cdot k \sqrt{M}$ ist. Also ist

$v = \frac{1}{2} u k \sqrt{\frac{M}{M'}}$ der größte Werth, den v erlangen kann. Wenn dieser erreicht ist, so verschwindet der irrationale Theil und es ist

$$r' = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{2 \cdot v \cdot M'} = \frac{u \cdot M \cdot k^2}{u \cdot k \sqrt{M \cdot M'}} = k \sqrt{\frac{M}{M'}};$$

also $r'^2 = \frac{M \cdot k^2}{M'}$.

§. 289. Wäre die bewegte Masse M ein cylindrischer Körper, den man als eine bloße Linie von der Länge $= a$ betrachten könnte: so würde, wenn diese sich um eine durch ihren Endpunct gehende, auf sie senkrechte Axe dreht, ihr Moment der Trägheit $= \frac{1}{3} M a^2$ sein, wenn

man unter M die Masse der ganzen Linie versteht. Soll also mit dieser eine Masse $M' = n . M$ mit fortgerissen werden, so muß, damit die absolute Geschwindigkeit am größten sei $r'^2 = \frac{\frac{1}{3} M a^2}{n M}$, $r' = a \sqrt{\frac{1}{3n}}$ sein, also zum Beispiel $r' = \frac{1}{3} a$, wenn eine dreifach so große Masse mit fortgerissen werden soll; dagegen $r' = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}58 . a$, wenn eine Masse $= M$ fortzubewegen ist.

§. 290. Bemerkung. Wenn der Masse $= M$ Moment der Trägheit $= M . k^2$ ist in Beziehung auf die Umdrehungsaxe: so ist die Gewalt, welche der gedrehte Körper in der Entfernung $= k$ von der Axe ausübt, genau so groß, als wenn seine ganze Masse in dieser Entfernung vereinigt wäre. Denn eine gleiche Kraft würde den Körper dessen Trägheitsmoment $= M k^2$ ist, und würde eine Masse $= M$ in der Entfernung $= k$ von der Axe, in völlig gleiche Bewegung setzen; oder eine Kraft $= Q$, in der Entfernung $= k$ von der Axe wirkend, würde in beiden Fällen gleichzeitig dieselbe Winkelgeschwindigkeit hervorbringen, oder eine schon erlangte Winkelgeschwindigkeit auf gleiche Weise hemmen, wenn sie der Bewegung entgegen wirkte. Diese sich drehende Masse übt, wie sich nun leicht übersehen läßt, auf einen in der Entfernung $= r$ liegenden Punct, eben den Druck aus, als ob dort eine Masse $= \frac{M . k^2}{r^2}$ vereinigt wäre; denn eine solche Masse $= \frac{M . k^2}{r^2} = N$ in der Entfernung $= r$ fordert, um irgend eine Winkelgeschwindigkeit $= u$ zu erlangen, die bewegende Kraft

$$= Q = \frac{u . r^2 N}{2g . t . \varrho} = \frac{u M k^2}{2g . t . \varrho},$$ wenn diese Kraft in der Entfernung $= \varrho$, die Zeit $= t$ durch wirket; und eben so groß müßte Q sein, um bei derselben Entfernung $= \varrho$ in derselben Zeit der Masse, deren Trägheitsmo-

ment = $M k^2$ ist, eben die Winkelgeschwindigkeit zu ertheilen.

§. 291. Bewegt sich also der Körper AC (Fig. 89.), dessen Trägheitsmoment = $M k^2$, mit der bestimmten Winkelgeschwindigkeit = u um die Axe C, und trifft bei A einen unbeweglichen Widerstand, in welchen er eine Höhlung von der Tiefe = s eindrückt: so wird die Tiefe dieser Höhlung eben so groß sein, als ob in A die Masse $N = \frac{M k^2}{CA^2}$ mit der Geschwindigkeit = u . CA wirkte. Die Tiefe der Höhlung war aber dem Quadrate der Geschwindigkeit und zugleich der Masse proportional (§. 223.), also hier dem Producte $u^2 . CA^2 . \frac{M k^2}{CA^2}$ proportional; die Tiefe der in den festen Widerstand eingedrückten Höhlung bleibt also gleich groß, der Punct A mag der Axe näher oder entfernter von ihr liegen.

§. 292. Bemerkung. In dieser Hinsicht scheint es also gleichgültig zu sein, mit welchem Puncte A der feste Widerstand getroffen wird; man kann aber dennoch, in Rücksicht auf eine andre Bedingung einen Punct A angeben, wo der getroffene feste Widerstand die vortheilhafteste Lage hat. Ist dieser Widerstand so fest, daß kein erheblicher Eindruck darin gemacht wird: so muß bei der beinahe plötzlichen Hemmung der Bewegung ein Bestreben des geschwungenen Körpers entstehen, sich um A zu drehen. Würde nämlich in demselben Augenblick, da A getroffen wird, C losgelassen: so würden vermöge der Trägheit sowohl die zwischen A und C liegenden Theilchen als die jenseits A nach B zu liegenden Theilchen ihre Bewegung fortzusetzen streben. Das Bestreben der erstern würde, wenn C losgelassen wird, eine Drehung um A gegen D zu, das Bestreben der andern eine Drehung um A gegen E zu bewirken, und der Körper BC wird nur dann ganz zur Ruhe kommen, wenn beide Bestrebungen einander genau aufheben. Auch wenn C festgehalten

wird, sind diese entgegengesetzten Bestrebungen nicht ganz ohne Wirkung; in diesem Falle nämlich entsteht ein Druck auf die Axe in C, und dieser Druck ist gegen D zu gerichtet, wenn die in AC liegenden Theilchen mehr vermögen, im entgegengesetzten Falle ist er von D abwärts gerichtet.

Es giebt also einen Punct A, für den jenes entgegengesetzte Bestreben sich ganz aufhebt, und folglich, auch wenn C frei würde, die Bewegung ganz aufhört, also auch auf die festgehaltene Axe C sich gar kein Druck äußert. Diesen Punct wollen wir zu bestimmen suchen.

§. 293. Aufgabe. Die feste grade Linie CN (Fig. 90.), die hier als ohne Masse betrachtet wird, ist in den Puncten M und N mit den Massen = M in M und = N in N belastet. Indem sie sich mit der Winkelgeschwindigkeit = u um eine auf CN senkrechte durch C gehende Axe dreht, trifft sie in A auf einen festen Widerstand; man sucht, wo dieser Punct A liegen muß, damit, beim Auftreffen, die Axe C keine Gewalt auszuhalten habe.

Auflösung. Es muß AC gleich sein dem Quotienten, der aus dem Momente der Trägheit der beiden Massen M, N in Beziehung auf C, dividirt mit dem statischen Momente beider Massen in Beziehung auf C gefunden wird.

Beweis. Da in dem Augenblicke des Stoßes die Winkelgeschwindigkeit beider Massen = u, also die wahre Geschwindigkeit = CM . u für die Masse M,
= CN . u für die Masse N ist: so haben wir für M die Quantität der Bewegung (§. 216.) = CM . M . u, und für N dieselbe = CN . N . u.

Nenne ich nun P die Kraft, welche in einer bestimmten Zeit der Masse N die absolute Geschwindigkeit = CN . u ertheilen könnte, so muß ich $Q = \frac{P . CM . M . u}{CN . N . u}$

diejenige Kraft nennen, welche der Masse M die Geschwindigkeit = CM . u ertheilen könnte. Es ist daher hier so gut als ob in N die Kraft = P, in M die Kraft = Q wirkte, und dieser Kräfte statische Momente in Beziehung auf den jetzt unterstützten Punct A, sind

$$P . AN ; \quad Q . AM.$$

Sollen diese gleich sein, damit beider Kräfte Wirkungen sich aufheben, so muß Q, welches $= \frac{P . CM . M}{CN . N}$ war, zugleich auch $= \frac{P . AN}{AM}$ sein; oder

$$AM . CM . M = AN . CN . N, \text{ sein,}$$

das ist $(AC - CM) \, CM . M = (CN - AC) \, CN . N$,
oder $AC \{CM . M + CN . N\} = CM^2 . M + CN^2 . N$,
also $AC = \frac{M . CM^2 + N . CN^2}{M . CM + N . CN}$, wo der Zähler das gesammte Moment der Trägheit beider Massen, der Nenner das gesammte statische Moment beider Massen ist.

§. 294. Es läßt sich leicht übersehen, daß etwas ganz Aehnliches Statt finden wird, wenn mehrere Massen an jener graden Linie befestiget sind. Auch dann hat man nur nöthig, die Momente der Trägheit aller einzelnen Massen in Beziehung auf die Drehungsaxe C in eine Summe zu bringen, und sie mit dem statischen Momente aller Massen in Beziehung auf C zu dividiren; der Quotient giebt den Abstand CA desjenigen Punctes, wo die geschwungene Linie auftreffen muß, um ganz zur Ruhe zu kommen, und keinen Druck auf C auszuüben.

§. 295. Eben dieses gilt noch, wenn alle einzelne Theilchen des Körpers AC schwer sind oder Masse haben. Da aber dann statt des statischen Momentes aller einzelnen Theile in Beziehung auf die Axe besser die ganze Masse als in ihrem Schwerpuncte G vereinigt angesehen, und das statische Moment aller Theile durch ein Product aus der ganzen Masse in den Abstand des Schwerpuncts von der Axe ausgedrückt wird: so bestimmt man nun die

lage des Punctes A, wo der Körper auftreffen muß, um keine Wirkung auf die Axe C zu äußern, durch das Moment der Trägheit des ganzen Körpers, dividirt durch das Product aus der ganzen Masse in den Abstand ihres Schwerpuncts von der Axe.

§. 296. Bemerkung. Der Punct A liegt also eben da, wo nach §. 270 bis 272. der Mittelpunct des Schwunges läge, wenn CN als schwerer Körper seine Oscillationen um die horizontale Axe C machte. Man könnte den eben bestimmten Punct A, wo der Hieb treffen muß, damit die Bewegung des geschwungenen Körpers ganz aufgehoben werde, ohne daß ein Bestreben, sich um den getroffenen Punct zu drehen, entsteht, den Mittelpunct des Hiebes geschwungener Körper nennen, und es erhellt, daß dieser auch bei horizontaler Drehung oder Schwingung, wo also die Schwere gar nicht auf die Bewegung des Körpers einwirkt, eben da liegt, wo wir bei schweren oscillirenden Körpern den Mittelpunct des Schwunges fanden.

§. 296. b. Diese Betrachtung erlaubt eine ernsthaftere Anwendung. Sie lehrt nämlich die Drehungsaxe finden, um welche ein Körper im ersten Augenblicke sich zu drehen anfängt, wenn irgend eine Kraft auf einen Punct desselben so wirkt, daß ihre Richtung nicht durch den Schwerpunct geht. Stößt z. B. ein andrer Körper an einen ruhenden und geht die Richtung des Stoßes nicht durch den Schwerpunct des ruhenden, so nimmt dieser zwar eine fortrückende Bewegung an, fängt aber zugleich an sich um diejenige Axe zu drehen, die durch ähnliche Betrachtungen, wie unsre vorigen, als diejenige bestimmt wird, welche im Anfange der Drehung gar keine Gewalt leidet. Aber da diese Drehungsaxe nicht wohl eine der Hauptaxen sein kann, so kann sie nicht fortdauernd die Axe der Drehung bleiben, und hierin liegt eine Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung der freien Bewegung rotirender Körper, daß die Drehungsaxe, wenn sie nicht eine der Hauptaxen ist, sich, selbst ohne

neue Einwirkung fremder Kräfte, unaufhörlich ändert, und man also nicht bloß die Drehungen um eine bestimmte Axe, sondern die jedesmalige Lage der Axe selbst, die Drehungsgeschwindigkeit um diese Axe und das Fortrücken des ganzen Körpers ausdrücken muß.

Diese schwierigen Untersuchungen lassen sich ohne sehr viel vollkommnere Vorkenntnisse nicht anstellen.

Zusatz für geübtere Leser.

Nimmt man an, jedes Theilchen N der Linie CN, dessen Länge $= dx$ ist, sei mit der Masse $= dM$ belastet, die durch eine Function von $CN = x$ gegeben ist, so hat bei der Drehung um C mit der Winkelgeschwindigkeit $= u$, die Masse dM die Geschwindigkeit $= u \cdot x$, und um diese hervorzubringen oder zu hemmen muß die bewegende Kraft $dP = \frac{u \cdot x \cdot dM}{2g \cdot t}$ die Zeit $= t$ durch wirken. Dieser Kraft Moment in Beziehung auf A ist $= dP \cdot (x - r)$, wenn $AC = r$ ist. Da das Moment der Kraft auf diese Weise für jedes Theilchen ausgedrückt wird, dieses Theilchen mag diesseits oder jenseits A liegen: so ist

$\frac{u}{2g \cdot t}(\int x^2 dM - r \int x\, dM)$, der Ausdruck für die Summe aller Momente in Beziehung auf einen Punct A dessen Abstand von C, $= r$ ist. Dieser Ausdruck gilt für jeden Werth von r; soll aber die Summe aller Momente $= 0$ sein, oder sollen die Kräfte sich im Gleichgewichte erhalten, so muß $r = \frac{\int x^2 dM}{\int x\, dM}$ sein. Und hier ist $\int x^2 dM$ das Moment der Trägheit, $\int x\, dM$ das statische Moment für den ganzen Körper in Beziehung auf die Axe C.

Achtzehnter Abschnitt.

Anwendungen auf die Umdrehung von Rädern bei Maschinen.

§. 297. Aufgabe. Am Umfange des verticalen Rades GF (Fig. 91.) befindet sich eine Masse M, die durch ihr Gewicht das Rad zu drehen strebt; diese muß, indem sie die mit ihr verbundene Welle HI zugleich mit zu drehen genöthiget ist, die Masse N heben. Wie wird die Bewegung beschleuniget werden, wenn die Masse M das Uebergewicht hat, und die Welle HI in der Unterlage ab ruht, und dort eine, dem Drucke proportionale Reibung leidet.

Auflösung. Wenn der Halbmesser des Rades $= CG = R$, der Halbmesser $= CH$ der Welle $= r$ ist, und beide concentrisch sind, das Rad aber die Dicke $= A$, die Welle dagegen die Länge $= a$ hat: so ist das statische Moment des Gewichts $M, = M . R$, das statische Moment des Gewichts $N, = N . r$. Das Gewicht von Rad und Welle sei $= P$, so leidet die Unterlage der Welle den Druck $= M + N + P$, die Friction kann also $= f(M + N + P)$ und ihr Moment $= f . r (M + N + P)$ gesetzt werden. Hier sollen nun die Kräfte nicht im Gleichgewichte sein, sondern M eine wirkliche Bewegung hervorbringen. Denken wir uns statt der Kräfte, die am Umfange der Welle wirken, die ihnen gleich wirkenden am Umfange des Rades: so ist es hier so gut, als ob eine Kraft $= M - \frac{r}{R}(N + f(P + M + N))$ am Umfange des Rades wirkte. Suchen wir nun das Moment der Trägheit der verschiedenen Massen: so ist dieses

$$x = \frac{R.p - \varrho.f(p+q+P)}{N\left\{1 + \sqrt{\left[\frac{(R.p - \varrho.f.(p+q+P))^2}{(\frac{1}{2}\pi(a.r^4 + A.R^4) + MR^2)N} + 1\right]}\right\}}$$

ist, und die am Ende der Zeit $= t$ erlangte Winkelgeschwindigkeit ist dann $= \frac{v}{r}$

$$= g\,t\left(\frac{Rp - \varrho f(p+q+P)}{\{\frac{1}{2}\pi(ar^4 + AR^4) + MR^2\}}\right).$$

§. 303. Wäre also die Masse N auf einer horizontalen Ebne fortzuziehen, so wäre $q = f.N$, nämlich bloß der Reibung gleich, und darnach die Rechnung leicht zu führen. Bei der Reibung, welche der aufliegende Zapfen des Rades leidet, müßte man hier etwas anders rechnen, weil $f.(p+q+P)$ nur dann die Reibung darstellt, wenn der Zapfen von der ganzen Last $p+q+P$ gedrückt wird; wirkte die Last $= q$ nach horizontaler Richtung, so ist der gesammte Druck, den der Zapfen leidet $= \sqrt{(q^2 + (p+P)^2)}$.

§. 304. Die hier angestellten Untersuchungen finden in vielen Fällen Anwendung. Das oberschlächtige Wasserrad, wo das in den Kästen aufgefangene Wasser, durch sein Gewicht das Rad umtreibt, gehört hieher; denn da hier, mit geringem Unterschiede, immer derselbe Theil des Rades mit einer immer gleichen Wasserlast beschwert ist, so kann man diese Masse so in die Rechnung bringen, wie es hier mit der Masse M geschehen ist. Dabei finden zwar noch einige andre Ueberlegungen Statt, z. B. wiefern das einstürzende Wasser eine andre Bewegung hat, als der fortrückende Punct M des Rades; aber die wesentlichsten Umstände, worauf es ankömmt, lassen sich schon hier übersehen.

Eben so gehören hieher die Treträder, wo ein Mensch das Rad dadurch in Bewegung setzt, daß er sich immer in einer gewissen Entfernung TS von dem niedrigsten Puncte des Rades hinstellt, und durch sein Gewicht die Drehung des Rades bewirkt.

mer gleich sei. Dann wird es bequem sein, die von r unabhängigen Glieder so zusammen zu fassen, daß wir

$$RM - \varrho . f (P + M + N) = B$$

und $\frac{1}{2} \pi (AR^4 + ar^4) + M . R^2 = C$,

also $v = \frac{2g . r . t (B - rN)}{C + N . r^2}$, setzen.

Das giebt $Cv + N . r^2 . v = 2g\, r\, t\, B - 2g\, r^2\, N . t$,

oder $r^2 (N . v + 2Ng . t) - 2gt . r . B = - Cv$;

$$r^2 - \frac{2gt . r . B}{N (v + 2gt)} = \frac{- Cv}{N (v + 2gt)};$$

$$r = \frac{g . t . B}{N (v + 2gt)} \frac{\pm \sqrt{\{g^2 t^2 B^2 - CNv(v + 2gt)\}}}{N (v + 2gt)}.$$

Offenbar ergeben sich hier unmögliche Werthe, wenn $CN v^2 + 2g\, t\, v . CN > g^2 t^2 B^2$ ist; also giebt

$v^2 + 2g\, t\, v = \frac{g^2 t^2 B^2}{CN}$ den größten möglichen Werth

für v, oder $v = - gt + \sqrt{\left\{\frac{g^2 t^2 B^2}{CN} + g^2 t^2\right\}}$, ist

der äußerste Werth, den v erlangen kann, und mit diesem gehört $v + 2gt = gt + gt \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}$,

also $r = \frac{g . t . B}{N (v + 2gt)} = \frac{B}{N \left(1 + \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}\right)}$ zusammen.

Dieser Werth ist also der passendste, welchen r erlangen kann, und ihm gehört die Winkelgeschwindigkeit

$$= \frac{v}{r} = \frac{N}{B}\left(1 + \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}\right) . g . t \left(- 1 + \sqrt{\left(\frac{B^2}{CN} + 1\right)}\right),$$

das ist $\frac{v}{r} = \frac{N . g . t}{B} \frac{B^2}{CN} = \frac{B\, g\, t}{C}$ zu.

§. 300. Beispiel. Es sei $A = 1$; $R = 20$; und $a . r^4$ werde immer $= A . R^4 = 160000$, genommen; $P = 20$; $M = 100$; $N = 1000$, also, wenn $f = \frac{1}{3}$; $\varrho = 0,2$

$$B = RM - \varepsilon . f . (M + N + P) = 1955,2.$$
$$C = \tfrac{1}{2} \pi . (2 . AR^4) + MR^2 = 542656.$$
$$\frac{B}{N} = 1,9552 ; \quad \frac{B^2}{CN} + 1 = 1,00705,$$

also $r = 0,98$.

Hier ist die Dicke des Rades = A als Längen-Einheit gebraucht, und die zugehörige Cubic-Einheit liegt bei den Gewichten als Einheit zum Grunde, indem der Inhalt von Rad und Welle mit ihrem Gewichte als gleich angesehen ist. Das Rad ist betrachtet als eine ganze, aus gleicher Materie wie die Welle, bestehende Scheibe. Wäre es nach Art der Räder nur aus einem massiven Ringe und graden Speichen zusammengefügt: so müßte man das Moment der Trägheit für die Speichen, die man als grade Linien ansehen könnte, besonders suchen, und auch für den massiven Ring besonders. Auch müßte man überlegen, ob man wirklich die Welle so überaus lang nehmen könnte oder zu nehmen angemessen fände, daß $a . r^4 = AR^4$ würde, sonst könnte man $a . r^4 = \frac{1}{n} AR^4$ setzen und n so annehmen, wie es ohngefehr die Umstände erlaubten. Im Wesentlichen bliebe die Rechnung indeß immer dieselbe.

§. 301. Bemerkung. Wir haben hier die Betrachtung so angestellt, als ob sowohl die Masse M, als die zu hebende Masse N am Rade und an der Welle selbst befestigt wären, und dennoch immer mit dem ganzen Momente = r.M und = r.N wirkten. Die ganze Betrachtung bleibt aber dieselbe, wenn M und N Gewichte sind, die bei M und N an einem Seile herab hängen. Es scheint zwar dann, als ob für diese Massen, da sie nicht selbst mit in Umdrehungsbewegung gerathen, das Moment der Trägheit nicht so berechnet werden dürfe; aber eine leichte Ueberlegung zeiget, daß, wofern M, N wirklich in Bewegung gesetzte Massen sind, man ihr Moment der Trägheit eben so berechnen müsse, als ob sie am Umfange von Rad und Welle selbst befestiget wären. Das

Moment der Trägheit kam ja dadurch in die Rechnung, daß eine das Rad drehende Kraft sich unter die zu bewegenden Massen nicht im Verhältniß der Massen allein, sondern im Verhältniß der Producte aus den Massen in die Quadrate der Abstände vom Centro austheilte; aber dieses würde auch hier der Fall sein, wenn Massen n', N' in verschiedenen Entfernungen vom Centro an Seilen herabhängen, da erstlich ihr statisches Moment und zweitens ihre Geschwindigkeit dem Abstande vom Centro proportional ist; und folglich kömmt ihr Moment der Trägheit eben so in die Rechnung, als ob sie in n und N am Rade selbst befestigt wären.

§. 302. Bemerkung. Auch von einer andern Seite läßt sich unsre Betrachtung noch allgemeiner machen. In §. 297 bis 299. haben wir Masse und Gewicht als gleich betrachtet, so wie es geschehen muß, wenn beide Massen M, N mit ihrer ganzen Schwere niederwärts wirken; dagegen würde man das Gewicht der Masse N nur $= N . \sin \varphi$ setzen dürfen, wenn diese Masse auf einer, unter dem Winkel $= \varphi$ gegen den Horizont geneigten Ebne sollte heraufgezogen werden. Etwas Aehnliches könnte von der Masse M gelten. Unsre Untersuchung wird daher allgemeiner, wenn wir die von der Masse M ausgeübte Kraft $= p$, die von der Masse N ausgeübte Kraft $= q$ setzen; und unsre im 297. §. geführte Rechnung sähe dann so aus:

Moment der Kraft $= R . p$; der Last $= r . q$;
Moment der Reibung $= \varrho . f . (p + q + P)$.

Das Moment der Trägheit bleibt dasselbe, da die Massen M, N allemal müssen in Bewegung gesetzt werden, selbst wenn sie bloß horizontal fortgezogen würden; also ist nun die Winkelgeschwindigkeit

$$= u = \frac{2gt . (R . p - r . q - \varrho . f (P + p + q))}{\frac{1}{2}\pi (AR^4 + ar^4) + M . R^2 + N . r^2}$$

und die wahre Geschwindigkeit der zu hebenden Masse wird am größten, wenn

§. 3. Bemerkung. Um die verschiedenen Bewegungen, die ein flüssiger Körper annehmen kann, besser zu übersehen, kann man die einfacheren Fälle der Linien-Bewegung und der Flächen-Bewegung von denjenigen trennen, wo die Bewegungen aller Theilchen nach allen Richtungen gehen können. Man versteht unter Linien-Bewegung den Fall, wo der flüssige Körper in eine enge Röhre eingeschlossen so fortfließt, daß alle Theilchen die in demselben Querschnitte der Röhre sich befinden, einerlei Geschwindigkeit haben, und genau oder doch beinahe sich nach parallelen Richtungen fortbewegen. Damit dies genau der Fall sei, müßte die Röhre überall gleich weit sein, mögte aber sonst, ihrer Längen-Richtung nach, jede willkürliche Gestalt haben. Die hieher gehörigen Betrachtungen lassen sich indeß noch anwenden, wenn auch nicht alle Querschnitte der Röhre genau gleich sind, wofern man nur annehmen kann, daß nahe genug alle Theilchen desselben Querschnitts auf gleiche Art fortrücken. Man rechnet hieher auch den Fall, wo Wasser aus einem überaus weiten Gefäße durch eine sehr enge Oeffnung ausfließt, weil hier wenigstens ein gleiches Sinken aller Wasserschichten in dem weiten Gefäße kann angenommen werden.

Von der Flächen-Bewegung giebt die Bewegung des Wassers in graden Canälen das passendste Beispiel. Sind die Wände dieses Canales parallel und vertical, und alle auf die Längen-Richtung des Canals senkrechte Querschnitte rechtwinklichte Parallelogramme: so kann freilich in den verschiedenen Puncten des Längenschnitts die Bewegung verschieden sein; aber gewiß bleibt jedes Theilchen beständig in derselben Vertical-Ebne, und alle Theilchen, die sich in einerlei auf den Längenschnitt senkrechten Horizontallinie befinden, haben ganz gleiche Bewegung, so daß man nur die Bewegungen in einem einzigen Längenschnitte zu untersuchen brauchte, um sie für alle Längenschnitte zu kennen. Eine solche Bewegung könnte eine ebene Bewegung heißen. Aber ähnliche

Da es nicht meine Absicht ist, in die eigentliche Maschinenlehre einzugehen: so kann ich über die sonst hiebei vorkommenden Betrachtungen nichts hinzufügen.

§. 305. Aufgabe. An dem Umfange des Rades CK eines Räderwerkes (Fig. 92.) wirkt das Gewicht = p, um die Last = q zu heben, die am Umfange der Welle GH des letzten Rades angebracht ist. Man sucht, mit welcher beschleunigten Bewegung die Last gehoben wird, wenn p die Uebermacht hat.

Auflösung. Die Halbmesser der Räder KA = a, BD = b, EG = c und der Wellen AB = α, DE = β, GH = γ sind gegeben; auch kennt man das Moment der Trägheit des ersten Rades mit seiner Welle = $K.k^2$; des zweiten mit seiner Welle = $M.m^2$, des dritten mit seiner Welle = $N.n^2$, wo K, M, N die Massen dieser einzelnen Theile bedeuten. Da nun das Moment der Trägheit der Last in Beziehung auf die dritte Umdrehungsaxe = $Q.\gamma^2$ ist (wenn die Masse = Q heißt, deren Gewicht = q ist,), so ist für die um G bewegten Massen die Summe der Momente der Trägheit = $Q.\gamma^2 + N.n^2$; und es ist folglich eben so gut, als ob in E, in der Entfernung = c von der Axe eine Masse = $S = \frac{Q\gamma^2 + Nn^2}{c^2}$ angebracht wäre; denn diese würde eben das Moment der Trägheit haben.

Wäre wirklich diese Masse = S in E angebracht, so hätte sie in Beziehung auf die zweite Axe ein Moment der Trägheit = $S.\beta^2$ und das gesammte Moment der Trägheit der um D bewegten Massen wäre

$$= S.\beta^2 + M.m^2 = \frac{Q.\gamma^2\beta^2}{c^2} + \frac{Nn^2.\beta^2}{c^2} + M.m^2,$$

also eben so groß als das Moment der Trägheit einer in B angebrachten Masse = R, wenn

$$R = \frac{Q\gamma^2\beta^2}{c^2b^2} + \frac{Nn^2\beta^2}{c^2b^2} + \frac{M.m^2}{b^2}, \text{ wäre.}$$

Wenn diese Masse in der That an B angebracht wäre,

also so fortgeschoben würde, wie es die Drehung der Welle AB fordert, so wäre der sämmtlichen um A bewegten Massen Moment der Trägheit $= R.\alpha^2 + K.k^2 + P.a^2$, wenn des Gewichts $= p$, Masse $= P$ ist.

Da nun das statische Moment der Kraft $p = p.a$ ist, das statische Moment der Kraft q in Beziehung auf eben die Axe A dagegen $= \frac{q.\gamma.\beta.\alpha}{c.b}$: so ist, wenn man die Reibung nicht beachtet $pa - \frac{q\gamma\beta\alpha}{bc}$ die in K wirkende bewegende Kraft, also nach Verlauf der Zeit $= t$ die Winkelgeschwindigkeit $= u$ des Rades AKC,

$$u = \frac{2gt.\left(pa - \frac{q\gamma\beta\alpha}{bc}\right)}{\frac{Q\gamma^2\beta^2\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{Nn^2\beta^2\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{Mm^2\alpha^2}{b^2} + Kk^2 + P.a^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit des letzten Rades ist

$$= \frac{\alpha.\beta}{b.c}.u =$$

$$\frac{2gt(pabc.\alpha.\beta - q\alpha^2\beta^2\gamma)}{Q.\gamma^2\beta^2\alpha^2 + M.m^2\alpha^2c^2 + N.n^2\beta^2\alpha^2 + Kk^2b^2c^2 + P.a^2b^2c^2}.$$

§. 306. Auch hier könnte man suchen, bei welchen Verhältnissen zwischen den Halbmessern der Räder und Wellen die Last am schnellsten gehoben wird; aber da Betrachtungen dieser Art, um anwendbar zu sein, mit genauerer Rücksicht auf alle Umstände, wie sie wirklich bei einer bestimmten Maschine vorkommen, angestellt werden müssen, so halte ich es für überflüssig, hier dabei zu verweilen.

Daß übrigens diese Lehren bei Beurtheilung der Bewegung einer Maschine unentbehrlich sind, erhellt wohl hinreichend; die bestimmtere Anwendung aber muß aus Büchern, die umständlich von der Maschinenlehre handeln, erlernt werden.

Die Gesetze der Bewegung flüssiger Körper.

Erster Abschnitt.

Vom Ausfließen flüssiger Körper aus Gefäßen durch sehr enge Oeffnungen.

§. 1. Erklärung. Die Hydraulik oder Hydrodynamik (denn beide Namen werden fast als gleichbedeutend gebraucht) umfaßt die Lehren von der Bewegung flüssiger Körper.

§. 2. Bemerkung. Die Bewegungen, welche ein flüssiger Körper annehmen kann, sind so mannigfaltig, daß eine allgemeine theoretische Betrachtung derselben großen Schwierigkeiten unterworfen ist. Es lassen sich zwar mit Hülfe der höhern Analysis Formeln angeben, denen jede Bewegung irgend eines flüssigen Körpers gemäß sein muß, indem auch hier die entstehende Bewegung den bewegenden Kräften eben so entsprechen muß, wie bei festen Körpern, und jedes, abgesondert gedachte Stückchen des Flüssigen zwar vielleicht beim Fortfließen seine Gestalt, aber gewiß nicht seine Masse ändern kann; aber diese Formeln sind noch so weit von einer allgemeinen Anwendbarkeit auf alle vorkommende Fälle entfernt, daß selbst die gediegensten theoretischen Schriften nur bei wenigen einfachern Arten der Bewegung in das Einzelne einzugehen, und diese Bewegungen vollständiger zu beleuchten im Stande sind.

§. 3. Bemerkung. Um die verschiedenen Bewegungen, die ein flüssiger Körper annehmen kann, besser zu übersehen, kann man die einfacheren Fälle der Linien-Bewegung und der Flächen-Bewegung von denjenigen trennen, wo die Bewegungen aller Theilchen nach allen Richtungen gehen können. Man versteht unter Linien-Bewegung den Fall, wo der flüssige Körper in eine enge Röhre eingeschlossen so fortfließt, daß alle Theilchen die in demselben Querschnitte der Röhre sich befinden, einerlei Geschwindigkeit haben, und genau oder doch beinahe sich nach parallelen Richtungen fortbewegen. Damit dies genau der Fall sei, müßte die Röhre überall gleich weit sein, mögte aber sonst, ihrer Längen-Richtung nach, jede willkürliche Gestalt haben. Die hieher gehörigen Betrachtungen lassen sich indeß noch anwenden, wenn auch nicht alle Querschnitte der Röhre genau gleich sind, wofern man nur annehmen kann, daß nahe genug alle Theilchen desselben Querschnitts auf gleiche Art fortrücken. Man rechnet hieher auch den Fall, wo Wasser aus einem überaus weiten Gefäße durch eine sehr enge Oeffnung ausfließt, weil hier wenigstens ein gleiches Sinken aller Wasserschichten in dem weiten Gefäße kann angenommen werden.

Von der Flächen-Bewegung giebt die Bewegung des Wassers in graden Canälen das passendste Beispiel. Sind die Wände dieses Canales parallel und vertical, und alle auf die Längen-Richtung des Canals senkrechte Querschnitte rechtwinklichte Parallelogramme: so kann freilich in den verschiedenen Puncten des Längenschnitts die Bewegung verschieden sein; aber gewiß bleibt jedes Theilchen beständig in derselben Vertical-Ebne, und alle Theilchen, die sich in einerlei auf den Längenschnitt senkrechten Horizontallinie befinden, haben ganz gleiche Bewegung, so daß man nur die Bewegungen in einem einzigen Längenschnitte zu untersuchen brauchte, um sie für alle Längenschnitte zu kennen. Eine solche Bewegung könnte eine ebene Bewegung heißen. Aber ähnliche

Betrachtungen würden auch für gekrümmte Canäle Statt finden, oder überhaupt da, wo die Bewegungen jedes Theilchens gewissen Flächen folgen.

Unter diesen einfacheren Fällen sind die Linien-Bewegungen die einzigen, deren Gesetze sich etwas genauer darstellen lassen, und bei diesen allein werden wir daher verweilen.

Anmerkung. Euler hat mit Rechte die besondere Betrachtung der Linien-Bewegung und Flächen-Bewegung flüssiger Körper empfohlen; er selbst aber hat nur die Gesetze der erstern genauer entwickelt. Einige Versuche, die Formeln für die Flächen-Bewegung weiter aufzulösen, habe ich in den Zusätzen zu Eulers Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper (Leipzig, bei Crusius. 1806.) gemacht, und außer diesen Bemühungen wüßte ich kaum etwas anders als Gerstners Theorie der Wellen (die auch in jenen Zusätzen erläutert ist,) als hieher gehörig anzuführen.

§. 4. Bemerkung. Wenn (Fig. 93.) das mit Wasser gefüllte Gefäß ACDB bei CD eine kleine Oeffnung hat: so wird das Wasser, wenn die Schwere auf dasselbe wirkt, durch diese Oeffnung ausfließen. Ist das Gefäß sehr weit, so wird das Herabsinken der höhern Schichten sehr langsam sein, so daß man das in die Oeffnung eintretende Wasser als ohne Geschwindigkeit, oder als hier erst seine Geschwindigkeit erlangend, ansehen kann. Jedes in die Oeffnung eintretende Theilchen des Flüssigen wird nur eine kurze Zeit durch beschleuniget, weil der Druck des Wassers im Gefäße offenbar nicht mehr auf das Theilchen wirkt, sobald es durch die Oeffnung ins Freie gelangt ist. Auf diesen Betrachtungen beruht die Bestimmung der Schnelligkeit des ausfließenden Wassers.

§. 5. Eigentlich ist die Voraussetzung, daß alle in einerlei Horizontal-Schichten fg liegenden Wassertheilchen gleich schnell fortgehen, nur für die höheren Schichten richtig. In den untersten Schichten, wie etwa hi, bleibt das seitwärts stehende Wasser bei hkC und ilD

ganz ruhig, und es bildet sich gleichsam ein Trichter, in welchem das Wasser gegen CD herabfließt. Hiedurch wird freilich veranlaßt, daß das Wasser nicht ohne alle Geschwindigkeit ist, indem es am Anfange der Oeffnung in diese eintritt; aber wir werden dennoch zuerst die Sache so betrachten, und nachher sehen, welche Aenderungen etwa wegen jenes Umstandes eintreten.

§. 6. Lehrsatz. Wenn in dem Gefäße ACDB (Fig. 93.) ein tropfbares und schweres Flüssiges enthalten ist, welches durch die, in Vergleichung gegen die horizontalen Querschnitte des Gefäßes, enge Oeffnung CD ausfließt: so ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers so groß, als die Geschwindigkeit, die ein die verticale Höhe HI frei durchfallender Körper in I erlangt hätte, wenn nämlich HI gleich der verticalen Tiefe der Oeffnung unter der Oberfläche des Wassers ist.

Beweis. Wenn wir uns das grade an der Oeffnung liegende Wassertheilchen denken, so wirkt auf dieses der ganze Druck der höhern Wasserschichten. Nenne ich also f^2 den Querschnitt der Oeffnung, $h = HI$ die Höhe der drückenden Wassersäule: so ist, wenn ich das Gewicht einer Wassersäule durch ihr Volumen darstelle, jener Druck auf die ganze Oeffnung $= ff.h$. Dieses ist die bewegende Kraft, welche das in der Oeffnung liegende Theilchen forttreibt. Denken wir uns nun diese Kraft eine kleine Zeit $= t$ durch wirkend, so ertheilt sie dem Wassertheilchen eine Geschwindigkeit $= c$. Hätte das Wassertheilchen, welches den Querschnitt der Rohre ausfüllt, sogleich diese ganze Geschwindigkeit gehabt: so wäre $c.t.ff$ die in der Zeit $= t$ ausfließende Wassermasse (weil c den in 1 Sec. durchlaufenen Raum anzeigen soll); aber nicht c ist die Geschwindigkeit während der ganzen Zeit $= t$, sondern die Geschwindigkeit nimmt von o bis c zu, oder die ersten Theilchen des kleinen Wasserkörpers haben zwar die Geschwindigkeit $= c$, die letzten unterdeß erst eintretenden die Geschwindigkeit $= o$ und die mittlere Geschwindigkeit ist folglich $= \frac{1}{2} c$,

die ausfließende Masse $= \frac{1}{2}$ c . t . ff. Dieses ist die Masse, welche durch die bewegende Kraft = ff . h fortgedrängt, in der Zeit = t die Geschwindigkeit = c erlangt, und es ist folglich (Mechan. §. 35. 28.)

$c = 2g \cdot \frac{ff \cdot h}{\frac{1}{2} c \cdot t \cdot ff} \cdot t$, indem hier (Mechan. §. 28.)

$P = ff \cdot h$ und $M = \frac{1}{2} c \cdot t \cdot ff$ ist.

Hieraus folgt $c^2 = 4g\,h$ oder c gleich derjenigen Geschwindigkeit, die ein von der Höhe = h frei herabfallender Körper erlangt hätte.

Da jedes folgende Theilchen eben so beschleuniget wird, indem es durch die Oeffnung dringt, so bleibt diese Ausflußgeschwindigkeit immer dieselbe, so lange die Wasserhöhe HI = h dieselbe bleibt.

§. 7. Dieser Beweis ist nicht völlig strenge. Er ist es desto weniger je minder wahr es ist, daß das in die Oeffnung tretende Theilchen ohne alle Geschwindigkeit ist. Welche Aenderung es bewirkt, wenn das über der Oeffnung stehende Flüssige schon eine merkliche Geschwindigkeit hat, läßt sich aus unsern bisher erklärten Kenntnissen nicht ganz übersehen. Das Theilchen leidet nur dann den ganzen Druck = ff . h, wenn es schon selbst in Bewegung ist; dann also ist die Beschleunigung geringer; aber da das Theilchen schon einige Geschwindigkeit hat, so compensirt sich dies einigermaßen, und daher kömmt es, daß die Erfahrung die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers auch da jener Formel gemäß giebt, wo doch einige Bewegung der höhern Schichten nicht zu verkennen ist.

§. 8. Bei dieser Bestimmung ist vorausgesetzt, daß kein andrer Druck, als der des Wassers selbst das Ausfließen bewirkt, und daß das ausfließende Wasser auch keinen Widerstand findet. Da wo die Oberfläche AB des Wassers eben so gut als die Oeffnung CD den Druck der Atmosphäre leidet, darf man die Betrachtung so anstellen, indem dieser Druck sich gegenseitig aufhebt. Flösse dagegen das Wasser in einen luftleeren Raum, während die

Oberfläche AB von der Atmosphäre gedrückt wird: so müßte man diesen stärkern Druck berücksichtigen. Wird dieser Druck einer Wassersäule von der Höhe $= k$ gleich gesetzt, und ist die Wasserhöhe über der Oeffnung $= h$, so ist die Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{(g(h+k))}$.

Auf eben die Art würde die Geschwindigkeit bestimmt, wenn ein anderer äußerer Druck auf die Oberfläche AB, etwa vermittelst eines Kolbens, wirkte; man müßte nämlich diesen Druck $= P$ durch die Höhe $= q$ einer eben so viel wiegenden, über der Oberfläche AB stehenden Wassersäule ausdrücken, und $c = 2\sqrt{(g(h+q))}$ als die Geschwindigkeit ansehen.

§. 9. Bemerkung. Eben die Geschwindigkeit findet man auch für Oeffnungen in der Seitenwand, wofern nur diese Oeffnungen sehr klein sind. Die Tiefe der Oeffnung unter der Oberfläche des Wassers wird dann so bestimmt, daß man die Tiefe ihres Schwerpuncts dafür ansetzt.

§. 10. Fließt das Wasser (Fig. 94.) durch die kleine Oeffnung CD nicht ins Freie, sondern in ein auch mit Wasser gefülltes Gefäß, und sind AB, EF die beiden Oberflächen: so wird der Druck, welcher in der Oeffnung den Ausfluß bewirkt, nur dem Unterschiede der Höhen BC — CE proportional sein.

Wenn das Wasser (Fig. 95.) aus einem sehr weiten Behälter ABH bei GH in ein Gefäß CK ausfließt, das selbst bei IK wieder eine Oeffnung hat: so wird zwar ein Theil des bei GH einströmenden Wassers durch die Oeffnung IK wieder ausströmen, aber da die Geschwindigkeit in GH wegen der größern Druckhöhe bedeutender ist, als in der Oeffnung IK, so wird, wenn die Oeffnungen nicht gar zu ungleich sind, das Wasser in dem Gefäße CK bis zu einer gewissen Höhe steigen. Führet die Oeffnung IK in ein zweites Gefäß EM, aus welchem erst bei LM der Ausfluß ins Freie Statt findet: so wiederholen sich hier dieselben Umstände. Wenn der Behälter AH so groß ist, daß, während der ganzen Beobachtung des

Ausflusses, das Wasser in AH nicht merklich sinkt: so kann man fragen, welche Höhe das Wasser in den Gefäßen CK, EM annehmen wird.

§. 11. Aufgabe. Wenn bei der eben betrachteten Verbindung von Gefäßen (Fig. 95.) die Größe der Oeffnungen $GH = a^2$; $IK = a'^2$; $LM = a''^2$ und die ganze Wasserhöhe $BG = h$ gegeben ist, alle Ausfluß-Oeffnungen aber in derselben Horizontallinie liegen, die Höhe $DI = x$ im ersten, $LF = y$ im zweiten Gefäße zu bestimmen, die das Wasser annimmt, ehe ein gleichförmiger Wasserstand eintritt.

Auflösung. Man findet

$$x = h.\left(\frac{a^4.\,a'^4 + a^4.\,a''^4}{a^4.\,a'^4 + a^4.\,a''^4 + a'^4.\,a''^4}\right) \text{ und } y = \frac{x.\,a'^4}{a'^4 + a''^4},$$

und nachdem diese gleichbleibenden Höhen erreicht sind, ist die ausfließende Wassermenge $M = 2\,a''^2.\sqrt{g\,y}$

$$= 2\,a'^2.\,a''^2\sqrt{\frac{g\,x}{(a'^4 + a''^4)}}$$

$$= 2\,a^2.\,a'^2.\,a''^2\sqrt{\frac{g.\,h}{(a^4.\,a'^4 + a^4.\,a''^4 + a'^4.\,a''^4)}}.$$

Beweis. Da die Wasserfläche AB immer in gleicher Höhe bleibt: so werden die Wasserflächen CD, EF nicht eher einen festen Stand erreicht haben, bis der Ausfluß aus allen drei Oeffnungen eine gleiche Wassermasse giebt. Es ist aber die Druckhöhe auf die erste Oeffnung, die nämlich dort die Geschwindigkeit des Ausflusses bestimmt, $= h - x$, auf die zweite Oeffnung $= x - y$, auf die dritte $= y$. Daher die Geschwindigkeiten $= 2\sqrt{(g\,h - g\,x)}$; $= 2\sqrt{(g\,x - g\,y)}$; $= 2\sqrt{g.\,y}$; und die ausfließenden Wassermassen in 1 Secunde gleich einem Wassercylinder von der Länge, die der Geschwindigkeit gleich ist, und von einer Grundfläche gleich der Ausfluß-Oeffnung; also

$$= 2\,a^2\sqrt{(g\,h - g\,x)} = 2\,a'^2\sqrt{(g\,x - g\,y)} = 2\,a''^2\sqrt{g\,y}.$$

Hieraus folgt $a''^4.\,y = a'^4\,(x - y)$; also

$$y = \frac{a'^4 . x}{a'^4 + a''^4}; \text{ ferner } a^4 (h - x) = a'^4 (x - y)$$

$$= a'^4 \left(x - \frac{a'^4 . x}{a'^4 + a''^4}\right),$$

also $x = h \left(\frac{a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4}{a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4 + a'^4 . a''^4}\right)$.

Und die ausfließende Wassermenge wird, M

$$= 2 a''^2 \sqrt{g . y} = 2 a'^2 . a''^2 \sqrt{\frac{g x}{a'^4 + a''^4}};$$

$$= 2 \sqrt{\frac{g x}{\frac{1}{a''^4} + \frac{1}{a'^4}}};$$

$$= 2 a'^2 . a''^2 . a^2 \sqrt{\frac{g . h}{a^4 . a'^4 + a^4 . a''^4 + a'^4 . a''^4}};$$

$$= 2 \sqrt{\frac{g . h}{\frac{1}{a''^4} + \frac{1}{a'^4} + \frac{1}{a^4}}}.$$

§. 12. Wenn alle Oeffnungen gleich groß sind, so wird $x = \frac{2}{3} h$; $y = \frac{1}{3} h$.

§. 13. Bemerkung. Hier ist immer vorausgesetzt, daß die Oberfläche des Wassers in dem Behälter in unveränderlicher Höhe bleibt. Wenn aber die Weite des Behälters nicht so ungemein groß ist, oder die Bewegung längere Zeit dauert: so sinkt die Oberfläche des Wassers, und die Druckhöhe, durch welche die Geschwindigkeit des Ausflusses bestimmt wird, nimmt ab. Hier müßte man also nach und nach für h die verschiedenen Höhen setzen, welche am Ende verschiedner Zeiten noch übrig sind.

§. 14. Aufgabe. Die Ausflußmenge des Wassers aus einem Gefäße in der Zeit $= t$ zu finden, wenn die anfängliche Höhe des Wassers $= h$ war, das Gefäß cylindrisch und der Querschnitt desselben $= b^2$, der Querschnitt der Oeffnung $= a^2$ ist.

Auflösung. Wenn die Erniedrigung der Oberfläche nicht sehr schnell ist, oder wenn b^2 ziemlich groß

gegen a^2 ist: so kann man so rechnen, als ob im ersten Zeittheilchen die Höhe $= h$ bliebe, also in der Zeit $t = 1$, die Wassermenge $= 2\, a^2 \sqrt{g\, h}$ wäre. Diese Masse füllte im Gefäße die Höhe $z = \frac{2\, a^2 \sqrt{g\, h}}{b^2}$, und am Ende dieses Zeittheilchens ist also die Druckhöhe nur noch $= h - z = h - \frac{2\, a^2}{b^2} \sqrt{g\, h}$, und die im nächsten Zeittheile Statt findende Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g} \,.\, \sqrt{(h - z)}$, die ausfließende Masse $= 2\, a^2 \sqrt{(g\, h - g\, z)}$.

Auf diese Art würde man fortrechnen können.

Zusatz für geübtere Leser.

Nimmt man an, daß nach Verlauf der Zeit $= t$ die Wasserhöhe über die Oeffnung noch $= x$ ist, so hat man in diesem Augenblicke die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g\, x}$, die während der kleinen Zeit $= dt$ ausfließende Wassermasse $= 2\, a^2\, dt \,.\, \sqrt{g\, x}$. Diese Wassermasse nahm im Gefäße die Höhe $= \frac{2\, a^2}{b^2}\, dt \,.\, \sqrt{g\, x}$ ein, und um soviel ist folglich die Höhe x während der Zeit $= dt$ vermindert, das heißt, es ist $dx = -\frac{2\, a^2}{b^2}\, dt \,.\, \sqrt{g\, x}$,

also $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = -\frac{a^2\, dt}{b^2} \sqrt{g}$;

$$\sqrt{x} + \text{Const} = -\frac{a^2\, t \,.\, \sqrt{g}}{b^2};$$

also, da $x = h$ war für $t = 0$,

$$\sqrt{h} - \sqrt{x} = \frac{a^2}{b^2}\, t \,.\, \sqrt{g}, \text{ oder}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{h} - \frac{a^2\, t}{b^2} \sqrt{g}.$$

Die in dem Zeittheilchen dt ausfließende Wassermasse ist also $M = 2\, a^2\, dt \sqrt{g\, x} = 2\, a^2\, dt \sqrt{g\, h} - \frac{2\, a^4}{b^2}\, t\, dt \,.\, g$, und die in der ganzen Zeit $= t$ ausfließende Masse

$$M = 2\, a^2\, t \sqrt{g\, h} - \frac{a^4}{b^2}\, g \,.\, t^2 = b^2\, (h - x).$$

Ein merkwürdiges Beispiel hiezu will ich aus Eytelweins Versuchen mittheilen. Aus einem Gefäße, in welchem beim Anfange des Versuches jedesmal die Druckhöhe = 3 Fuß war, ließ man durch verschiedene Mündungen, deren kleinster Durchmesser allemal einen Zoll betrug, eine Wassermenge = 4156 Cubiczoll ausfließen; die dazu nöthige Zeit ward beobachtet und betrug:

erstlich, $59\frac{1}{2}$ Secunden bei einer einfachen Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser in einer Wand von $\frac{1}{2}$ Linie dick (Fig. 98.);

zweitens, $37\frac{1}{2}$ Secunden bei einer nach der Form des zusammengezognen Strahles gebildeten Röhre, deren äußere Mündung 1 Zoll Durchmesser, die Einflußmündung 15 Linien Durchmesser hatte, die 8 Linien lang war, und abgerundete Ecken hatte (Fig. 99.);

drittens, $31\frac{1}{4}$ Secunden, wenn man an die Oeffnung in der dünnen Wand ein sich auswärts erweiterndes Rohr setzte, dessen Einflußmündung 1 Zoll Durchmesser, die Ausflußmündung $21\frac{1}{2}$ Linien Durchmesser hatte, und das $8\frac{1}{16}$ Zoll lang war (Fig. 100.);

viertens, $23\frac{2}{3}$ Secunden, wenn man innerhalb des Gefäßes die Einflußröhre wie im zweiten und außerhalb die Ausflußröhre wie im dritten Versuche anbrachte (Fig 101.).

Diese Zeiten, in welchen gleiche Quantitäten ausflossen, geben das Verhältniß der mittlern Geschwindigkeiten in der Oeffnung in den verschiedenen Fällen. Bei der Verbindung beider Röhren floß 1,55 mal so viel Wasser aus, als die Berechnung nach §. 6. ergab.

Anmerkung. Mehrere Versuche, theils eigene, theils fremde zusammengestellt, theilt Eytelwein mit, in seinem: Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Berlin, 1801. In diesem Buche findet man über alles bisher abgehandelte umständlichere Belehrung, auch werde ich auf dasselbe mehrmals verwei-

ie Rechnung eine größere Wassermasse, als die Erfah-
ung sie ergiebt. Dieses rührt nicht von einer unrichtig
estimmten Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers
er; denn wenn man durch eine sehr kleine Oeffnung AB
Fig. 96.) in der verticalen Seitenwand das Wasser aus-
ließen läßt, so bildet der hervorspringende Wasserstrahl
C eine Parabel, die sehr genau mit derjenigen überein-
immt, in welcher ein in A nach horizontaler Richtung
it einer der in §. 6. berechneten Ausflußgeschwindigkeit
leichen Geschwindigkeit geworfener Körper sich bewegen
ürde. Auch die Höhe, welche aufwärts springende
Wasserstrahlen erreichen, wenn man dem Gefäße etwa
ie Figur giebt wie Fig. 97. und den Strahl aus der
effnung CD vertical aufwärts springen läßt, stimmt
ahe genug mit der berechneten Geschwindigkeit überein,
dem der verticale Strahl fast völlig die Höhe erreicht,
elche die Oberfläche AE des Wassers hat.

Daß also die wirklich ausfließende Wassermenge ge-
nger ist, als die berechnete, hat seinen Grund nicht in
ner unrichtigen Bestimmung der Geschwindigkeit oder
r Länge des in 1 Secunde ausfließenden Cylinders; der
rund muß folglich in einer unrichtigen Bestimmung der
rundfläche des Cylinders oder des Querschnittes des
trahles liegen. Wir haben bisher immer die Oeffnung
 Gefäße als dem Querschnitte des Strahles gleich an-
sehen; aber eine genaue Beobachtung des aus engen
effnungen hervordringenden Strahles zeigt, zumal wenn
e Wand, in welcher die Oeffnung sich befindet, sehr
inne ist, daß der Strahl in einiger Entfernung außer-
lb der Oeffnung einen kleinern Querschnitt hat, als die
effnung. Diese Zusammenziehung des Was-
rstrahles kömmt daher, weil die von der Seite her
 Innern des Gefäßes zuströmenden Wassertheilchen
ig. 93.) wie m und n ihre Richtung auch außerhalb der
effnung noch behalten und daher die Verengerung oder
sammenziehung des Strahles bewirken. Diese Sei-
bewegung hindert, daß nicht so viele Wassertheilchen

in die Oeffnung eintreten, als bei ganz paralleler Bewegung eintreten würden.

Die vielen Versuche, die man über diesen Gegenstand angestellt hat, zeigen, daß bei kreisförmigen Oeffnungen in einer sehr dünnen Wand der Durchmesser des zusammengezogenen Strahles ohngefähr = $\frac{4}{5}$ vom Durchmesser der Oeffnung ist, und der kleinste Querschnitt des zusammengezogenen Strahles, der also etwa an Flächeninhalt = $\frac{16}{25}$ der Oeffnung ist, liegt in einer Entfernung von der Oeffnung, die etwas mehr als den Halbmesser der Oeffnung beträgt. Die ausfließende Wassermenge beträgt beinahe $\frac{5}{8}$ der Wassermenge, die nach §. 6. berechnet würde, und diese Verminderung findet bei allen Druckhöhen ziemlich eben so Statt, so daß die ausfließenden Wassermassen sehr nahe den Quadratwurzeln aus den Druckhöhen proportional bleiben. Die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit ist, wie sich aus der Schwungweite horizontal ausfließender Strahlen ergiebt, um nur wenig geringer, als die Formel angiebt, indem der größte Theil der Verminderung der Wassermenge von der Zusammenziehung des Strahles abhängt, dessen kleinsten Querschnitt man statt der Oeffnung setzen müßte.

§. 19. Die eben angeführten Bestimmungen gelten, wenn das Wasser durch eine Oeffnung ausfließt, die in einer dünnen Wand des Gefäßes ausgeschnitten ist. Wäre die Wand sehr dick, oder brächte man statt dessen eine kleine cylindrische Röhre an der Oeffnung an: so ändert sich die ausfließende Wassermenge. Diese Röhrchen, die indeß nicht zu lang sein müssen, vermehren die ausfließende Wassermenge, indem sie die Zusammenziehung des Strahles vermindern. Die Versuche zeigen, daß solche cylindrische Ansatzröhrchen ohngefähr $\frac{13}{16}$ der nach der Formel berechneten Wassermenge geben, also $\frac{3}{16}$ mehr als die Oeffnungen in dünnen Platten oder Wänden. Eine noch größere Wassermenge erhält man durch conische kurze Ansatzröhren, die sich nach außen verengern. Ist nämlich hier die äußere Mündung der Röhre, der Oeff-

ng in einer dünnen Wand gleich, so erhält man $\frac{9}{10}$ der
rechneten Wassermenge, wenn man die conische Röhre;
d nur $\frac{5}{8}$ der berechneten Wassermenge, wenn man die
oße Oeffnung in der dünnen Wand gebraucht.

Giebt man dieser kegelförmigen Ansatzröhre so nahe
s möglich die Gestalt des zusammengezognen Strahles,
daß der Durchmesser der Ausflußmündung = $\frac{4}{5}$ des
urchmessers der Einflußmündung ist, und die Länge
r Ansatzröhre etwas größer als der Halbmesser der Ein-
ußmündung, so fließt, zumal bei etwas abgerundeten
cken, fast völlig so viel Wasser aus, als die Formel
§. 6.) für eine Oeffnung, die der Ausflußmündung gleich
t, angiebt. Dieses ist auch sehr natürlich, denn da
ier die in die Rechnung gebrachte Mündung eben der-
nige Querschnitt ist, der vorhin der kleinste Querschnitt
es zusammengezognen Strahles war, so kann nur des-
egen die ausfließende Wassermenge nicht ganz der be-
echneten gleich sein, weil die Geschwindigkeit selbst in
em engsten Querschnitte des zusammengezogenen Strah-
s nicht vollkommen so groß ist, als die Formel annimmt.
Die Versuche mit dieser, dem natürlichen Strahl nach-
ebildeten Röhre geben etwa nur $\frac{1}{50}$ weniger an Wasser,
ls nach der Formel aus der Mündung fließen sollte.

§. 20. Man kann bei derselben Ausflußmündung
nd unter sonst gleichen Umständen die ausfließende Was-
ermenge noch durch folgendes Hülfsmittel vergrößern.
Behält man die bestimmte Oeffnung in der Wand des
Gefäßes, bringt aber eine nach außen sich erweiternde
onische Röhre an: so ist der Ausfluß bei gehörigen Ab-
messungen dieser Röhre sogar größer als die theoretisch
berechnete Wassermenge. Verbindet man aber an der
Einflußmündung die nach der Form des zusammengezog-
nen Strahls gebildete, sich nach außen verengernde
Röhre mit jener Röhre, die sich nach außen erweitert, so
wird die Zunahme der ausfließenden Wassermenge noch
erheblicher.

Ein merkwürdiges Beispiel hiezu will ich aus Eytelweins Versuchen mittheilen. Aus einem Gefäße, in welchem beim Anfange des Versuches jedesmal die Druckhöhe = 3 Fuß war, ließ man durch verschiedene Mündungen, deren kleinster Durchmesser allemal einen Zoll betrug, eine Wassermenge = 4156 Cubiczoll ausfließen; die dazu nöthige Zeit ward beobachtet und betrug:

erstlich, $59\frac{1}{2}$ Secunden bei einer einfachen Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser in einer Wand von $\frac{1}{2}$ Linie dick (Fig. 98.);

zweitens, $37\frac{1}{2}$ Secunden bei einer nach der Form des zusammengezognen Strahles gebildeten Röhre, deren äußere Mündung 1 Zoll Durchmesser, die Einflußmündung 15 Linien Durchmesser hatte, die 8 Linien lang war, und abgerundete Ecken hatte (Fig. 99.);

drittens, $31\frac{1}{4}$ Secunden, wenn man an die Oeffnung in der dünnen Wand ein sich auswärts erweiterndes Rohr setzte, dessen Einflußmündung 1 Zoll Durchmesser, die Ausflußmündung $21\frac{1}{2}$ Linien Durchmesser hatte, und das $8\frac{11}{16}$ Zoll lang war (Fig. 100.);

viertens, $23\frac{2}{3}$ Secunden, wenn man innerhalb des Gefäßes die Einflußröhre wie im zweiten und außerhalb die Ausflußröhre wie im dritten Versuche anbrachte (Fig 101.).

Diese Zeiten, in welchen gleiche Quantitäten ausflossen, geben das Verhältniß der mittlern Geschwindigkeiten in der Oeffnung in den verschiedenen Fällen. Bei der Verbindung beider Röhren floß 1,55 mal so viel Wasser aus, als die Berechnung nach §. 6. ergab.

Anmerkung. Mehrere Versuche, theils eigene, theils fremde zusammengestellt, theilt Eytelwein mit, in seinem: Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Berlin, 1801. In diesem Buche findet man über alles bisher abgehandelte umständlichere Belehrung, auch werde ich auf dasselbe mehrmals verwei

sen müssen, da es hier nicht möglich ist, alles so umständlich abzuhandeln, als es dort, fast immer überaus zweckmäßig, geschehen ist. Merkwürdige hieher gehörige Versuche enthält auch noch: Michelotti hydraulische Versuche zur Begründung und Beförderung der Theorie und Praxis, übersetzt von Zimmermann. Berlin, 1808.

§. 21. Diese auffallende Erscheinung, daß die aus-ßende Wassermenge dadurch vermehrt wird, daß man äußeren Querschnitte der Röhre vergrößert, läßt sich f folgende Weise, wie es mir scheint, erklären. Wenn n sich (Fig. 102.) die Röhre cdba, die sich nach ßen erweitert, angesetzt, und noch alles geschlossen und Ruhe denkt, so leidet der ganze Querschnitt ab einen uck = ab.h, wenn h die Wasserhöhe ist. Dieselben berlegungen, wie in §. 6., würden uns auch hier die schwindigkeit = c = $2\sqrt{gh}$ geben, und im ersten genblicke der Bewegung ist kein Grund vorhanden, rum sie nicht ziemlich nahe diesen Werth erreichen sollte. dem aber vermöge dieser Geschwindigkeit in einem klei-n Zeittheilchen = t, die Wassermasse = ab.t.$2\sqrt{gh}$ sströmt, und offenbar in der Oeffnung cd der eben so ße Druck auch nur eine eben so große Geschwindigkeit d folglich eine geringere Ausflußmenge bewirkt: so ent-t in der Röhre sogleich im ersten Augenblicke der Be-gung ein Mangel an Zufluß, also müßte ein luft- und sserleerer Raum entstehn, wenn nicht in demselben Au-blicke, wo dieser entstehen will, der Druck der Atmo-häre auf die Wasserfläche fg wegen des jetzt mangeln-n gleichen Gegendrucks bei cd wirksam würde und das asser mit mehrerer Schnelligkeit durch cd preßte. iese Vermehrung der Wassermenge durch conische Röh-n, die sich nach außen erweitern, würde also im luft-ren Raume ganz wegfallen. Dort könnte nur im er-n, kaum merklichen Augenblicke ein größerer Ausfluß tatt finden; aber der mangelnde Zufluß würde sogleich Wassermenge auf diejenige zurück bringen, die der ffnung cd entspricht.

Daß diese eben gegebene Erklärung die richtige sei, hat Daniel Bernoulli durch merkwürdige Versuche ganz genügend gezeigt. Er brachte, wie Fig. 102. zeigt, an einem verticalen Cylinder AB ein, nach außen sich erweiterndes Rohr cdab an, in welches in der engeren Gegend bei g ein Röhrchen ghi eingesetzt war, dessen Mündung in einem Gefäße mit Wasser KL stand. Indem man die Oeffnung ab verschloß, füllte man das Gefäß MNAB und ließ nun das Wasser bei ab auslaufen; aber indem es dort auszufließen anfing, zog sich das Wasser aus dem Gefäße KL durch die Röhre ihg aufwärts und floß mit aus der Oeffnung ab aus, so daß das untere Gefäß KL ganz leer wurde. Es ist wohl einleuchtend, daß hier der Druck der Luft das Wasser durch das Röhrchen aufwärts trieb, um den, bei g entstehenden luftleeren Raum zu füllen; und so ist folglich dieses wunderbar scheinende Phänomen, daß die Schnelligkeit der vorangehenden Schichten auch die nachfolgenden schneller zu sein zwingt, genügend erklärt.

§. 22. Bemerkung. Die in §. 6. gegebne Formel für die Geschwindigkeit eines aus Gefäßen ausströmenden Flüssigen, ist nicht bloß auf Wasser und tropfbare Fluida anwendbar, sondern auch auf die Luft. Denken wir uns eine enge Oeffnung, durch welche die Luft in einen luftleeren Raum einströmt, und nennen k die Höhe der Wassersäule, welche dem Drucke der Luft das Gleichgewicht hält; so ist für den ganzen Querschnitt der Oeffnung = ff die bewegende Kraft = ff . k. Dagegen ist, wenn die Dichtigkeit der Luft = q heißt, in Vergleichung gegen die als Einheit angesetzte Dichtigkeit des Wassers, die in der kleinen Zeit = t ausfließende Luftmasse $= \frac{1}{2} c \cdot t \cdot ff \cdot q$; also, wie in §. 6.

$$c = 2g \cdot t \cdot \frac{ff \cdot k}{\frac{1}{2} c\, ff\, q\, t} = \frac{4g\, k}{c q},$$

oder $c^2 = \frac{4g \cdot k}{q}$. Hätte ich den Druck, welchen die

Luft auf die Oeffnung ausübt, durch die Höhe einer Luftsäule ausgedrückt, die $= h$ wäre, so müßte bekanntlich $h.q = k$, also auch hier $c^2 = 4gh$ sein.

§. 22*. Da Versuche über ein solches Einströmen der Luft schwieriger sind: so fehlt es uns an Erfahrungen, ob auch hier eine ähnliche Verminderung der ausfließenden Luftmasse Statt finde. Die Frage, wie die Geschwindigkeit abnimmt, wenn ein gegebnes Gefäß sich nach und nach mit Luft füllt, ließe sich allenfalls beantworten und die Zeit bestimmen, da die Luft im Gefäße eine bestimmte Dichtigkeit erlangt hätte; aber Fragen der Art scheinen keinen erheblichen Nutzen zu haben.

Zweiter Abschnitt.

Vom Fortfließen des Wassers in Röhren.

§. 23. Bemerkung. Wenn Wasser sich in einer graden, überall gleich weiten Röhre ganz frei, ohne Hinderniß, fortbewegt: so muß es eben die Bewegung wie ein in der Röhre herabgleitender fester Körper annehmen. Steht also die Röhre senkrecht, wie Fig. 103., so sinkt die Wassermasse ABDC so wie ein frei fallender Körper in ihr herab, und jedes Wassertheilchen leidet gar keinen Druck, weil es dem folgenden ganz frei ausweicht.

Auch in einer engen, gegen den Horizont geneigten Röhre ließe sich, wenn wir die Bewegung als ganz frei ansehen, ganz nach den für feste Körper bekannten Gesetzen die Bewegung bestimmen, die eine darin fortrückende Wassermasse annehmen muß.

§. 24. Wenn die Röhre an einem sehr weiten Behälter (Fig. 104.) AB angebracht ist, so würden die Gesetze des Ausflusses fast ganz dieselben sein, wie im vorigen Abschnitte, wenn nicht der Widerstand in der Röhre

hier Aenderungen hervorbrächte. Da der Widerstand hier sehr bedeutend einwirkt, so will ich bei dem, was ohne Widerstand Statt finden würde, nicht umständlicher verweilen, sondern nur noch eines besonders merkwürdigen Falles erwähnen.

§. 25. Wenn an einen weitern Behälter eine so wie ABC (Fig. 105.) gekrümmte Röhre angebracht ist, die in C niedriger herabreicht, als die Oberfläche DE des Wassers im Gefäße: so fließt, wofern nur einmal die ganze Röhre mit Wasser angefüllt war, alles Wasser aus dem Gefäße bis zu der Tiefe aus, in welcher sich die Oeffnung C befindet. Diese gekrümmte Röhre heißt ein Heber, und seine Wirkungsart ist leicht zu übersehen. Wenn man die Oeffnung bei C verschlossen hält, und die Röhre ist ganz mit Wasser gefüllt, so erhält der Druck der Luft, den sie nämlich auf die Oberfläche DE ausübt, das Wasser in der Röhre, so wie im Barometer. Die Oeffnung bei A leidet also jetzt von außen den Druck der Atmosphäre und den Druck der Wassersäule von der Höhe AF, von innen aber den Druck der Wassersäule von der Höhe AG. Wenn man jetzt die Mündung bei C öffnet, so leidet diese von außen gleichfalls den Druck der Atmosphäre, von innen aber den Druck einer Wassersäule von der Höhe CH. Der Druck, welcher bei A das Wasser in die Röhre drängt, übertrifft also den Gegendruck bei C um so viel als es die Höhe CI, um welche DE höher als C liegt, angiebt, und folglich fängt das Wasser bei C an auszufließen; dieses Ausfließen aber dauert nun auch ununterbrochen fort, weil der Druck der Luft nicht gestattet, daß sich oben bei B ein luftleerer Raum bilde. Die Geschwindigkeit des bei C ausströmenden Wassers wird durch die Tiefe CI bestimmt, um welche C niedriger als DE liegt; die Geschwindigkeit ist also $= 0$, oder das Ausströmen hört auf, wenn die Wasserfläche DE sich bis an die durch C gehende Horizontale herabgesenkt hat.

Wäre bei C ein völlig luftleerer oder allenfalls mit

verdünnter Luft erfüllter Raum, so könnte der Heber selbst noch fortfließen, wenn C höher als die Oberfläche DE ist. Befände sich dagegen DE im luftleeren Raume, so würde offenbar die Wirkung des Hebers ganz aufhören; denn, selbst wenn auch bei C kein Druck der Luft Statt findet, so würde doch nur das Wasser aus BC auslaufen, und sich bei B ein leerer Raum bilden, welchen auszufüllen keine Kraft wirksam ist.

§. 26. Bemerkung. Um die Bewegung des Wassers in Röhren richtig zu beurtheilen, muß man nothwendig Rücksicht auf den Widerstand nehmen, welchen es bei dieser Bewegung leidet. Jede Wasserschichte in der Röhre (Fig. 103.) wird durch das Anhängen an der Wand der Röhre festgehalten, und diese Kraft ist folglich, wenn wir uns hier auf Röhren, deren Querschnitte Kreise sind, beschränken, dem Halbmesser der Röhre proportional. Aber, wenn alle Theilchen in einem bestimmten Querschnitte mit einerlei Geschwindigkeit fortrücken, so ist die Masse, welche durch jene verzögernde Kraft aufgehalten wird, dem Quadrate des Halbmessers proportional; und da die beschleunigende Kraft allemal der bewegenden Kraft direct und der bewegten Masse umgekehrt proportional ist, so läßt sich der Widerstand, den jeder Querschnitt leidet, ansehen, als eine dem Halbmesser umgekehrt proportionale, der Richtung der Bewegung entgegenwirkende, beschleunigende Kraft. Die Erfahrung lehrt zugleich, daß sie dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, und wir können nun die Wirkung dieses Widerstandes wenigstens in den wichtigsten Fällen bestimmen.

§. 27. Wenn die Röhre AD (Fig. 103.) vertical steht, so würde die Wassermasse AD in ihr mit immer beschleunigter Bewegung herabfallen, wenn dieser Widerstand nicht Statt fände; wegen dieses Widerstandes aber kann die Bewegung nicht in gleichem Grade beschleunigt werden. Da der Widerstand bei größeren Geschwindigkeiten immer stärker wird, so läßt sich auch hier (so wie

§. 34. Bemerkung. Diese Untersuchungen enthalten die Grundlage nicht nur zu allen denjenigen Bestimmungen, die beim Fortfließen des Wassers in Röhrenleitungen vorkommen, sondern auch zu denen, welche die Bewegung des Wassers in Druckwerken, Feuerspritzen und dergleichen betreffen. Hier ist zwar nicht immer eine drückende Wassermasse die Ursache der Bewegung, sondern meistens ein fremder Druck, den man mit dem Gewichte einer Wassersäule vergleichen kann; aber die ganze Betrachtung läßt sich doch, dem Wesentlichen nach, eben so anstellen, wie hier.

Um nur ein Beispiel von dieser Berechnung zu geben, stelle (Fig. 106.) ABC ein Gefäß mit einer 40 Fuß langen Röhre von 2 Zoll Durchmesser vor; man soll die Höhe der Wassersäule bestimmen, welche auf das Wasser wirken muß, damit es mit einer Geschwindigkeit von 6 Fuß in 1 Sec. in der Röhre fortfließe.

Die Formel (§. 29.) giebt $h = \frac{v^2}{4g} + \frac{l \cdot v^2}{c^2}$ als die erforderliche Druckhöhe. Ist also für 2 Zoll Durchmesser der Exponent des Widerstandes ohngefehr $= c = 24$ Fuß, so ist

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{6^2}{60} = 0{,}6 \text{ Fuß},$$

$$\frac{l \cdot v^2}{c^2} = 40 \cdot \frac{6^2}{24^2} = 2{,}5 \text{ Fuß},$$

also $h = 3{,}1$ Fuß. Wenn sich also zugleich die Mündung der Röhre D 20 Fuß hoch über dem Wasserspiegel EF befindet, so muß ein fremder Druck, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von 23,1 Fuß auf EF wirken, um diese Geschwindigkeit hervorzubringen. Wäre diese Röhre zur Feuerspritze bestimmt, so würde man die 2 Zoll weite Röhre mit einem engern Ausflußrohre versehen, dessen Querschnitt etwa nur $\frac{1}{10}$ vom Querschnitte der Leitröhre wäre, damit die Ausflußgeschwindigkeit 60 Fuß betrüge, wenn sie in der Zuleitungsröhre 6 Fuß

eine überall gleich weite Röhre, und auf diese allein wollen wir hier die Anwendung machen. Da aber offenbar, indem dieser Widerstand in jedem Querschnitte Statt findet, der gesammte Widerstand der Länge der Röhre $= 1$ proportional ist; so können wir den Widerstand für die ganze Röhre dem Producte $= 1 . \frac{v^2}{c^2}$ proportional setzen.

Dieses Product ließe sich hier, wo wir die bewegenden Kräfte durch Druckhöhen abmessen, vergleichen mit dem Gewichte einer Wassersäule von der Höhe $= 1$, auf welche aber nicht die Schwere, sondern eine durch $= \frac{v^2}{c^2}$ ausgedrückte beschleunigende Kraft wirkte. Bei der Einwirkung einer solchen Kraft nämlich ist das Gewicht derselben Wassersäule, die, der Schwere unterworfen, das Gewicht $= 1$ heben würde, nur $= 1 . \frac{v^2}{c^2}$.

§. 29. Aufgabe. Wenn an einem überaus weiten Gefäße eine cylindrische Ausflußröhre angebracht ist, die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher das Wasser am Ende derselben ausströmen wird.

Auflösung. Wenn h die Höhe des Wassers über der Oeffnung, l die Länge der Röhre, v die Ausflußgeschwindigkeit, c den Exponenten des Widerstandes bedeutet: so muß $\frac{v^2}{4g} = h - \frac{l . v^2}{c^2}$, also

$$v^2 = \frac{4g\, h\, c^2}{c^2 + 4gl} \text{ sein.}$$

Beweis. Obgleich, so lange das Wasser ruht, der Druck, welchen das Wasser auf die Mündung der Röhre ausübt $= h . ff$ ist, wenn die Höhe des drückenden Wassers $= h$, der Querschnitt der Röhre $= ff$ ist: so kann doch hier, wo wir die Ausflußröhre sehr lang annehmen, allenfalls nur im ersten Augenblicke die Geschwindigkeit des Ausflusses so sein, wie sie dieser Druck

Quadraten der Sinus der Anprallwinkel proportionale Höhe. Unter diesem Winkel versteht Büat (Fig. 107.) den halben Nebenwinkel des ABC, oder wenn man an die gekrümmte Röhre AEC die Tangente DF so zieht, daß AED = CEF, so ist dieses der Anprallungswinkel. Für die Fälle, da dieser Winkel nicht über 40 Grad, also ABC nicht unter 100 Grad ist, soll man nach Büats Regel das Quadrat vom Sinus AED mit dem Quadrate der Geschwindigkeit multipliciren, und dieses ohngefehr mit 0,004 multipliciren, um die nöthige Vermehrung der Druckhöhe in Fußen zu finden. Bei mäßigen Geschwindigkeiten ist diese Correction selten sehr erheblich.

§. 36. Bemerkung. Die Bewegung der Luft in Röhren, muß wegen ihrer allmähligen Ausdehnung etwas andre Gesetze befolgen. Da aber die Untersuchungen hierüber sich nicht mit vollendeter Genauigkeit ausführen lassen, und eben keine Anwendung finden, so wollen wir nur bei einem Falle verweilen.

Die Kraft, welche bei der Entzündung des Schießpulvers die Kugel in der Canone forttreibt, verhält sich im Wesentlichen so, als ob eine in hohem Grade verdichtete Luft sich ausdehnte und die Kugel vor sich her triebe. Je mehr diese verdichtete Luftmasse sich ausdehnt, desto geringer wird freilich ihr Druck, aber da er fortdauernd die Geschwindigkeit vermehrt, so wird diese desto größer, je länger die Canone ist.

§. 37. Aufgabe. In der überall gleich weiten Röhre AB ist der Raum AD (Fig. 108.) mit stark verdichteter Luft gefüllt; indem diese sich ausdehnt, muß sie einen, in der Röhre dicht schließenden Körper vor sich her treiben; man sucht die Geschwindigkeit, welche sie diesem ertheilt hat, indem er bei B die Röhre verläßt.

Auflösung. Es sei der Querschnitt der Röhre = ff, die Höhe der Wassersäule, welche dem Drucke der

Auflösung. Wenn man den Druck für den Querschnitt ef (Fig. 104.) sucht, dessen Höhe über der Ausfluß-Oeffnung = z ist, und dessen Entfernung von der Mündung = ce = s ist: so hat das in ef ankommende Wasser in dem noch übrigen Theile der Röhre den Widerstand $= s \cdot \frac{v^2}{c^2}$ zu überwinden. Diesem wird freilich zum Theil durch den Druck der Wassersäule ed, deren Höhe = z ist, entgegengewirkt, aber den Ueberrest muß nothwendig der in ef Statt findende Druck überwinden, indem sonst die Geschwindigkeit nicht gleichförmig bestehen könnte. Der Druck im Querschnitte ef ist also

$= \frac{s \cdot v^2}{c^2} - z$, oder da $\frac{v^2}{c^2} = \frac{h - \frac{v^2}{4g}}{l}$ war, jener Druck $= \frac{s}{l}\left(h - \frac{v^2}{4g}\right) - z$.

§. 32. Anmerkung. Langsdorf hat das Verdienst zuerst auf diese richtige Bestimmung des Druckes aufmerksam gemacht zu haben; daß aber auch eine rein-theoretische Ableitung eben dasselbe ergiebt, habe ich in den Zus. zu Eulers Gesetzen d. Bew. flüss. Körper S. 400. gezeigt.

§. 33. Bei diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, daß in dem weiten Gefäße gar kein Widerstand Statt finde, und daß die Wasserhöhe = h sich während der Bewegung nicht erheblich ändre, auch daß die Querschnitte des Gefäßes groß genug sind, um die dortige Bewegung der einzelnen Schichten als ganz unbedeutend bei Seite zu setzen.

Bestände die Röhre aus Stücken von verschiedener Weite, oder wäre sie zum Beispiel conisch, so müßte man auf den verschiedenen Widerstand in verschiedenen Querschnitten Rücksicht nehmen, und den an jeder Stelle geltenden Exponenten des Widerstandes gehörig bestimmen. Die hiezu nöthigen Rechnungen lassen sich hier nicht ausführen.

$$2vdv = 4g \cdot \frac{dx}{x} \cdot \frac{m\,k\,f^2\,a}{M}, \text{ also,}$$

$$v^2 = \text{Const} + \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \text{nat}\, x;$$

oder da $v = 0$ für $x = a$,

$$v^2 = \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \frac{x}{a},$$

und das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper aus der Röhre hervordringt,

$$= \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \frac{b}{a}.$$

§. 38. Die vollständige Auflösung zeigt, daß die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper die Röhre verläßt $= 2\sqrt{\frac{g.m.k.f^2.a.\log \text{nat} \frac{b}{a}}{M}}$ ist. Diese Formel könnte also dienen, um die Geschwindigkeit der aus einer Windbüchse abgeschossenen Kugel zu berechnen, wenn die Verdichtung der Luft und der Raum, den sie ausfüllt, genau bekannt ist. Sie könnte auch zu Bestimmung der Geschwindigkeit der Flinten- und Canonen-Kugeln dienen, wenn man die Elasticität der aus dem Pulver entwickelten Luft genau kennte.

§. 39. Es sei bei der Verdichtung der Luft in der Windbüchse der fortzutreibende Körper eine Kugel, deren größter Kreis $= ff$, so ist ihr Durchmesser

$= D = \frac{2f}{\sqrt{\pi}}$, weil $\frac{1}{4} D^2 \pi = f^2$, ihr Inhalt

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2f}{\sqrt{\pi}} \cdot f^2$ und $M = \frac{4}{3} \frac{f^3\,n}{\sqrt{\pi}}$, wenn die Kugel n mal so dicht als Wasser ist. Für eine Kugel ist also allgemein $\frac{f^2}{M} = \frac{3 \cdot \sqrt{\pi}}{4f\,.\,n}$. Nehme ich also für die Verdichtung der Luft, $m = 100$, $k = 32$ Fuß, $D = \frac{1}{30}$ Fuß; setze ich ferner, die verdichtete Luft nehme den Raum $a = \frac{1}{12}$ $b = \frac{1}{2}$ Fuß ein: so ist, da $f = \frac{1}{60}\sqrt{\pi}$,

ist. In diesem Falle muß man in dem Gliede $\frac{v^2}{4g}$, $v = 60$ Fuß, der Ausflußgeschwindigkeit gleich setzen, indem schon ohne allen Widerstand eine Druckhöhe von 60 Fuß erfordert wird, um diese Ausflußgeschwindigkeit hervorzubringen; dagegen ist im zweiten Gliede v nur $= 6$ Fuß, also $\frac{l.v^2}{c^2} = 2,5$ Fuß, und um so viel wird nur ohngefehr die erforderliche Druckhöhe wegen des Widerstandes vermehrt. Hätte man dagegen die ganze Leitröhre nur von 1 Zoll Durchmesser genommen, so müßte das Wasser, um durch eben das Ausflußrohr eben so schnell auszufließen, eine Geschwindigkeit $= 24$ Fuß in der Röhre haben, wodurch die für den Widerstand erforderliche Druckhöhe $= 40 . \frac{24^2}{17^2} =$ beinahe 80 Fuß würde; denn hier wird der Widerstand nicht bloß stark vermehrt durch die nöthige viermal größere Geschwindigkeit, sondern auch durch den in der engern Röhre kleinern Exponenten des Widerstandes.

Diese Bestimmung müßte noch mit Rücksicht auf mehrere Nebenumstände corrigirt werden, die ich hier nicht in Betrachtung ziehen kann. Umständlicher und zugleich mit der für Anfänger nöthigen Beschränkung auf das Wesentlichste und Wichtigste hat Eytelwein diese und ähnliche Lehren abgehandelt in seinem Handbuch der Mechanik und Hydraulik. Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik behandelt alle diese Gegenstände sehr vollständig, aber auch oft in zu viele Formeln eingehüllt.

§. 35. Bemerkung. Ein von dem bisher betrachteten Widerstande noch verschiedenes Hinderniß der Bewegung geben die Krümmungen der Röhre. Bestehen die Röhren aus graden Stücken, die unter nicht allzuscharfen Winkeln an einander gefügt sind, so vermehrt sich, nach Búats Bestimmungen, die zu Ueberwindung des Widerstandes nöthige Druckhöhe um eine den

Quadraten der Sinus der Anprallwinkel proportionale Größe. Unter diesem Winkel versteht Búat (Fig. 107.) den halben Nebenwinkel des ABC, oder wenn man an die gekrümmte Röhre AEC die Tangente DF so zieht, daß AED = CEF, so ist dieses der Anprallungswinkel. Für die Fälle, da dieser Winkel nicht über 40 Grad, also ABC nicht unter 100 Grad ist, soll man nach Búats Regel das Quadrat vom Sinus AED mit dem Quadrate der Geschwindigkeit multipliciren, und dieses ohngefehr mit 0,004 multipliciren, um die nöthige Vermehrung der Druckhöhe in Fußen zu finden. Bei mäßigen Geschwindigkeiten ist diese Correction selten sehr erheblich.

§. 36. Bemerkung. Die Bewegung der Luft in Röhren, muß wegen ihrer allmähligen Ausdehnung etwas andre Gesetze befolgen. Da aber die Untersuchungen hierüber sich nicht mit vollendeter Genauigkeit ausführen lassen, und eben keine Anwendung finden, so wollen wir nur bei einem Falle verweilen.

Die Kraft, welche bei der Entzündung des Schießpulvers die Kugel in der Canone forttreibt, verhält sich im Wesentlichen so, als ob eine in hohem Grade verdichtete Luft sich ausdehnte und die Kugel vor sich her triebe. Je mehr diese verdichtete Luftmasse sich ausdehnt, desto geringer wird freilich ihr Druck, aber da er fortdauernd die Geschwindigkeit vermehrt, so wird diese desto größer, je länger die Canone ist.

§. 37. Aufgabe. In der überall gleich weiten Röhre AB ist der Raum AD (Fig. 108.) mit stark verdichteter Luft gefüllt; indem diese sich ausdehnt, muß sie einen, in der Röhre dicht schließenden Körper vor sich her treiben; man sucht die Geschwindigkeit, welche sie diesem ertheilt hat, indem er bei B die Röhre verläßt.

Auflösung. Es sei der Querschnitt der Röhre = ff, die Höhe der Wassersäule, welche dem Drucke der

Atmosphäre das Gleichgewicht hält, $= k$, die in AD eingeschlossene Luft m mal so dicht als die atmosphärische Luft, die Länge des mit dieser Luft angefüllten Raumes $= a = ED$, die in Bewegung zu setzende Masse $= M$: so ist im ersten Augenblicke die auf M wirkende bewegende Kraft gleich dem Gewichte einer Wassermasse von dem Volumen $= m \cdot k \cdot ff$. Ist die Masse M bis nach L gelangt, so ist, wenn ich $EL = x$ setze, die noch wirkende forttreibende Kraft $= m \cdot k\, ff \cdot \frac{a}{x}$. Es ist also hier nicht schwer, nach Anleitung von §. 55. der Mechanik, die Scale der wirkenden Kräfte zu zeichnen.

Die beschleunigende Kraft nämlich, die in L auf die Masse M wirkt, ist $= \frac{m \cdot k\, f^2 \cdot a}{M \cdot x}$ und die Geschwindigkeit, welche sie der Masse M in 1 Secunde ertheilen würde, $= 2g \cdot \frac{m \cdot k \cdot f^2 \cdot a}{M \cdot x}$; zeichnet man also über CP diese Scale der Kräfte, so daß $CN = 2g \cdot \frac{m\, k\, f^2}{M}$; $QT = \frac{2g\, m\, k\, f^2\, a}{M \cdot x}$; $PO = \frac{2g \cdot m \cdot k \cdot f^2 \cdot a}{M \cdot b}$ ist, wenn $AP = b$, so ergiebt die Ausrechnung des Flächenraumes CNOP das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aus der Mündung heraus fährt (Mechan. §. 61.).

Zusatz für geübtere Leser.

Die beschleunigende Kraft $= \frac{m \cdot k \cdot f^2 \cdot a}{M \cdot x}$ treibt in der Zeit $= dt$ den Körper durch den Raum $= dx$ fort und ertheilt ihm die Zunahme der Geschwindigkeit $= dv = 2g\, dt \cdot \frac{m \cdot k \cdot f^2 \cdot a}{M \cdot x}$.

Da nun auch $v = \frac{dx}{dt}$ ist, so wird

$$2vdv = 4g \cdot \frac{dx}{x} \cdot \frac{m\,k\,f^2\,a}{M}, \text{ also,}$$

$$v^2 = \text{Const} + \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \text{nat}\, x;$$

oder da $v = 0$ für $x = a$,

$$v^2 = \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \frac{x}{a},$$

und das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper aus der Röhre hervordringt,

$$= \frac{4g\,m\,k\,f^2\,a}{M} \log \frac{b}{a}.$$

§. 38. Die vollständige Auflösung zeigt, daß die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper die Röhre verläßt $= 2\sqrt{\frac{g.m.k.f^2.a.\log \text{nat} \frac{b}{a}}{M}}$ ist. Diese Formel könnte also dienen, um die Geschwindigkeit der aus einer Windbüchse abgeschossenen Kugel zu berechnen, wenn die Verdichtung der Luft und der Raum, den sie ausfüllt, genau bekannt ist. Sie könnte auch zu Bestimmung der Geschwindigkeit der Flinten- und Canonen-Kugeln dienen, wenn man die Elasticität der aus dem Pulver entwickelten Luft genau kennte.

§. 39. Es sei bei der Verdichtung der Luft in der Windbüchse der fortzutreibende Körper eine Kugel, deren größter Kreis = ff, so ist ihr Durchmesser $= D = \frac{2f}{\sqrt{\pi}}$, weil $\frac{1}{4} D^2 \pi = f^2$, ihr Inhalt $= \frac{2}{3} \cdot \frac{2f}{\sqrt{\pi}} \cdot f^2$ und $M = \frac{4}{3} \frac{f^3\,n}{\sqrt{\pi}}$, wenn die Kugel n mal so dicht als Wasser ist. Für eine Kugel ist also allgemein $\frac{f^2}{M} = \frac{3 \cdot \sqrt{\pi}}{4f \cdot n}$. Nehme ich also für die Verdichtung der Luft, $m = 100$, $k = 32$ Fuß, $D = \frac{1}{16}$ Fuß; setze ich ferner, die verdichtete Luft nehme den Raum $a = \frac{1}{32}$ $b = \frac{1}{6}$ Fuß ein: so ist, da $f = \frac{1}{60} \sqrt{\pi}$,

also $\frac{f^2}{M} = \frac{45}{n}$ wird, $4g.m.k.a.\frac{f^2}{M}\log nat \frac{b}{a}$,

oder $v^2 = 60 \,.\, 100 \,.\, 32 \,.\, \frac{1}{6} \,.\, \frac{45}{n} \log \,.\, nat\, 24$

$= \frac{32000 \,.\, 45}{n} \log \,.\, nat\, 24$,

also für eine bleierne Kugel, wo $n = 11,3$,

$v^2 = \frac{1440000}{11,3} \log . nat\, 24 = \frac{1440000 \,.\, 3,17805}{11,3}$,

also $v = 636$ Fuß.

Hier ist $g = 15$ Fuß angenommen.

So schnell würde also bei einer nur hundertmaligen Verdichtung die Kugel fortfliegen.

§. 40. Da wir beim Schießpulver die Elasticität der entwickelten Luft nicht kennen, so könnte man die Frage umkehren, und suchen, wie sehr die Luft verdichtet sein mußte, um eine Geschwindigkeit, z. B. von 2000 Fuß hervorzubringen. Nehme ich eine 3pfündige eiserne Kugel an, so ist, weil Eisen = 7,6 mal so schwer als Wasser ist, ihre Masse $= \frac{2}{3} D \,.\, 7,6 \,.\, f^2$, D aber ist für eine solche Kugel ohngefehr = 0,22 Fuß. Wir hätten also $\frac{f^2}{M} = \frac{1}{\frac{2}{3} \,.\, 0,22 \,.\, 7,6}$, und wenn ich wieder $a = \frac{1}{24} \,.\, b = \frac{1}{6}$ Fuß, $k = 32$ Fuß setze,

$$v^2 = \frac{60,4 \,.\, m \,.\, 32 \,.\, \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} \,.\, 0,22 \,.\, 7,6} \log . nat\, 24.$$

$= m \,.\, 918$.

oder $m = \frac{4000000}{918} = 4357$.

§. 41. Unsre Betrachtungen haben darauf, daß auch die verdichtete Luft selbst eine Bewegung annimmt, und darauf daß die äußere Luft einen Widerstand leistet, nicht Rücksicht genommen. Beide Umstände vermindern die Geschwindigkeit; aber es sind ohnehin so viele, nicht genau abzuschätzende Umstände hiebei zu berücksichtigen, die

wir hier nicht in unsre Formeln aufnehmen können. Unsre Formeln zeigen doch wenigstens, daß die Geschwindigkeit, unter sonst gleichen Umständen, den Quadratwurzeln aus den anfänglichen Dichtigkeiten proportional ist, also, um eine 10mal so große Geschwindigkeit zu erhalten, die anfängliche Verdichtung 100 mal so groß sein müßte.

Wie viel die Länge des Rohres zu Vermehrung der Geschwindigkeit beiträgt, läßt sich am besten an dem Beispiele in §. 39. zeigen. Bliebe dort sonst alles eben so, aber b hätte nur die halbe Länge, so daß $\frac{b}{a} = 12$ wäre, so würde $v^2 = \frac{1440000 \,.\, \log \,.\, nat\ 12}{11,3}$;

und $v = 564$ Fuß.

Dagegen für die Länge $b = 48 \,.\, a$,

wird $v = 698$ Fuß.

Dritter Abschnitt.

Von den Oscillationen des Wassers in gekrümmten Röhren.

§. 42. **Bemerkung.** Wenn in der Röhre ABC (Fig. 109.), deren Schenkel aufwärts gekrümmt sind, sich Wasser befindet: so kann dieses nicht im Gleichgewichte bleiben, wenn nicht die Oberflächen in beiden Schenkeln in derselben horizontalen Ebne liegen. Ist durch irgend eine Kraft die eine Oberfläche bis an DE gehoben, während die andre sich in FG befindet: so strebt ohne Zweifel die ganze Wassersäule, nach der Richtung gegen C hin fortzurücken, die Oberfläche DE sinkt also während FG steigt; und obgleich in dem Augenblicke, da beide gleich hoch stehen, keine neue Kraft diese Bewegung

befördert, so fährt doch die ganze Wassermasse wegen der einmal erlangten Geschwindigkeit fort, sich nach C hin zu bewegen; die Oberfläche FG steigt also, vermöge dieser einmal erlangten Geschwindigkeit höher, als die gegen über liegende Oberfläche, und es läßt sich leicht übersehen, daß diese Oscillationen ein wechselndes, mehrmaliges Steigen und Sinken bewirken werden.

§. 43. Wenn die Röhre überall gleich weit ist und beide Schenkel vertical sind: so erhellt leicht, daß, wenn kein Hinderniß der Bewegung Statt findet, bei der ersten Oscillation die Oberfläche FG eben so hoch über den Zustand des Gleichgewichts steigen wird, als sich DE über dem Zustande des Gleichgewichts befand, indem sie zu sinken anfing; denn die Geschwindigkeit, welche so lange beschleunigt wurde, als DE noch oberhalb FG stand, nimmt eben so, wie sie zugenommen hatte, ab, indem FG sich oberhalb DE erhebt, und dieses Abnehmen geht, da in beiden Schenkeln alles gleich ist, grade nach eben dem Gesetze fort, nach welchem sich das Wachsen der Geschwindigkeit richtete. Da also nun FG nach eben den Gesetzen zu sinken anfängt, nach welchen vorhin DE herabsank, so erhellt, daß alle Oscillationen gleichzeitig und einander ganz gleich sein werden, auch unaufhörlich fortdauern müßten, wenn keine Hindernisse die Bewegung hemmten.

§. 44. Lehrsatz. Wenn die, in der gekrümmten überall gleich weiten Röhre ABC, deren Schenkel vertical sind, enthaltene Wassermasse so oscillirt, daß ihre beiden Oberflächen immer in den graden und verticalen Theilen AH, CK bleiben: so hängt die Zeit einer Oscillation bloß von der Länge DBG $= l$ der Wassermasse ab, und ist allemal gleich der Oscillationszeit eines einfachen Pendels von der Länge $= \frac{1}{2} l$, die anfängliche Erhebung der einen Oberfläche über die andre mag mehr oder minder erheblich sein.

Beweis. Es sei MN die Horizontallinie, in welcher beide Oberflächen zur Ruhe kommen würden, und

die verticale Höhe, zu welcher die eine im Anfange der Bewegung über sie erhoben war, sei = h: so ist, weil die Tiefe der andern Oberfläche ebenfalls = h war, das Gewicht der Wassersäule von der Höhe = 2h die treibende Kraft, welche die ganze Masse forttreibt. Die bewegte Masse ist die ganze Wassermasse von der Länge = l; und folglich die im Anfange der Bewegung wirkende beschleunigende Kraft = $\frac{2h}{l}$.

In jedem folgenden Augenblicke, wo die Höhe der einen Wasserfläche über MN noch = x, also die Tiefe der andern unter MN auch = x ist, findet man aus eben den Ueberlegungen die beschleunigende Kraft = $\frac{2x}{l}$, und diese Kraft ist also immer dem bis an M noch zu durchlaufenden Wege proportional, und wir haben daher hier ganz den im §. 118. der Mechanik betrachteten Fall. Die beschleunigende Kraft, mit welcher DE gegen M zu getrieben wird, ist allemal = $\frac{2x}{l}$, und da sie = $\frac{2h}{l}$ war, dort, wo die Bewegung anfing oder die Geschwindigkeit = 0 war: so ist das, was in Mechan. §. 118. p hieß, hier = $\frac{2h}{l}$, und das dortige a ist hier = h; die Kraft nämlich ist = $\frac{2h}{l}$ in der bestimmten Entfernung = h, wo die Geschwindigkeit = 0 ist, und vermöge dieser, dem Abstande von M proportionalen Kraft erlangt die Oberfläche DE, indem sie in M ankömmt, die Geschwindigkeit = $h\sqrt{\frac{4g}{l}}$, und die Zeit, die sie gebraucht, um vom höchsten Stande bis in M herabzusinken, ist so groß als die Zeit, in welcher der Quadrant eines Kreises vom Halbmesser = h mit dieser Geschwindigkeit = $h\sqrt{\frac{4g}{l}}$

durchlaufen würde, oder diese Zeit ist

$= \frac{\frac{1}{2}\pi h}{h . \sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Die Zeit einer ganzen Oscillation oder die Zeit des ganzen Sinkens der Oberfläche DE ist doppelt so groß $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, also (nach Mechan. §. 123.) eben so groß als die Oscillationszeit eines einfachen Pendels von der Länge $= \frac{1}{2} l$.

§. 45. Wären (Fig. 110.) die beiden graden Schenkel der Röhre unter den Winkel $= \alpha$ die eine, und $= \beta$ die andre gegen den Horizont geneigt, und es bedeutet MN die Horizontal-Ebne, in welcher beide Oberflächen ruhen werden: so würde, wenn MD $= z$ ist für irgend einen Stand der Wasserflächen, die senkrechte Höhe von D über M, $= z . \text{Sin}\,\alpha$, die senkrechte Tiefe von G unter N, $= z . \text{Sin}\,\beta$. Hier also ist die beschleunigende Kraft, welche in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit vermehrt, $= \frac{z}{l}(\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta)$, und da diese wieder dem Abstande von z proportional ist, die Geschwindigkeit beim Ankommen der Oberfläche in M,

$$= h\sqrt{\frac{2g}{l}(\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta)},$$

also die Zeit des Sinkens bis an M

$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g.(\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta)}}$, die Zeit eines ganzen Ueberganges der Oberfläche $= \pi\sqrt{\frac{l}{2g.(\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta)}}$ gleich der Oscillationszeit eines Pendels von der Länge

$$= \frac{l}{\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta}.$$

§. 46. Mit diesen Oscillationen läßt sich ohngefehr die Wellenbewegung des bewegten Wassers vergleichen, und Newton hat hierauf die Bestimmung gegründet, wie das Steigen und Sinken der Wellen ohngefehr von

ihrer Breite abhänge. Die letzte Betrachtung zeigt indeß, wie sehr diese Zeit von der Richtung der Bewegung oder von der Neigung der Schenkel gegen den Horizont abhängt. Um die wahre Bestimmung der Oscillationszeit der Wellen zu haben, müßte man wohl die Röhre cycloidisch und als zur Hälfte mit Wasser gefüllt ansehen.

Vollständiger handelt von der Wellenbewegung Gerstner in einer eignen Abhandlung; und Euler Gesetze des Gleichgew. u. der Bewegung flüssiger Körper §. 214 und 268. d.

§. 47. Bemerkung. Wenn (Fig. 111.) die krümmte Röhre ABCDE ungleiche Querschnitte hat: so lassen sich die Umstände bei den Oscillationen des Wassers wenigstens ohngefehr übersehen.

Ist hier MN die Horizontallinie, in welcher beide Oberflächen ruhen würden, so wird, wofern beide Schenkel cylindrisch und vertical sind, die Erhebung = x der Oberfläche in der weitern Röhre mit einem, im umgekehrten Verhältnisse der Querschnitte stehenden, größern Sinken in der engern Röhre verbunden sein. Es sei ff der Querschnitt der weiteren, kk der Querschnitt der engeren Röhre: so ist die Oberfläche in der engern Röhre um die Höhe $= \frac{x \cdot ff}{kk}$ über MN, wenn die Tiefe der Oberfläche in der weitern Röhre = x ist, unter MN. Die Schwankungen der Oberfläche in der engern Röhre sind also viel größer, als die in der weitern, und die Geschwindigkeit in jener ist viel größer als in dieser.

Da die Bestimmung der Bewegung in diesem Falle, wo in verschiedenen Querschnitten ungleiche Geschwindigkeiten Statt finden, sehr viele Schwierigkeit hat: so wollen wir nicht versuchen, die Zeit der Oscillationen und andre Umstände näher anzugeben, sondern bloß bei einer Betrachtung verweilen, die weiter fortgeführt, von practischem Nutzen ist.

§. 48. Bemerkung. Da das Wasser in der
ngen Röhre so sehr hoch steigt, wenn in der weiten
Röhre auch nur eine mäßige Oscillation hervorgebracht
wird: so könnte das als ein Mittel, um Wasser zu he-
en, gebraucht werden, wenn man nur die Oscillationen
uf eine bequeme Weise unterhalten könnte. Wäre zum
Beispiel die Röhre DE von einem 25 mal so engen Quer-
chnitte als AB, und 20 Fuß hoch, so würde man die
Oberfläche in AB nur um 1 Fuß zu heben brauchen, um
aus der Röhre DE schon einen Ausguß in 20 Fuß Höhe
u bewirken. Aber dieses, an sich richtige Mittel zum
Heben des Wassers würde eine immer neue Kraft for-
dern, um die Oberfläche in AB wieder zu heben; denn
da die ausgeflossene Wassermasse nicht mehr drückt, so
würde, selbst ohne allen Widerstand, bei der zweiten
Oscillation kein Wasser mehr ausströmen.

Bei dem Montgolfiersschen Stoßheber ist daher
eine andre Einrichtung angebracht, um das zu bewirken,
was wir bisher als bewirkt durch Hebung und Senkung
der Oberfläche in AB angesehen haben.

§. 49. Wenn in dem Stoßheber (Fig. 124.) das
Wasser in dem sehr weiten Gefäße bis an AB und in
der Steigeröhre bis an CD in einerlei Horizontallinie steht:
so ist alles in Ruhe. Das Sperrventil E, welches sich
nach unten öffnen kann, wird durch den Druck des Was-
sers gehalten, und versperrt die Oeffnung E; es muß zu
diesem Zwecke weniger wiegen, als der Druck des Was-
sers beträgt, damit dieser das Herabsinken hindre. Das
nach oben sich öffnende Steigeventil F ruhet gleichfalls.
Jetzt drückt man das Sperrventil E nieder, damit das
Wasser bei E auszulaufen anfange, und so die ganze zwi-
schen E und G liegende Wassermasse die Geschwindigkeit
annehme, welche der Druckhöhe gemäß ist; aber der
Seitendruck des Wassers verschließt sogleich wieder das
Ventil E, und nun sucht das mit großer Kraft andrän-
gende Wasser sich einen neuen Ausweg, hebt das Steige-
ventil F und dringt in die Steigeröhre. Hat es hier die

Höhe erreicht, die es der erlangten Geschwindigkeit gemäß erreichen kann: so fängt eine rückgängige Bewegung an, die sich auch durch die Leitröhre FG fortpflanzt, und die das Ventil bei F schließt. Da aber diese einmal erlangte rückgängige Bewegung nicht sogleich aufhört, so fällt das Wasser unter F weg, es entsteht hier ein luftleerer Raum, und theils der äußere Luftdruck, theils das Gewicht des Sperrventils E drückt dieses herab, welches dann die Folge hat, daß das nun sehr bald von G her wieder zuströmende Wasser abermals bei E auszufließen anfängt, alsdann E schließet und F öffnet, und so das Wasser in der Steigröhre hinauf und aus der obern Oeffnung hinaus treibt. So dauert dieses abwechselnde Schließen und Oeffnen der Ventile und folglich das Ausfließen aus der Steigeröhre unaufhörlich fort, wenn man nur durch hinreichenden Zufluß des Wassers den Widerstand im weiten Gefäße unverändert erhält.

§. 50. Obgleich es hier unmöglich ist, weiter in theoretische Bestimmungen einzugehen, so erhellt doch aus dieser Darstellung wenigstens, welche Untersuchungen man ohngefehr zu diesem Zwecke anstellen müßte. Man müßte vorzüglich aus der Geschwindigkeit des Wassers, mit welcher es aus dem Sperrventile ausfließt, und derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in der Röhre fortfließt, die Kraft berechnen, mit welcher es das Steigeventil öffnet, um in die Steigeröhre einzutreten. Diese plötzlich wirkende Kraft ist so heftig, daß sie sogar die Maschine zersprengen kann, und diese Gewalt läßt sich wohl begreiflich finden, wenn man bedenkt, daß die ganze andringende Wassermasse plötzlich ihre Bewegung verlieren müßte, wenn nicht das aufgestoßene Ventil ihr einen Ausweg gestattete. Schon wegen dieser Heftigkeit der Wirkung scheint es nöthig, die Steigeröhre mit einem Windkessel zu versehen, das ist, ein mit Luft gefülltes Gefäß anzubringen, durch welches die Steigeröhre geht. Indem nämlich das mit Heftigkeit andringende Wasser die Luft im Windkessel verdichtet, gewinnt es sogleich

einen ansehnlichen Raum, den es ausfüllen kann; dagegen kann es diesen Windkessel zersprengen, wenn er und die ganze Steigeröhre mit Wasser gefüllt sind, also der ganze Stoß theils zum plötzlichen Heben der Wassersäule, theils zum Druck auf die Wände verwandt wird. Der Windkessel hat überdies noch den Nutzen, daß er das Ausströmen des Wassers aus der Steigeröhre gleichförmiger erhält, indem (Fig. 113.) beim Oeffnen des Steigeventils ein Theil des hinaufgedrängten Wassers in den mit Luft gefüllten Raum HI des Windkessels tritt und die Luft verdichtet, diese verdichtete Luft aber sich wieder ausdehnt und den Ausfluß des Wassers aus der obern Oeffnung der Steigeröhre unterhält, während der Andrang neues Wassers nicht mehr Statt findet.

§. 51. Eytelweins zahlreiche und höchst schätzbare Versuche (in seinen: Bemerkungen über die Wirkung und vortheilhafte Anwendung des Stoßhebers. Berlin, 1805.) zeigen, daß die gehobene Wassermasse sehr stark abnimmt, wenn man die Höhe der Steigeröhre vermehrt. Betrug die Höhe, zu welcher das Wasser gehoben ward, nur ohngefehr doppelt so viel als die Druckhöhe des Wassers AB über dem Sperrventil: so ward ohngefehr $\frac{2}{7}$ so viel Wasser gehoben, als durch das Sperrventil verlohren ging; betrug dagegen die Höhe, zu welcher man das Wasser hob, 20 mal so viel als die Druckhöhe, so erhielt man nur etwa $\frac{1}{100}$ so viel Wasser gefördert, als beim Sperrventil verlohren ging.

nicht umständlich Platz finden können, einen Gegenstand übergehen zu müssen, über den sich nur, wenn man die Versuche näher betrachten kann, etwas Gründliches sagen läßt. Hier mag es genug sein, zu bemerken, daß man nach den Regeln des 6. §. für eine oben offene Ausflußmündung von der Breite $= b$, die ausfließende Wassermenge ohngefehr fände, wenn man die Höhe $BC = h$ der ganzen Ausfluß-Oeffnung in n Theile theilte und nun

$b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \sqrt{4g \cdot \frac{1}{n} h}$ als den Ausfluß aus dem obern;

$b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \sqrt{4g \cdot \frac{2}{n} h}$ als Ausfluß aus dem zweiten Streifchen und so weiter betrachtete, die so gefundene Wassermenge aber ohngefehr auf $\frac{5}{8}$ ihres Werthes reducirte, um die wahre Wassermenge zu finden.

Fünfter Abschnitt.

Vom senkrechten Stoße flüssiger Körper an feste Körper.

§. 59. Bemerkung. Wenn auf die ebne Seitenfläche eines ganz frei beweglichen Körpers M (Fig. 115.) der Wasserstrahl AB so geleitet wird, daß er die Oberfläche CD senkrecht trifft, so übt er ohne Zweifel einen Stoß auf diese Ebne aus, und zwar einen senkrechten Stoß. Die Gesetze dieses Stoßes müssen im Wesentlichen wohl mit denen, die für den Stoß fester Körper gelten, übereinstimmen, und folglich, wenn ich die Masse des festen Körpers $= M$ setze, die Geschwindigkeit, welche ihm in der sehr kleinen Zeit $= t$ ertheilt wird $= v$, hingegen die in eben der Zeit anstoßende Wassermasse $= N$ und ihre Geschwindigkeit $= c$, so müßte (Mech. §. 211.)

§. 53. Wenn man unter h die Tiefe versteht, um welche des Stromes Oberfläche in einer Entfernung = l von einem bestimmten Puncte Stromabwärts gerechnet, sich befindet: so kann man $\frac{h}{l}$, welches allemal ein kleiner Bruch ist, den Abhang des Stromes nennen, und ihm proportional können wir die beschleunigende Kraft setzen, welche das Wasser zur Bewegung antreibt. Der Widerstand dagegen muß ohngefehr dem Umfange der festen Wände, an und über welchen das Wasser fortströmt, proportional, und dem Inhalte des Querschnitts umgekehrt proportional sein (vergl. §. 26.); auch kann man, wie die Erfahrung zeigt, ihn dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional annehmen. Ist daher c die Geschwindigkeit, k der vom Wasser benetzte Umfang des Querschnitts, ff der Inhalt desselben; und bedeuten h', l', c', k', f'f' eben das für einen andern Strom, so darf man

$$\frac{h}{l} : \frac{h'}{l'} = \frac{c^2 . k}{ff} : \frac{c'^2 . k'}{f'f'},$$

setzen. Wenn also für irgend einen Fall bekannt ist, wie groß c' ausfällt, bei bestimmten Werthen von h', l', k' und f'f': so läßt sich c in jedem andern Falle finden, indem $c^2 = c'^2 . \frac{k'}{k} . \frac{ff}{f'f'} . \frac{h}{h'} . \frac{l'}{l}$.

§. 54. Nach Eytelwein (Hydraulik. §. 127.) ist $c'^2 . \frac{k' . l'}{f'f' . h} = 90{,}9$, wenn man nach rheinländischem Fuß-Maaße rechnet, also ist $c = 90{,}9 \sqrt{\frac{h . ff}{k\,l}}$.

§. 55. Wenn der Strom anschwellt, so nimmt die Geschwindigkeit zu, zugleich aber der Abhang, nebst dem Querschnitte und dem vom Wasser benetzten Umfange der festen Wände. Wäre allemal der Querschnitt ein Trapez, dessen mittlere Breite = α, Höhe = γ, so hätte man ff = $\alpha . \gamma$ und k nicht viel von α verschieden, wenn

nicht umständlich Platz finden können, einen Gegenstand übergehen zu müssen, über den sich nur, wenn man die Versuche näher betrachten kann, etwas Gründliches sagen läßt. Hier mag es genug sein, zu bemerken, daß man nach den Regeln des 6. §. für eine oben offene Ausflußmündung von der Breite = b, die ausfließende Wassermenge ohngefehr fände, wenn man die Höhe BC = h der ganzen Ausfluß-Oeffnung in n Theile theilte und nun $b . \frac{1}{n} h . \sqrt{4g . \frac{1}{n} h}$ als den Ausfluß aus dem obern; $b . \frac{1}{n} h . \sqrt{4g . \frac{2}{n} h}$ als Ausfluß aus dem zweiten Streifchen und so weiter betrachtete, die so gefundene Wassermenge aber ohngefehr auf $\frac{5}{8}$ ihres Werthes reducirte, um die wahre Wassermenge zu finden.

Fünfter Abschnitt.

Vom senkrechten Stoße flüssiger Körper an feste Körper.

§. 59. **Bemerkung.** Wenn auf die ebne Seitenfläche eines ganz frei beweglichen Körpers M (Fig. 115.) der Wasserstrahl AB so geleitet wird, daß er die Oberfläche CD senkrecht trifft, so übt er ohne Zweifel einen Stoß auf diese Ebne aus, und zwar einen senkrechten Stoß. Die Gesetze dieses Stoßes müssen im Wesentlichen wohl mit denen, die für den Stoß fester Körper gelten, übereinstimmen, und folglich, wenn ich die Masse des festen Körpers = M setze, die Geschwindigkeit, welche ihm in der sehr kleinen Zeit = t ertheilt wird = v, hingegen die in eben der Zeit anstoßende Wassermasse = N und ihre Geschwindigkeit = c, so müßte (nach Mechan. §. 211.)

einen verticalen Stab, um an der Oberfläche zu sehen, wie schnell sie fortschwimmt, so darf man nicht vergessen, daß der Strom freilich am meisten auf die Kugel, aber doch auch in einigem Maaße auf alle Puncte des Stabes einwirkt, weshalb man nicht ganz die gefundene Geschwindigkeit als diejenige ansehen kann, welche der Strom in 10 Fuß Tiefe hat.

§. 58. Bemerkung. Noch schwieriger, als die Bestimmungen der Bewegung im freien Laufe des Stromes ist es, anzugeben, wie bei Hindernissen, die dem Strome entgegen gesetzt sind, bei Einbauen und Wehren, die Geschwindigkeit sich ändert. Wenn wir an die Bestimmungen im ersten Abschnitte zurück denken, so scheint es (Fig. 114.), als ob das oberhalb des Wehres DC wegfließende Wasser in jedem Puncte eine Geschwindigkeit haben müsse, die der Quadratwurzel aus der Tiefe unter der Horizontalfläche des Wasserspiegels AB proportional ist; aber es erhellt auch sogleich, daß unsre dortige Voraussetzung die Oeffnung sei klein genug, um die Bewegung des Wassers im Gefäße als ganz unbedeutend bei Seite zu setzen, nicht Statt findet. Auf eine eigentlich theoretische Bestimmung müssen wir daher hier noch Verzicht leisten.

Allemal fällt die Oberfläche des Wassers schon vor dem Wehre bedeutend ab, so daß sie etwa die Form AE annimmt, und man müßte daher diese Verminderung des Querschnitts als eine Art von Zusammenziehung des Strahles mit in Rechnung bringen. Eytelwein zeigt aus Betrachtungen über die wirklich ausfließende Wassermenge, daß man wenigstens ohngefehr die richtige Wassermenge erhält, wenn man dieser Contraction des Strahles ein beständiges Verhältniß zur Oeffnung beilegt, wenn nämlich der Ueberfall ohne Flügelwände ist. So schätzbar aber die dort (3. und 8. Abschn.) gegebenen Untersuchungen sind (so wie ähnliche in Langsdorfs Lehrbuch der Hydraulik 13. Abschn.), so glaube ich doch hier, wo die empirischen Gründe, auf welche sie gebaut sind,

nicht umständlich Platz finden können, einen Gegenstand übergehen zu müssen, über den sich nur, wenn man die Versuche näher betrachten kann, etwas Gründliches sagen läßt. Hier mag es genug seyn, zu bemerken, daß man nach den Regeln des 6. §. für eine oben offene Ausflußmündung von der Breite $= b$, die ausfließende Wassermenge ohngefehr fände, wenn man die Höhe $BC = h$ der ganzen Ausfluß-Oeffnung in n Theile theilte und nun $b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \sqrt{4g \cdot \frac{1}{n} h}$ als den Ausfluß aus dem obern; $b \cdot \frac{1}{n} h \cdot \sqrt{4g \cdot \frac{2}{n} h}$ als Ausfluß aus dem zweiten Streifchen und so weiter betrachtete, die so gefundene Wassermenge aber ohngefehr auf $\frac{5}{8}$ ihres Werthes reducirte, um die wahre Wassermenge zu finden.

Fünfter Abschnitt.

Vom senkrechten Stoße flüssiger Körper an feste Körper.

§. 59. **Bemerkung.** Wenn auf die ebne Seitenfläche eines ganz frei beweglichen Körpers M (Fig. 115.) der Wasserstrahl AB so geleitet wird, daß er die Oberfläche CD senkrecht trifft, so übt er ohne Zweifel einen Stoß auf diese Ebne aus, und zwar einen senkrechten Stoß. Die Gesetze dieses Stoßes müssen im Wesentlichen wohl mit denen, die für den Stoß fester Körper gelten, übereinstimmen, und folglich, wenn ich die Masse des festen Körpers $= M$ setze, die Geschwindigkeit, welche ihm in der sehr kleinen Zeit $= t$ ertheilt wird $= v$, hingegen die in eben der Zeit anstoßende Wassermasse $= N$ und ihre Geschwindigkeit $= c$, so muß (nach Mechan. §. 212.)

$v = \frac{c \cdot N}{M + N}$, oder weil in einer überaus kleinen Zeit die anstoßende Wassermasse sehr unbedeutend gegen M ist, beinahe $v = \frac{c\,N}{M}$ sein.

§. 60. Lehrsatz. Wenn des senkrecht auf die Ebne CD treffenden Wasserstrahles Querschnitt $= ff$, seine Geschwindigkeit $= c$ ist: so übt er auf jene Ebne, wenn sie fest gehalten wird, einen Druck aus, der $= \frac{c^2 \cdot ff}{2g}$ ist, oder gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche $= ff$ und Höhe $= \frac{c^2}{2g}$, = der doppelten Druckhöhe, welche nöthig ist, um dem Wasserstrahl die Geschwindigkeit $= c$ zu ertheilen (§. 6.).

Beweis. Wenn wir die Masse M (Fig. 115.) als frei beweglich betrachteten, so wurde ihr in der Zeit $= t$ die Geschwindigkeit $v = \frac{c \cdot N}{M}$ ertheilt, oder da $N = ff \cdot c \cdot t$ ist, indem so viel Wasser in der kleinen Zeit $= t$ zufließt, die Geschwindigkeit $v = \frac{c^2 \cdot ff \cdot t}{M}$. Diese Geschwindigkeit ist (Mechan. §. 27. 35.) eben so groß, als sie sein würde, wenn eine beschleunigende Kraft $= \frac{c^2 \cdot ff}{2g \cdot M}$ auf den festen Körper wirkte, oder wenn eine bewegende Kraft $= \frac{c^2 \cdot ff}{2g}$ die Masse $= M$ in Bewegung zu setzen strebte.

Diese bewegende Kraft läßt sich mit einem Gewichte vergleichen; denn (Mech. §. 45.) ein Gewicht $P = \frac{c^2\,ff}{2g}$, das durch seinen Druck die Masse $= M$ in Bewegung setzt, ertheilt ihr in der Zeit $= t$ die Geschwindigkeit

$= \frac{P \cdot 2g}{M} t = \frac{c^2 \cdot ff \cdot t}{M}$. Wir dürfen also mit Recht schließen, daß der Druck, welchen der anstoßende Wasserstrahl auf die Ebne CD ausübt, wenn diese in Ruhe erhalten wird, gleich einem Gewichte $P = \frac{c^2 \cdot ff}{2g}$ ist, oder, da wir hier das Volumen des Wassers als sein Gewicht ausdrückend angenommen haben, gleich dem Gewichte einer Wassersäule von der Grundfläche $= ff$ und Höhe $= \frac{c^2}{2g}$. Da aber beim Ausflusse des Wassers aus sehr kleinen Oeffnungen die Geschwindigkeit $= c$ der Druckhöhe $= h = \frac{c^2}{4g}$ zugehört, so ist jener Wassersäule Höhe auch $= 2h$.

§. 61. Wir waren in §. 59. genöthiget, die Zeit t als sehr klein anzunehmen, weil sonst, sobald die Fläche CD schon mit erheblicher Geschwindigkeit ausweicht, der Wasserstrahl sie nicht mehr mit der ganzen Geschwindigkeit $= c$ trifft, und es uns hier auch nur um die Bestimmung des Druckes zu thun war, den der anstoßende Wasserstrahl auf eine ruhend erhaltene Ebne ausübt.

§. 62. Bei diesen Bestimmungen ist vorausgesetzt, daß der auf die Ebne stoßende Strahl seine Kraft ganz ausübe, oder daß alle einzelne Theilchen wirklich zum Stoße gelangen. Damit dieses geschehe, muß die dem Stoße ausgesetzte Fläche beträchtlich größer sein, als der Querschnitt des Strahles; denn da die an die Ebne stoßenden und seitwärts abfließenden Wassertheilchen, die Richtung der nachfolgenden Wassertheilchen ablenken, so würden diese, ohne zum Stoße zu gelangen, bei der Ebne vorbeigehen, wenn die Ebne nur grade so groß wäre, als der Querschnitt des Strahles.

Langsdorf, der sehr schöne Versuche über den Stoß des isolirten Strahles angestellt hat, findet, daß

der Halbmesser der gestoßenen Fläche über viermal so groß als der Halbmesser des Wasserstrahles sein muß, wenn dieser seine ganze Wirkung äußern soll; wenn sie so groß ist, so ist die Kraft des Stoßes gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche dem Querschnitte des Strahles und deren Höhe der doppelten zur Geschwindigkeit gehörigen Höhe gleich ist. Dagegen kann man die Kraft des Stoßes nur etwa halb so groß annehmen, wenn die Fläche, welche den Stoß leidet, nur eben die Größe hat, wie der Querschnitt des Strahles.

Aus diesem Grunde kann man auch den Stoß, welchen eine ebne, in einen breiten Strom eingetauchte Fläche leidet, nicht viel größer rechnen, als der einfachen Wassersäule gleich, deren Grundfläche der gestoßenen Fläche und deren Höhe der zur Geschwindigkeit gehörigen Höhe gleich ist. Woltmanns Versuche zeigen indeß, daß der Stoß etwas stärker wirkt, doch aber bei großen Geschwindigkeiten des Stromes diese Angabe in geringerm Verhältnisse übertrifft, als bei geringern Geschwindigkeiten. Der Widerstand, den eine in ruhendem Wasser fortgeführte Ebne leidet, ist noch verschieden von diesem Stoße des fließenden Wassers auf die bewegte Fläche, weil, wie sich wohl übersehen läßt, die Seitenbewegungen, welche das vor der Ebne abfließende Wasser annimmt, verschieden sind.

§. 63. Hätten wir in den Betrachtungen §. 59. 60. nach den Gesetzen des Stoßes elastischer Körper gerechnet, so hätten wir die Wirkung des Stoßes doppelt so groß gefunden. Nach Brunacci's Behauptung (*) kann man diese Verdoppelung der Wirkung dadurch erhalten, daß man die dem freien Wasserstrahle (wie in §. 59. 60.) ausgesetzte Ebne mit einem gehörig geformten

(*) Ich kenne diese Abhandl. nur aus einer Inhaltsanzeige in Configliacchi's Giornale di Fisica 1817., wo nicht ausdrücklich gesagt ist, ob der Verfasser Versuche hierüber angestellt habe.

Wirkung so sein, als ob in der Entfernung $= r$ von der Axe die Kraft $= \frac{c.(c - C)\,ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}$ angebracht wäre, wenn nämlich die Last mit ihrem ganzen Gewichte wirkt, und keine Reibung oder sonstiges Hinderniß der Bewegung da ist. Die im letzten Abschn. der Mechanik angestellten Untersuchungen würden uns hier leiten können, um die nach einer gewissen Zeit $= t$ eingetretene Geschwindigkeit der Schaufel zu finden; denn wenn das Moment der Trägheit des Rades und der Welle $= M.kk$ heißt, das Moment der Trägheit der heraufzuziehenden Last $= Q.\varrho^2$, so ließe sich, wenn die wirkende Kraft immer ungeändert bliebe, die erlangte Winkelgeschwindigkeit nach den dortigen Regeln bestimmen. Diese sind nun zwar hier, da mit wachsender Geschwindigkeit die Kraft abnimmt, nicht gradezu anwendbar; aber zerlegen wir die Zeit t in kleine, gleiche Theile, deren Zahl $= n$ sein mag, so können wir die während des ersten Zeittheilchens wirkende Kraft als wenig verschieden von $\frac{c^2.ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}$ ansehen; also die im ersten Zeittheilchen erlangte Geschwindigkeit der Schaufel

$$= C' = 2gr.\frac{t}{n}\left(\frac{\frac{c^2.ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}}{M.kk + Q.\varrho^2}\right)$$

setzen. Am Anfange des zweiten Zeittheilchens wirkt die Kraft

$$= \frac{c(c - C')\,ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r},$$

und wenn man diese als während des ganzen zweiten Zeittheilchens als wirkend ansieht, so ist die am Ende dieses Zeittheilchens erlangte

$$\text{Geschwindigkeit} = C' + 2gr.\frac{t}{n}\frac{\left(\frac{c.(c - C')\,ff}{2g} - \frac{Q.\varrho}{r}\right)}{M.kk + Q.\varrho^2}.$$

So ließe sich nahe genug die Geschwindigkeit für jeden folgenden Zeitraum berechnen; man würde aber aus dieser Reihe nicht leicht übersehen, daß die Geschwindigkeit nie

ansehnlichen Wasserstrom ganz eingetaucht ist, da wird man ohngefehr die Kraft des Stoßes halb so groß als im vorigen §. annehmen können. Der Fall, wo das Wasser sich in einem engen Gerinne bewegt, ist hievon verschieden, weil hier nothwendig ein Aufstauen des Wassers vor der gestoßenen Fläche eintritt, und fast alles Wasser wirklich zum Stoße gelangt. Nach Eytelwein kann man in diesem Falle die bewegende Kraft des Stoßes $= \frac{c \cdot (c - C) \cdot ff}{2g}$ beibehalten.

§. 66. Bekanntlich werden die unterschlächtigen Wasserräder durch den Stoß des Wassers so in Bewegung gesetzt, daß dieses die am Umfange angebrachten Schaufeln trifft, und sie forttreibt, wodurch dann eine Drehung des Rades um seine Axe entsteht. Nehmen wir an, der Stoß auf die Schaufel geschehe senkrecht: so haben wir hier die zur Drehung des Rades wirkende bewegende Kraft. Freilich wird, indem das Rad anfängt, sich zu drehen, die Schaufel unter einem andern Winkel gegen die Richtung des Stoßes geneigt, aber hier, wo wir nur die ersten Grundlagen einer Anwendung zeigen können, mag immer die Betrachtung so angestellt werden, als ob in jedem Augenblicke eine neue den Stoß senkrecht auffangende Schaufel da wäre. Bei eng stehenden Schaufeln weicht diese Voraussetzung eben nicht sehr von der Wahrheit ab.

Hier ist nun klar, daß für das stillstehende Rad die Stärke des Stoßes am größten ist, indem dann $C = 0$ wird; bei anfangender Drehung wird C zunehmen, aber nur bis auf einen gewissen Grad; denn offenbar kann C nie $= c$ werden, da sonst alle neue Einwirkung des Stoßes aufhören würde.

§. 67. Denken wir uns ein solches Wasserrad, an dessen Welle vom Halbmesser $= \varrho$ die Last $= Q$ hängt: so muß, wenn wir die Kraft des Stoßes als in der Entfernung $= r$ von der Axe wirkend ansehen, die ganze

einer Maschine ist der gehobnen Last und der Geschwindigkeit, mit welcher sie gehoben wird, proportional; er ist auch proportional dem Producte aus der auf die Schaufel wirkenden Kraft in die Geschwindigkeit der Schaufel, also durch das Product $= \frac{C \cdot c\,(c - C)\,ff}{2g}$ ausgedrückt. Nenne ich dieses Product $= E$, so ist

$$2g\,E = c^2\,C\,ff - c\,ff \cdot C^2,$$

oder $C^2 - c\,C = -\frac{2g \cdot E}{c\,ff}$,

und $C = \frac{1}{2}\,c \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{4}\,c^2 - \frac{2g \cdot E}{c\,ff}\right\}}$ giebt den Werth an, den C erreichen muß, damit E einen bestimmten Werth habe. Es erhellt aber, daß E nie größer als $\frac{1}{4}\,\frac{c^3 \cdot ff}{2g}$ werden kann, und daß dieser größte Effect erreicht wird, wenn $C = \frac{1}{2}\,c$ ist. Dieses würde die Bestimmung für den gesammten größten Effect geben; da aber diese Wirkung der Maschine theils in Ueberwindung von Reibung und andern Hindernissen besteht, und nur zum Theil eine nutzbare Wirkung ist, so muß man, wie Langsdorf richtig bemerkt, den größten nutzbaren Effect hievon unterscheiden, und nach andern Regeln mit Rücksicht auf die Hindernisse der Bewegung bestimmen.

Sechster Abschnitt.

Vom schiefen Stoße flüssiger Körper gegen feste Körper.

§. 69. Aufgabe. Wenn die ebne Fläche AB (Fig. 117.) dem Stoße eines unter dem Winkel ACD = α gegen sie geneigten Wasserstrahles ausgesetzt ist, die Kraft des Stoßes zu bestimmen.

Auflösung. Die ganze Kraft, welche der durch eine senkrechte Ebne aufgefangene Strahl ausübt, war $= \frac{c^2\,ff}{2g}$, wenn ich unter ff den Querschnitt des Strahles, unter c die Geschwindigkeit verstehe. Zerlege ich diese Kraft nach einer auf AB senkrechten und nach einer mit ihr parallelen Richtung: so geht hier die mit AB parallele Kraft ohne alle Wirkung verlohren, die senkrechte aber ist $= \frac{c^2 . ff}{2g} . \text{Sin}\,\alpha$, und diese bewegende Kraft strebt die Ebne nach einer auf ihr senkrechten Richtung fortzutreiben.

Wenn die Ebne sich nicht nach dieser Richtung, wohl aber nach einer der Richtung des Strahles parallelen Richtung fortbewegen kann, so muß man die eben gefundene Kraft, welche durch EF mag dargestellt werden, in eine Parallelkraft $= \frac{c^2 . ff}{2g} . \text{Sin}^2\,\alpha$, und in eine Seitenkraft $= \frac{c^2 . ff}{2g} . \text{Sin}\,\alpha . \text{Cos}\,\alpha$ zerlegen. Die letztere giebt an, mit welcher Gewalt die Ebne nach CH hin ge-

drängt wird, wenn sie sonst nach keiner Richtung auswei-chen kann.

§. 70. Die Erfahrung stimmt in Beziehung auf einzelne, isolirte Wasserstrahlen recht gut mit diesen Formeln überein; aber wenn man eine Ebne dem Stoße eines Stromes von größerem Querschnitte aussetzt, so geben die Versuche etwas ganz andres, und zeigen insbesondre, daß die aus dem Stoße parallel mit dem Strome entstehende Kraft nicht dem Quadrate von Sin α proportional ist. Diese Abweichung von der Theorie rührt unstreitig davon her, daß vor der Ebne das von A her abfließende oder sich aufstauende Wasser den unmittelbaren Stoß auf die Ebne hindert und die ganze Einwirkung viel weniger einfach macht als wir hier voraussetzen. Etwas besser als die Formel $\frac{c^2 \cdot ff}{4g} \cdot \text{Sin}^2 \alpha$ (wo man nämlich so wie in §. 63. den Stoß im offenen Strome auf die Hälfte dessen herabsetzt, was ein isolirter Strahl von eben dem Querschnitt bewirken würde), stimmt die Formel $\frac{c^2 ff}{4g} \cdot \text{Sin}\,\alpha$; aber auch diese bleibt noch von der Wahrheit entfernt.

§. 71. Diese Unsicherheit der theoretischen Bestimmung und die Schwierigkeit, auch nur aus den Versuchen eine der Erfahrung entsprechende bequeme Formel herzuleiten, ist um so mehr zu bedauern, da so viele Anwendungen uns das Bedürfniß, die Wirkung des schiefen Stoßes genau zu bestimmen, fühlen lassen. Ich will von diesen Anwendungen einige anführen, mehr um zu zeigen, was man hier leisten sollte, als um die Theorie, als ob sie dieses leiste, zu empfehlen.

§. 72. Aufgabe. Eine Kugel ist dem Stoße eines breiten Wasserstromes ausgesetzt, oder bewegt sich in einem stehenden Wasser gradlinigt fort; man sucht die Kraft, welche im ersten Falle als Stoß, im andern Falle als Widerstand wirksam ist.

Auflösung. Wir wollen hier die aus dem schiefen Stoße entstehende, der Richtung des Stromes parallele Kraft als der ersten Potenz vom Sinus des Winkels proportional ansehen. Stellt nun ACB (Fig. 118.) die Halbkugel vor, die dem Strome, welcher nach der Richtung ED sie trifft, ausgesetzt ist: so können wir uns am besten die ganze Halbkugelfläche in Zonen, deren Axe OC ist, zerlegt denken, um für jede die Wirkung des Stoßes mit CO parallel zu bestimmen. Diejenige Zone, welche durch Umdrehung des Bogens fg um die Axe entsteht, empfängt den Stoß derjenigen Wassermasse, deren Querschnitt der Ring ist, welcher aus der Umdrehung von hi um O entsteht. Dieses Ringes Inhalt ist, wenn ich $Oi + \frac{1}{2} hi = \varrho$ setze, $= 2\pi . \varrho\, hi$ (*); also die mit CO parallele Kraft des Stoßes $= \frac{c^2}{4g} . 2\pi . \varrho . hi . \text{Sin } EDK$, wenn DK die Tangente in D ist. Aber EDK ist $= 90° - DOC = DOA$, also jene Kraft

$$= \frac{c^2}{4g} . 2\pi . \varrho . hi . \text{Sin } DOA = \frac{c^2}{4g} . 2\pi . \varrho . hi . \frac{Dl}{R},$$

wenn R der Halbmesser der Kugel ist, und Dl die von der Mitte des Bogens fg auf AB gezogene Senkrechte. Der mit CO parallele Druck, welchen die Zone fg leidet, wird also ausgedrückt durch ein Product aus $\frac{c^2}{4g\,R}$ in den Inhalt desjenigen Theiles der Kugel der zwischen den cylindrischen Flächen, welche von fh und gi beschrieben werden, liegt; denn dieser Theil der Kugel ist als einem Cylinder gleich anzusehen, dessen Grundfläche der durch hi beschriebene Ring und dessen Höhe Dl ist. Da nun dies für alle Zonen der Kugel gelten würde, daß der Stoß durch das Product aus $\frac{c^2}{4g\,R}$ in den Inhalt des

---

(*) Es ist nämlich der Ring $= \pi\,(Oh^2 - Oi^2)$

$$= 2\pi . \left(\frac{Oh + Oi}{2}\right) (Oh - Oi), = 2\pi . \varrho . hi.$$

unter dieser Zone liegenden, durch cylindrische Wände abgeschnittenen Theiles der Halbkugel ausgedrückt wird; so folgt, daß der Stoß, welchen die ganze Halbkugel leidet, durch ein Product aus $\frac{c^2}{4gR}$ in den Inhalt der ganzen Halbkugel ausgedrückt wird, oder $= \frac{c^2}{4gR} \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot R^3$

$$= \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot R^2,$$

gleich zwei Dritteln derjenigen Kraft ist, welche der dem Strome senkrecht entgegen gestellte größte Kreis der Kugel leiden würde, oder gleich zwei Dritteln desjenigen Wassercylinders, der den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und $\frac{c^2}{4g}$ zur Höhe hat.

§. 73. Nach Eytelweins Versuchen ist die Kraft, mit welcher der Strom die ganze Kugel nach der Richtung des Stromes forttreibt, noch größer; vielleicht hat hieran aber auch die Adhäsion des Wassers einigen Antheil, indem der feste Körper, selbst ohne allen Stoß, vermöge des bloßen Anhängens der Flüssigkeit, einiges Bestreben, dem Strome zu folgen, zeigen muß. Hätte ich die Kraft dem Quadrate des Sinus proportional gesetzt, so wäre sie noch mehr hinter dem Werthe zurück geblieben, den die Erfahrung anzugeben scheint; sie wäre nämlich dann $= \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{1}{2} \pi R^2$ geworden.

§. 74. Nach diesen Formeln müßte der Widerstand, den eine Kugel in der Luft leidet, ebenfalls berechnet werden. Er wäre also nach unserer eben gefundenen Bestimmung gleich zwei Dritteln vom Gewichte derjenigen Luftsäule, deren Grundfläche der größte Kreis der Kugel und deren Höhe die der Geschwindigkeit des bewegten Körpers zugehörige Höhe ist. Dieser Widerstand ist der gesammte Druck, den der bewegte Körper zu überwinden hat; nenne ich ihn $= P$ und die Masse der Kugel $= M$, so

ist $\frac{P}{M}$ diejenige Kraft, die wir im 11. und 12. Abschn. der Mechanik als die der Bewegung entgegen wirkende beschleunigende Kraft ansehen. Wenn die Kugel m mal so specifisch schwer, als die Luft ist: so beträgt ihre Masse $\frac{4}{3}\pi . m . R^3$, wenn man das Gewicht eines Cubicfußes Luft als Einheit der Gewichte annimmt. Da nun $P = \frac{2}{3} . \pi . R^2 . \frac{c^2}{4g}$ war, so ist $\frac{P}{M} = \frac{1}{2} . \frac{c^2}{4g . m . R}$, also dem Halbmesser umgekehrt proportional, und der Dichtigkeit des bewegten Körpers umgekehrt proportional.

Aehnliche Ausdrücke findet man, wenn man die Kraft des Stoßes dem Quadrate des Sinus proportional setzt; nur würde dann $P = \frac{1}{2}\pi . R^2 . \frac{c^2}{4g}$ werden.

§. 75. Bemerkung. Auf die richtige Berechnung des Stoßes, den eine Kugel leidet, wenn sie dem Strome ausgesetzt ist, gründet sich die Abmessung der Geschwindigkeit des Stromes vermittelst des Strom-Quadranten. Dieser besteht nämlich (Fig. 119.) aus einer Kugel A, die an einer dünnen Stange befestigt, dem Strome ausgesetzt wird; offenbar wird der Stoß des Stromes sie so lange von der verticalen Stellung entfernen, bis das dem Stoße entgegen wirkende Gewicht des Pendels BA jenem Stoße das Gleichgewicht hält. Der außerhalb des Wassers angebrachte Quadrant DBC, giebt auf dem Gradbogen CE an, um wie viele Grade das Pendel sich von der Verticallinie entfernt hat, und daraus läßt sich die Kraft des Stoßes und folglich die Geschwindigkeit des Stromes berechnen.

Dieses Instrument ist bei Messung der Geschwindigkeit in größeren Tiefen schon an sich unbequem, und wird es dadurch noch mehr, daß man wegen des Stoßes, den der eingetauchte Theil der Stange leidet, dem Einwirken aller oberhalb A liegenden Schichten nicht entgehen kann.

§. 76. Bemerkung. Alle Untersuchungen über diesen Gegenstand haben wir nur mit Rücksicht auf die Vorderfläche des Körpers angestellt, und in der That kann uns auch die Theorie kaum veranlassen, den hintern Theil des Körpers mit in Betrachtung ziehen zu wollen. Gleichwohl zeigen die Versuche, daß im freien Wasser, vorzüglich wenn der feste Körper fortgezogen wird, und also einen Widerstand leidet, auch der hintere Theil des Körpers einen entschiedenen Einfluß auf die Größe des Widerstandes hat. Die Versuche Chapmanns (die man aus Clemens Beschreibung von Chapmanns Versuchen zu Bestimmung des Widerstandes flüssiger Massen (Berlin, 1797.) kann kennen lernen,) waren vorzüglich mit auf diesen Gegenstand gerichtet. Aber der zahlreichen Versuche ungeachtet scheint diese Lehre noch immer durchaus nicht genügend aufgeklärt zu sein; vielleicht wäre es sogar vortheilhaft, alle Versuche mit möglichster Vereinfachung der Umstände noch einmal zu wiederholen, da hier so viele einzelne Umstände einwirken, die man nothwendig einzeln muß kennen lernen. Ehe diese Kenntniß nicht vollständig erlangt ist, können auch andre hieher gehörige Fragen, z. B. welche Figur ein Körper haben muß, um den kleinsten Widerstand zu leiden, nur ein theoretisches Interesse haben, da die Gesetze, die wir hiebei voraussetzen müssen, vielleicht sehr von den eigentlichen wahren Gesetzen abweichen mögen.

§. 77. Bemerkung. Wenn die vom Stoße des Wassers getroffene Ebne AB (Fig. 120.) selbst fortrückt: so muß man wieder die relative Geschwindigkeit der Wassertheilchen gegen die Ebne bei der Bestimmung des Stoßes in Rechnung bringen. Rückt die Ebne AB senkrecht auf die Richtung des Strahles EF mit der Geschwindigkeit $= C$ fort: so gelangt in der Zeit $= t$ der Punct F nach G und es ist $FG = C \cdot t$; es wird aber jetzt ein andrer Punct H vom Wasserstrahle getroffen, dessen Entfernung von $F = FH = C \cdot t \cdot \text{Cotang}\,\alpha$ ist, wenn ich $FHG = \alpha$ nenne. Die Geschwindigkeit also,

mit welcher die Ebne dem Stoße des Strahles ausweicht, ist $= C \cdot \text{Cotang}\,\alpha$, und also die relative Geschwindigkeit des Strahles $= c - C \cdot \text{Cotang}\,\alpha$.

§. 78. Aufgabe. Die Kraft des schiefen Stoßes auf eine Ebne, die senkrecht gegen die Richtung des Stoßes ausweicht, zu bestimmen, die Kraft nämlich, mit welcher sie die Ebne nach der Richtung FG forttreibt.

Auflösung. Sie ist

$$= \frac{c \cdot ff}{2g} (c - C \cdot \text{Cotang}\,\alpha)\ \text{Sin}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\alpha;$$

denn die anstoßende Wassermasse bleibt $= c \cdot ff$, wenn ff der Querschnitt des Wasserstrahles ist, die (nach §. 60. berechnete) Kraft des Stoßes ist also

$$= \frac{c \cdot ff}{2g} (c - C \cdot \text{Cotang}\,\alpha),$$ nach der Richtung des Wasserstrahles. Von dieser Kraft ist aber nur der auf CD senkrechte Theil wirksam

$$= \frac{c \cdot ff}{2g} (c - C \cdot \text{Cotang}\,\alpha) \cdot \text{Sin}\,\alpha,$$ und die auf CD senkrechte Kraft muß in eine mit FG parallele

$$= \frac{c \cdot ff}{2g} (c - C \cdot \text{Cotang}\,\alpha) \cdot \text{Sin}\,\alpha \cdot \text{Cos}\,\alpha$$ und eine auf sie senkrechte zerlegt werden. Nur die erstere trägt zum Forttreiben der bewegten Ebne bei.

§. 79. Auch die Wirkung des Stoßes läßt sich anwenden, um durch einen isolirten Strahl ein Rad zu treiben. Denkt man sich nämlich (Fig. 121.) eine gegen die Ebne der Zeichnung senkrechte Welle A, um welche das Rad, an dem die Stoßfläche BC angebracht ist, sich drehen kann: so wird, wenn die Stoßfläche unter einem Winkel $= 90^\circ - \alpha$ gegen die Ebne des Papiers geneigt, der Wasserstrahl aber senkrecht auf eben diese Ebne ist, eine Drehung der Fläche BC um A erfolgen, die durch eine Kraft, der eben bestimmten gleich, bewirkt wird. Folgen sich also mehrere solche Flächen, wie BC, die

nach und nach den Stoß empfangen: so kann die Bewegung des Rades fortdauernd unterhalten werden.

Bei diesen, durch einen isolirten Strahl umgetriebenen Rädern, hat der Wasserstrahl eine mit der Axe des Rades parallele Richtung und trifft die schief gestellten Schaufeln, indem er zwischen sie hinein geleitet wird, und sogleich eine zweite antrifft, indem die fortgedrehte erste sich seiner Wirkung entzieht.

§. 80. Bemerkung. Obgleich diese Theorie nur da völlig paßt, wo die ganze Bewegung des Wasserstrahles völlig zerstört wird: so dürfen wir doch wohl das Wesentlichste derselben auch da anwenden, wo ein unbegrenzter Strom auf die schief gestellten Flächen stößt. Man bedient sich bekanntlich solcher Flächen oder Flügel bei den Windmühlen, und bei der Einrichtung dieser muß ich noch einen Augenblick verweilen.

Um mit dem Einfacheren anzufangen, betrachte ich zuerst den Woltmannischen Windmesser (Anemometer) und Strommesser; — Instrumente, die ihren Zweck, die Geschwindigkeit des Windes und des Stromes anzugeben, sehr gut erfüllen. Dieser besteht aus vier gegen einander senkrechten, in einer Ebne liegenden Flügelruthen (Fig. 121.), an deren Enden kleine ebne Flächen gegen die Ebne ADEFG geneigt angebracht sind. Diese kleinen ebnen Flächen, wie BC, schneiden die Ebne DEFG in der verlängerten Richtung des Halbmessers, so daß DH die Durchschnittslinie ist; alle sind unter gleichen Winkeln gegen jene Ebne und so gestellt, daß der mit der Axe A parallele Strom des Windes oder Wassers alle nach derselben Richtung forttreibt. Die Kraft des Windes oder des Stromes treibt also die Flügel um, und treibt sie mit beschleunigter Bewegung fort, so lange die Geschwindigkeit noch nicht bis zu einem gewissen Grade zugenommen hat.

Nenne ich, wie in §. 67. die am Umfange der Welle vom Halbmesser $= \rho$ entgegen wirkende Last, worin ich die Reibung mit begreife, $= Q$, so ist

$$= \frac{c \, . \, ff}{2g} (c - C \, Cotang \, \alpha) \, Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha - \frac{Q \, . \, \rho}{r},$$

die gesammte bewegende Kraft, die auf BC, in der Entfernung = r von der Umdrehungsaxe wirkt. Diese Kraft beschleunigt immerfort die Bewegung, und C, als die Geschwindigkeit des in der Entfernung = r von der Axe liegenden Punctes, nimmt so lange zu, bis diese Kraft = 0, oder bis

$$C = c \, . \, tang \, \alpha - \frac{Q \, . \, \rho}{r} \, . \, \frac{2g}{c \, ff \, Cos^2 \, \alpha} \text{ ist.}$$

Bei dem Windmesser und Strommesser richtet man es gern so ein, daß C = c wird, oder die Mitte der Stoßfläche sich eben so schnell fortbewegt, als die Luft- oder Wassertheilchen fortströmen. Wäre also, was hier beinahe der Fall ist, Q = 0, so müßte man tang α = 1, α = 45° nehmen; da indeß Q nicht ganz verschwindet, so wird α etwas größer, wenn C = c werden soll. Das Instrument ist nun so eingerichtet, daß ein gezähntes Rad, das durch die Drehung der Axe A umgetrieben wird, die Umdrehungen der Axe zählt, folglich den ganzen von BC in einer gewissen Zeit durchlaufenen Weg angiebt. Dieser ist, weil C = c, eben so groß als der Weg, den in derselben Zeit die Luft- oder Wassertheilchen zurückgelegt haben, also wird die Geschwindigkeit des Windes oder Stromes hiedurch bestimmt.

§. 81. Bemerkung. Ich habe bisher die Fläche BC so betrachtet, als ob der ganzen Fläche Geschwindigkeit als gleich groß könne angesehen werden. Dieses ist nur dann möglich, wenn die Höhe DH der Stoßfläche sehr geringe ist, wie sie es bei den Wind- und Strommessern zu sein pflegt, wo keine große Kraft, um das Instrument in die gehörige Bewegung zu setzen, erforderlich ist. Soll aber eine so erhebliche Wirkung hervorgebracht werden, wie bei Windmühlen, so ist es nöthig, die Stoßflächen größer zu nehmen. Wollte man nun die ganze Stoßfläche als eine einzige Ebne annehmen, so ist einleuchtend, daß die der Axe nahe liegenden Theile der-

selben der anstoßenden Luft nicht so schnell ausweichen, als die entferntern, und daß die entferntern wohl allzuschnell ausweichen könnten. Denn wäre für die entfernteren Theile der Axe $C = c \cdot \tang \alpha$, so würde auf diese gar keine Kraft mehr wirken, und die größere Länge der Flügel gar nichts nützen; wäre vielleicht sogar für einige Theile des Flügels $C > c \cdot \tang \alpha$, so würden diese entferntesten Theile sogar einen Widerstand leiden, weil die Luft vermöge ihrer eignen Geschwindigkeit dem umlaufenden Flügel nicht schnell genug auswiche.

Da es nun offenbar zweckmäßig ist, den Windmühlenflügel so einzurichten, daß jeder Punct desselben mit gleicher Gewalt vom Winde fortgetrieben werde: so muß $c - C \cdot \tang \alpha$ überall gleichen Werth haben, oder C sich umgekehrt, wie $\tang \alpha$ verhalten. Da nun C in verschiedenen Puncten des Flügels sich verhält, wie der Abstand von der Axe oder die Geschwindigkeit $C = \frac{r \cdot \gamma}{a}$ ist, für die Entfernung $= r$ von der Axe, wenn sie $= \gamma$ war, in der Entfernung $= a$ von der Axe: so muß für den ganzen Flügel $r \cdot \tang \alpha$ unveränderlich sein; das heißt, man nimmt in verschiedenen Entfernungen von der Axe die Neigung der Flügelfläche so, daß die Tangente des Winkels, welchen sie mit der Richtung des Windes macht, dem Abstande von der Axe umgekehrt proportional ist. Die Flügel erhalten also eine gekrümmte Gestalt, die man ihre Windschiefe nennt.

§. 82. Anmerkung. Diese ersten Grundzüge einer Anwendung der Lehre vom Stoße flüssiger Körper bedürfen noch mannigfaltiger Verbesserung, die ich hier, wo ich bloß einen Begriff von dieser Anwendung geben wollte, nicht mittheilen kann. Manches Nützliche hierüber hat Langsdorf im Lehrbuch der Hydraulik gesagt, indeß wären wohl sorgfältige und jeden einzelnen Umstand einzeln prüfende Versuche nöthig, um uns zu richtigen Regeln für die Anwendung zu leiten. Denn obgleich es an mannigfaltigen Versuchen über den Stoß und Widerstand flüssiger Körper und selbst auch über die Wirkung verschieden geformter Windflügel, nicht

fehlt: so sind doch die meisten derselben nicht so vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitend, daß man genau über den Einfluß jedes Umstandes belehrt würde.

Siebenter Abschnitt.

Von der Rückwirkung des Wassers.

§. 83. Bemerkung. Wenn ein mit Wasser gefülltes Gefäß (Fig. 122.) von allen Seiten geschlossen ist, so übt das Wasser auf alle Seitenwände einen, sich gegenseitig aufhebenden Horizontaldruck aus; wird aber nun die Oeffnung n gemacht, so daß hier das Wasser ausströmen kann: so leidet die gegen über liegende Stelle m einen Druck, der nicht mehr durch den gleichen Druck auf n zerstört wird. Hier also leidet das ganze Gefäß einen überwiegenden Druck nach der Seite hin, wo m liegt, und würde dahin ausweichen, wenn die Reibung auf dem Boden und ähnliche Hindernisse dieses erlaubten.

§. 84. Dieser Ueberschuß des Druckes, der daher entsteht, daß das ausfließende Wasser an der Stelle der Oeffnung nicht mehr den Druck auf das Gefäß ausübt, den es ausübte, ehe die Ausflußmündung geöffnet würde, heißt die Rückwirkung des ausströmenden Wassers.

§. 85. Diese Rückwirkung läßt sich brauchen, um Maschinen zu treiben. Denkt man sich nämlich (Fig. 123.) ein um die verticale Axe AB bewegliches Gefäß CD, das mit einer horizontalen Röhre EF in Verbindung steht, die bei G eine horizontale Ausflußmündung hat: so wird, wenn Gefäß und Röhre beständig mit Wasser gefüllt erhalten werden, das bei G ausströmende Wasser eine Drehung der Röhre und folglich des ganzen Gefäßes um die Axe AB bewirken.

Diese Betrachtung zeigt hinreichend, daß die Rückwirkung des Wassers eine mit der gedrehten Axe AB in

Verbindung stehende Maschine in Bewegung setzen könnte, und läßt so die ersten Gründe übersehen, auf denen die Einrichtung des Segnerschen Wasserrades beruht. Bei der genauern Betrachtung der hier wirkenden Kräfte muß man darauf Rücksicht nehmen, daß bei schon entstandener Bewegung auch die Schwungkraft mit einwirkt. Da die nähern Untersuchungen hierüber zu verwickelt werden, so muß ich mich hier damit begnügen, nur einen Begriff von dieser Wirkung gegeben zu haben.

§. 86. Zu den Erfolgen dieser Rückwirkung gehört auch das Zurückprallen der Canonen beim Schusse. Bliebe die hier entwickelte sehr verdichtete Luft- oder Dampfmasse in einem überall verschlossenen Raume, so würde der Druck nach allen Seiten gleich sein, und kein Verschieben des Gefäßes oder der Canone Statt finden; aber indem die heftig drückende elastische Materie nach einer Richtung ausströmen kann, muß sie durch ihren fortdauernden Druck auf das Gefäß nach der entgegengesetzten Richtung dieses mit großer Gewalt forttreiben, so wie es bei der Canone der Fall ist.

Da die Meteore, Feuerkugeln nämlich und Sternschnuppen, aus einer von innen aufgeblähten Masse zu bestehen scheinen, — wofern man der Beobachtung, daß Feuerkugeln eine veränderliche Gestalt zeigen, trauen darf: so könnte es wohl sein, daß sie ihre überaus große Geschwindigkeit durch die Rückwirkung des an einer Seite mit großer Heftigkeit hervorbrechenden elastischen Fluidi erhielten. Denn da hier der Strom elastischer Flüssigkeit, der aus dem brennenden oder glühenden Körper hervorbricht, vielleicht immerfort unterhalten wird, so müßte er in einer Gegend, wo der Widerstand so unbedeutend ist, sehr große Geschwindigkeiten hervorbringen.

Druckfehler und Verbesserungen zum I. Theile.

Seite 13. Zeile 1. lies: §. 28.
— 15. — 1. lies: y, statt x.
— 17. — 17. lies: P, P, Q, Q + x.
— 23. — 1. lies: Statt.
— 24. — [illegible] lies: S und U.
— — — 2. streiche das S weg.
— — — 12. lies: $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$, statt $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$,
— 27. — 15. lies: den T und S.
— 29. letzte Zeile und an einigen andern Stellen lies: proportional, statt proportionell.
— 31. Z. 21. lies: 180.
— 41. — 30. lies: CD : BE.
— 47. — 22. lies: denn, für dann.
— — — 6. von unten, lies: Momente für + S.
— 56. — 24. lies: nach NS.
— 58. — 24. lies: auf die sie.
— 61. — 20. lies: Lehnsatz, statt Lehrsatz.
— 66. — 26. lies: UE.
— 71. in den letzten Zeilen ist Fig. 46. anzuführen vergessen.
— 73. Z. 13. von unten, lies: alle.
— 98. — 17. lies: das Gewicht R.
— 102. — 2. von unten, [illegible]
und [illegible]
— 103. — 1. lies: $\frac{a}{\text{[illegible]}}$, statt $\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]} n}$
— 104. — 8. von unten, lies: f : P Sin $(\alpha + \varphi)$.
— 105. — 6. lies: Cg, statt CG.
— 125. — 5. von unten, lies: AC K.
— 129. — 7. von unten, lies: §. 229. Erklärung.
— 146. — 8. lies: P . DE, statt 2 P . DE.
— 148. — 14. von unten, lies: Ba, statt BG.
— 160. — 9. lies: oder, statt odder.
— 169. — 8. von unten, lies: Z.
— 185. — 20. lies: A und B.
— 198. — 9. lies: $\left(\frac{K - h.D}{K}\right)^n = \left(1 - \frac{h.D}{K}\right)$.

Druckfehler und Verbesserungen zum II. Theile.

Seite 5. Zeile 8. lies: des Körpers unter dem Winkel = a.
— 9. — 19. lies: Bewegung in Beziehung auf einen.
— 27. — 8. lies: $s = ct - \frac{1}{2}gt^2$.
— 31. — 27. lies: $v = 2\sqrt{g \cdot AA}$, statt $2\sqrt{g \cdot Au}$.
— 40. — 6. lies: Fig. 24. statt [illegible]
— 43. — 6. lies: oder $\frac{v^2}{x} =$ [illegible]
— 46. — 4. lies: also $= 0$ ist für $x = a$.
— 50. — 2. lies: $>$ [illegible] $(h - u)$ [illegible]
— 54. — 3. von unten, lies: $d\alpha = -\frac{[illegible]}{(1 + w^2)^2}$.
— 55. — 9. lies: Arc. Cosin. [illegible]
— 73. — 2. lies: [illegible]
— — — [illegible] lies: [illegible] statt [illegible]
— — — 13. muß im Nenner 8, statt 4 stehen.
— 91. — 17. lies: $= \frac{(\text{Sehne } \alpha B)^2}{2a}$ [illegible]
— 93. letzte Zeile lies: oder da zum Sin [illegible] der
— 111. Zeile 8. lies: Entfernungen von jenen.
— 114. — 5. von unten muß der Nenner zum Quadrate erhoben werden.
— 115. — 6. lies: $\text{Sin}^2 \mu$, statt $\text{Sin}^2 \alpha$.
— 119. — 12. lies: $DC^2 + DU^2$.
— 122. — 2. lies: $= y^2$, statt $= v^2$.
— 124. — 13. lies: $MNP = \lambda$.
— 126. — 10. muß gleich zu Anfang $\frac{a^2 N^2}{b^2}$ stehen.
— — — 13. ist die Parenthese nicht geschlossen.
— 127. — 12. fehlt hinter der Parenthese { } das Zeichen der Quadrat-Erhebung.
— — — 17. lies: desselben.
— 138. — 5. von unten, lies: dw, statt gw.
— 141. — 16. lies: $mn = z\,d\psi$.
— 142. — 5. von unten, fehlt ein Wurzelzeichen.

S. 146. Zeile 5. lies: als der doppelte in der Zeit
— 147. — 7. von unten, lies: der Richtung der Bewegung grade
— 152. — 1. lies: $n = 1$.
— 156. — 9. muß $1 + \frac{c^2}{k^2}$,
— — — 13. muß $1 + \frac{v'^2}{k^2}$ stehen.
— 159. — 18. lies: $2g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$
— 182. — 11. lies: $= n \cdot e$.
— 194. — 5. lies: $\varphi \cdot r'$, statt $\varphi' \cdot r$.
— 206. — 11. lies: von der durch die Axe der x und z.
— 208. — 1. muß der Exponent der Potenz nicht $\frac{3}{2}$, sondern $\frac{1}{2}$ sein.
— 212. — 17. lies: haben.
— 213. — 6. fehlt im Nenner a^2.
— 218. — 12. lies: CM = r.
— 219. letzte Zeile, lies: gleiche Winkelgeschwindigkeit.
— 223. Z. 19. lies: aber kleiner als
— — — 21. lies: $< \frac{2}{n} b \; \left(\frac{2}{n} b\right)^2$.
— 226. — 9. lies: $\frac{1}{12} \frac{b}{h} ((h - f)^4 - f^4) + \frac{1}{3} b f^3$.
— 256. — 3. lies: BC.
— 262. — 15. lies: $- \rho \cdot f (P + M + N)$.

